SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES

A. Définitions

A-I. Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique lorsque le passage d'un terme au suivant se fait en additionnant une constante. La constante est appelée raison de la suite.

A-II. Suite géométrique

Une suite (u_n) est géométrique lorsque le passage d'un terme au suivant se fait en multipliant par une constante. La constante est appelée raison de la suite.

B. Propriétés et techniques pour les suites arithmétiques

B-I. Comment reconnaître qu'une suite est arithmétique ?

On calcule $u_{n+1} - u_n$: si cette différence ne dépend pas de n alors la suite est arithmétique et sinon il vaut mieux chercher un contre-exemple pour montrer que la suite n'est pas arithmétique.

B-II. Comment s'exprime u_n en fonction de u_p , n (indice) et R (raison) ?

$u_n = u_0 + nR$ ou bien $u_n = u_1 + (n-1).R$ ou bien $u_n = u_2 + (n-2).R$ … plus généralement :

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p).R}$$

B-III. Comment connaître le sens de variation d'un suite arithmétique ?

On remarque que $u_{n+1} - u_n = R$ et que $u_{n+1} - u_n$ donne le sens de variation de (u_n) :

- Si $R < 0$ alors (u_n) est décroissante strictement.
- Si $R = 0$ alors (u_n) est constante.
- Si $R > 0$ alors (u_n) est croissante strictement.

… et avec des inégalités larges on obtient le sens de variation « au sens large ».

B-IV. Comment additionner des termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

On appelle S la somme à calculer, on l'écrit « à l'endroit » puis en dessous, « à l'envers » : la somme par colonne est alors constante et il suffit donc de multiplier cette constante par le nombre de colonnes… et de diviser le résultat par 2.

Exemple : Quelle est la somme des multiples de 7 compris entre 100 et 200 ?

$$\begin{array}{lcl} S & = & 105+112+119+...+182+189+196 \\ S & = & 196+189+182+...+119+112+105 \\ \hline 2S & = & 301+301+301+...+301+301+301 \end{array}$$

Comme il y a 14 colonnes (attention c'est là qu'on rencontre le plus souvent les erreurs) on obtient : $2S = 14 \times 301 ...$ donc $S = 2107$.

On peut fabriquer une « recette » qui correspond à ce calcul mais il est plus utile et plus facile de retenir la méthode employée plutôt qu'une recette plus ou moins magique.

C. Propriétés et techniques pour les suites géométriques

C-I. Comment reconnaître une suite géométrique ?

On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: si ce quotient de dépend pas de n alors la suite est géométrique et sinon il vaut mieux chercher un contre-exemple pour montrer que la suite n'est pas géométrique.

C-II. Comment s'exprime u_n en fonction de u_p , n (indice) et R (raison) ?

$u_n = u_0.R^n$ ou bien $u_n = u_1.R^{n-1}$ ou bien $u_n = u_2.R^{n-2}$ … plus généralement :

$$\boxed{u_n = u_p.R^{n-p}}$$

C-III. Comment connaître le sens de variation d'un suite géométrique ?

- Si la raison est négative, la suite n'est pas monotone
- Si la raison est positive et supérieure à 1…
  - soit le terme initial est positif et la suite est croissante
  - soit le terme initial est négatif et la suite est décroissante
- Si la raison est 1 la suite est constante
- Si la raison est positive et inférieure à 1…
  - soit le terme initial est positif et la suite est décroissante
  - soit le terme initial est négatif et la suite est croissante

Remarque : Toute suite géométrique dont la raison R vérifie $|R| < 1$ converge vers 0 c'est à dire que les termes sont de plus en plus proches de 0… On exprime cela par la propriété :

Quel que soit le réel positif ε , on peut trouver un entier N tel que $\left(n > N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon\right)$

C-IV. Comment additionner des termes consécutifs d'une suite géométrique ?

On commence par remarquer que :

$$(1-x).(1+x+x^2+...+x^n) = 1+x+x^2+...+x^n-x-x^2-...-x^n-x^{n+1} = 1-x^{n+1}$$

On en déduit que pour tout x différent de 1, on a : $1+x+x^2+...+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

On a enfin : $u_k + u_{k+1} + ... + u_{k+n} = u_k.\left(1+R+R^2+...+R^n\right) = u_k.\frac{1-R^{n+1}}{1-R} = \frac{u_k - u_{k+n+1}}{1-R}$.

On peut retenir cette méthode sous la forme :

$$\frac{\text{" premier terme écrit moins premier terme pas écrit "}}{\text{" 1 moins la raison "}}$$

D. Suites définies par récurrence

On admet que :

Si f est une fonction continue et monotone dans un intervalle I telle que $x \in I \Rightarrow f(x) \in I$, alors en choisissant x_0 dans I et en posant $x_{n+1} = f(x_n)$ on définit une suite qui converge vers un point fixe de f c'est à dire l'une des solutions de l'équation $f(x) = x$.

E. Exercices d'application

1) Une suite arithmétique est telle que la somme des termes d'indice 5 à 21 vaut 3.

- Quelle est sa raison si le terme u_0 vaut 8 ?
- Quel est le terme u_{30} si la raison est -1 ?

2) Quelle est la somme des entiers de 54 à 102 ?
3) Un puisatier (celui qui creuse les puits) se fait payer 100€ le premier mètre qu'il creuse puis 130€ le deuxième mètre, 160€ le suivant… et ainsi de suite chaque mètre coûtant 30€ de plus que le précédent.
   - Quel est le prix à payer pour faire creuser un puits de 10m de profondeur ?
   - Quelle profondeur peut-on demander au puisatier si on dispose d'un budget de 1500€ ?
4) Additionner toutes les puissances de 1,1 à exposants entiers relatifs qui donnent des résultats entre 1 et 2. Idem pour les puissances de 0,9.
5) Une machine à laver le linge a un cycle de lavage composé d'un lavage, de n rinçages et d'un essorage. Pour le lavage, la machine prend 20 litres d'eau et on met 90g de lessive. A chaque rinçage, la machine se vidange -mais il reste deux litres d'eau avec le linge- et elle reprend 20 litres d'eau. On admet que le fonctionnement de la machine est tel que la répartition de la lessive est uniforme à chaque vidange.
   - Sachant que la dernière eau de rinçage doit contenir moins de 0,5 g/l de lessive si on ne veut pas que le linge sente mauvais, combien de rinçages faut-il envisager ?
   - Le nombre de rinçages est celui qui vient d'être déterminé et l'essorage élimine 21 litres d'eau : quelle quantité de lessive va alors rester sur le linge ?
6) En homéopathie, on utilise un produit actif et pour préparer les médicaments on dilue plusieurs fois ce produit dans un solvant (de l'eau et de l'alcool le plus souvent)… c'est à dire qu'on prend $10\,cm^3$ de produit pour en faire 1 litre de solution… puis on reprend $10\,cm^3$ de cette solution qu'on re-dilue pour en faire à nouveau 1 litre de solution… et on recommence. Sur le site http://www.ldi5.net/bio/homeo.php on peut lire :

> On part de la substance de base, le plus souvent une **teinture-mère** (mélange d'eau, d'alcool et de plantes ou de parties animales), et l'on opère des **dilutions successives**, au 1/100^e les unes des autres pour les « **Centésimales Hahnemanniennes** », désignées par « **CH** ».
>
> **Une goutte de la substance de base mélangée à 99 gouttes de solvant** (eau + alcool) donne la « première **C**entésimale **H**ahnemannienne » ou « **1 CH** ».
>
> En partant d'**une goutte de cette 1 CH et en ajoutant 99 gouttes de solvant**, on obtient une nouvelle dilution appelée « deuxième **C**entésimale **H**ahnemannienne » ou « **2 CH** » et qui représente une dilution au 1/100^e de la 1 CH, soit une dilution au 1/10 000^e de la substance de base.
>
> A partir de la 2 CH, une nouvelle dilution au 1/100^e donne la « 3 CH » (soit une dilution au millionième de la substance de base). On peut ainsi monter, en France, jusqu'à la « 30 CH ».

   - Si on répète la dilution 20 fois pour obtenir une « 20 CH » quel volume de produit actif restera dans le litre de la solution obtenue ?
   - En admettant que la masse volumique du produit initial est $1\,kg/m^3$, quelle est la masse de produit actif contenu dans un flacon de 20 ml vendu en pharmacie. Si la masse molaire de ce produit est $40\,g/mole$ combien cela fait-il de molécules de produit actif dans le flacon ?
7) Une suite (u_n) est telle que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}$.
   - Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + \frac{2}{3}$ est géométrique.
   - Prouver que (v_n) converge et déterminer sa limite. Qu'en déduit-on pour (u_n) ?
8) Une suite (u_n) est telle que $u_{n+1} = au_n + b$ est dite arithmético-géométrique.

- Montrer qu'en posant $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ on définit une suite géométrique. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite arithmético-géométrique converge.