Géométrie et différentielle

A. Rappel sur produit scalaire, produit vectoriel

A-I. Produit scalaire

Définition : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs du plan ou de l'espace, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le **nombre réel** p tel que $\begin{cases} p = 0 \text{ si } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ est nul} \\ p = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v}) \text{ sinon} \end{cases}$

Notation : Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ se note $\vec{u}.\vec{v}$.

Remarques :

- On dit que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ lorsque $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est maximum lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
- Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est minimum lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Propriété en géométrie plane ou dans l'espace :

- Si trois points A, B et C sont tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$, en appelant H le projeté orthogonal de C sur (AB) on a $\vec{u}.\vec{v} = \overline{AH}.\overline{AB}$

Propriété en géométrie plane :

- Si le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et si on a $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

alors on a $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Propriété en géométrie dans l'espace :

- Si l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et si on a $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

alors on a $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

A-II. Produit vectoriel

Définition : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de l'espace, on appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le **vecteur** $\vec{w}$ **orthogonal à** $\vec{u}$ et **orthogonal à** $\vec{v}$ tel que :

$$\begin{cases} \|\vec{w}\| = 0 \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \\ \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\left|\sin(\vec{u},\vec{v})\right| \text{ sinon, } \left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right) \text{ étant un repère direct.} \end{cases}$$

Notation : Le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ se note $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou bien $\vec{u} \times \vec{v}$.

Remarques :

- Dire que $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ revient à dire $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a une norme maximum lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

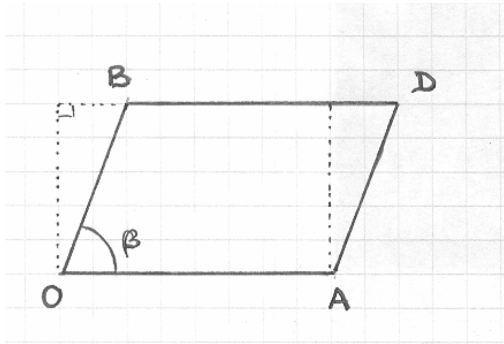
Propriétés algébriques :

- Le produit vectoriel se distribue sur l'addition : $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

- Quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si k est un réel, on a $k.(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v})$

Cas particulier d'un repère orthonormé direct :

Si $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un **repère orthonormé direct** de l'espace on a $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ …



Propriété en géométrie plane :

- Si deux côtés issus d'un même sommet d'un parallélogramme représentent les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors l'aire de ce parallélogramme est $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

  Sur le dessin ci-contre, on a $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ avec $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \beta$. On sait que l'aire d'un parallélogramme est « base x hauteur » or la hauteur peut s'exprimer sous la forme $OB.|\sin(\beta)|$ ce qui donne $Aire = OA.OB.|\sin(\beta)| = \|\overrightarrow{OA}\|.\|\overrightarrow{OB}\|.|\sin(\beta)| = \|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|$

- Si trois points A, B et C sont tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, en considérant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme des vecteurs de l'espace, $\frac{1}{2}\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du triangle (ABC).

  C'est une évidence puisqu'un triangle est un « demi parallélogramme »

Propriété en géométrie dans l'espace :

- Si l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et si on a $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

alors on a $\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - y'z).\vec{i} + (zx' - z'x).\vec{j} + (xy' - x'y).\vec{k}$.

Cette expression est facile à mémoriser par une présentation « en déterminants »… Explication orale au tableau.

Démonstration :

Lorsque le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est orthonormé et direct, on a par définition $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ si bien que $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ qui revient à $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ et $\vec{v} = x'.\vec{i} + y'.\vec{j} + z'.\vec{k}$ donne en distribuant : $\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - y'z).\vec{i} + (zx' - z'x).\vec{j} + (xy' - x'y).\vec{k}$

A-III. Exemples d'applications mathématiques

1. Equation de plan

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne $\begin{cases} A(1;-1;0) \\ B(0;2;1) \\ C(1;1;-3) \end{cases}$.

A quelle condition le point $M(x;y;z)$ est-il dans le plan (ABC) ?

2. Coordonnées d'un vecteur orthogonal à un plan

- Démontrer que pour tout plan d'équation $ax + by + cz = d$ dans un repère orthonormé, le vecteur de coordonnées a, b, c est orthogonal à ce plan.

- Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on donne $\begin{cases} A(1;-1;0) \\ B(0;2;1) \\ C(1;1;-3) \end{cases}$. Préciser les coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ d'un vecteur orthogonal au plan (ABC).

A-IV. Exemple d'application physique : vecteur rotation

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, un point $M(x;y;z)$ tourne autour de l'axe des cotes à vitesse angulaire constante… ses coordonnées vérifient donc : $\begin{cases} x = R.\cos(\omega t+\varphi) \\ y = R.\sin(\omega t+\varphi) \\ z = \text{Constante} \end{cases}$.

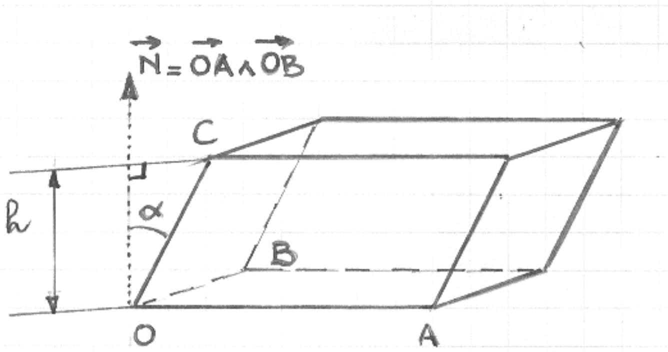
Pour calculer les coordonnées de la vitesse de $M(x;y;z)$, on doit dériver ses coordonnées par rapport au temps et on obtient donc : $\vec{V}(M)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\omega R.\sin(\omega t+\varphi) \\ \dfrac{dy}{dt} = \omega R.\cos(\omega t+\varphi) \\ \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$.

Si on appelle $\vec{\Omega}$ le vecteur de coordonnées $\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \omega \end{cases}$ on peut remarquer que le produit vectoriel $\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées… $\begin{cases} -\omega R.\sin(\omega t+\varphi) \\ \omega R.\cos(\omega t+\varphi) \\ 0 \end{cases}$ … c'est à dire que $\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \vec{V}(M)$.

Ce résultat est en fait très général, et en particulier : toute rotation à vitesse constante ω autour d'un axe Δ peut être représentée par un vecteur constant $\vec{\Omega}$ de norme $|\omega|$ porté par Δ et tel que le vecteur $\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$ soit le vecteur vitesse du point en rotation.

A-V. Application au calcul du volume d'un parallélépipède.

Soit un parallélépipède dont trois arêtes issues du même sommet sont des représentants des vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ comme le montre le dessin ci-contre où $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$; $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$:



On sait que la surface de base a pour aire $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|$ et on montre facilement que la hauteur est le produit de la norme de $\vec{w}$ par la valeur absolue du cosinus de l'angle entre $\vec{w}$ et la normale au plan « de la base »… c'est à dire $hauteur=\left\|\vec{w}\right\|.\left|\cos(\vec{w},\vec{u}\wedge\vec{v})\right|$ et comme on sait que $\left|(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}\right|=\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|.\left\|\vec{w}\right\|.\left|\cos(\vec{u}\wedge\vec{v},\vec{w})\right|$ on en déduit finalement que : $hauteur=\dfrac{\left|\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w}\right|}{\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|}$ … donc que le volume est $\left|\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w}\right|$

A-VI. Exercices

1. Le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est orthogonal direct et tel que $\left\|\vec{i}\right\|=2$, $\left\|\vec{j}\right\|=1$, $\left\|\vec{k}\right\|=3$.

- Quel est le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{u}'$ lorsque $\begin{cases}\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\\ \vec{u}'=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\end{cases}$?
- En déduire quelle est la norme de $\vec{v}$ tel que $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$.
- Quel est le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{u}'$ lorsque $\begin{cases}\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\\ \vec{u}'=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\end{cases}$?
- En déduire quelle est la norme de $\vec{u}\wedge\vec{u}'$ lorsque $\begin{cases}\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{u}'=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\end{cases}$

2. Calcul de distance

- Dans le plan

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ on donne $\begin{cases}A(1;-1)\\ B(0;2)\end{cases}$ et $M(-2;0)$.

Quelle est la distance du point M à la droite (AB) ?

- Dans l'espace

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on donne $\begin{cases}A(1;-1;0)\\ B(0;2;1)\\ C(1;1;-3)\end{cases}$ et $M(-2;0;1)$.

- Quelles sont les coordonnées du projeté orthogonal de A sur le plan BCD ?
- Quelle est la distance de A à la droite (OB) ?
- Quelles sont les coordonnées du projeté orthogonal de A sur la droite (OB) ?
- Quelle est la distance du point M au plan (ABC) ?

3. On donne en repère orthonormé quatre points $A(1;0;2)$, $B(-1;1;0)$, $C(2;0;0)$, $D(1;-1;1)$

- Quel est le volume du pavé dont trois arêtes sont $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$?
- Quelle est la distance de A au plan BCD ?

4. Encore dans l'espace

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on donne $\begin{cases} A(1;-1;0) \\ B(0;2;1) \end{cases}$ et $M(-2;0;1)$.

Quelle est la distance du point M à la droite (AB) ?

B. Retour sur la différentielle d'une fonction à deux variables

B-I. Coupes et représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction à deux variables s'obtient en « faisant des coupes » c'est à dire en déterminant les courbes obtenues en fixant l'une des coordonnées.

Exemples traités en cours…

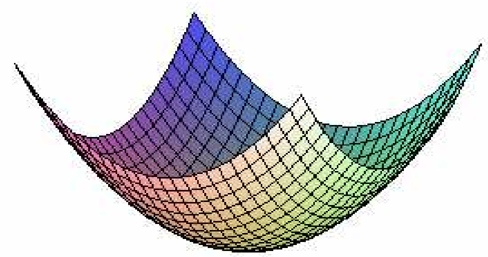
$$f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$f(x;y)=x^2+y^2$$
$$f(x;y)=1-x^2-y^2$$

B-II. Courbes coordonnées et représentation « informatisée »

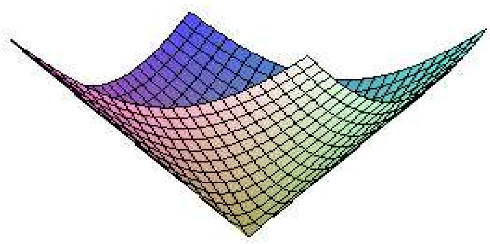
On appelle « courbe coordonnée » toute courbe obtenue en coupant la surface représentant une fonction à deux variables $(x;y)$ par un plan d'équation $x=x_0$ ou $y=y_0$. Les logiciels informatiques dédiés aux mathématiques (par exemple MAPLE, MATHEMATICA, DERIVE, MATHCAD, MATHSOFT…) utilisent ces courbes coordonnées pour représenter les fonctions à deux variables.

Voici quelques exemples de représentations données par MAPLE :

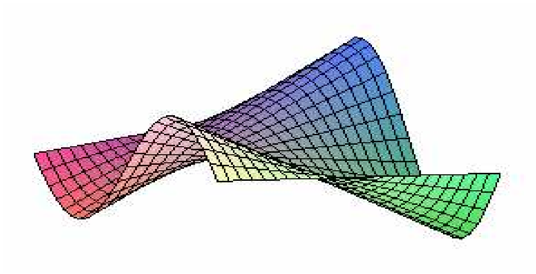
- $f(x;y)=x^2+y^2$ en réduisant les variations de $(x;y)$ au domaine [-3 ;3]x[-3 ;3] :



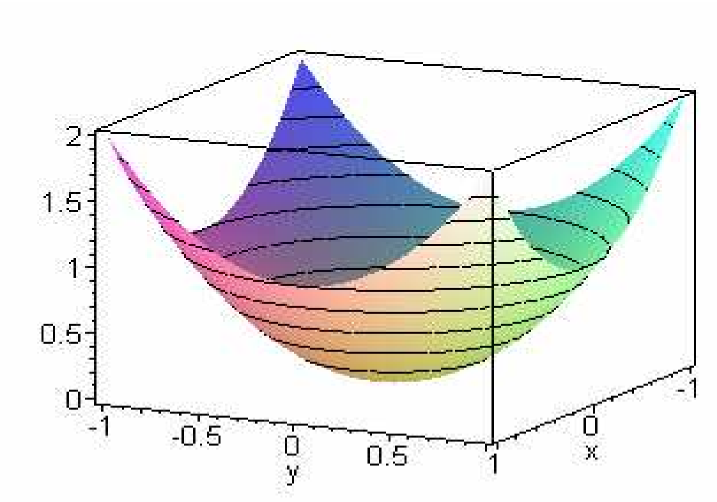
- $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$ en réduisant les variations de $(x;y)$ au domaine [-3 ;3]x[-3 ;3] :



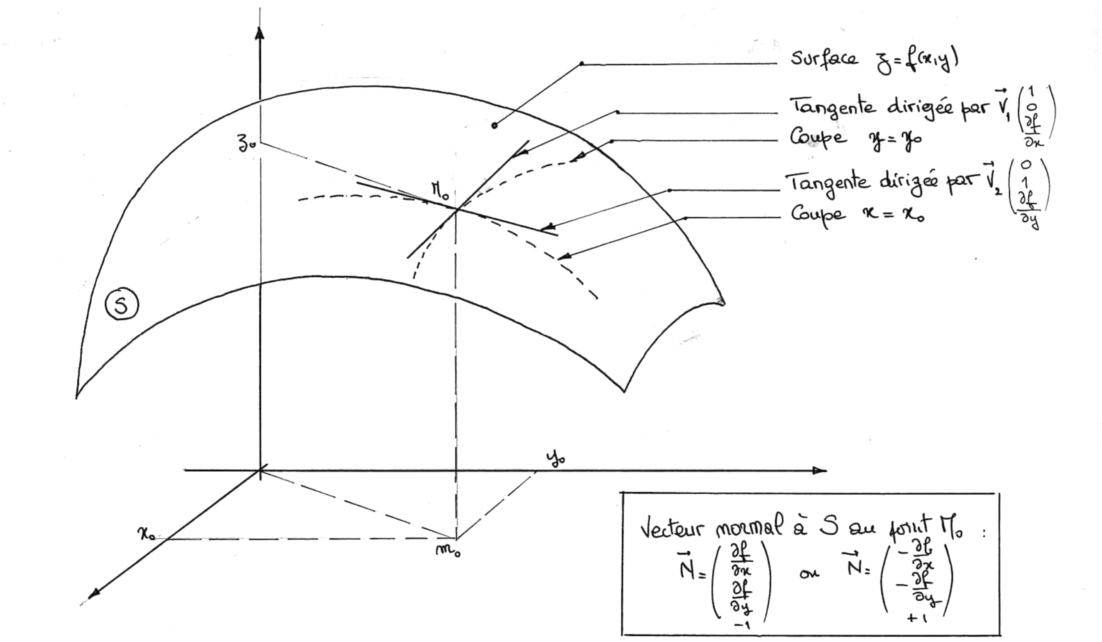
- $f(x;y) = (2x-1).\sin(y)$ en réduisant les variations de $(x;y)$ au domaine [-3 ;3]x[-3 ;3] :



Remarque : On peut aussi, et c'est assez fréquemment utilisé en tracé manuel, utiliser des coupes « horizontales » c'est-à-dire des coupes de la surface obtenues en fixant la valeur de la cote z. Par exemple, sur le dessin suivant on a représenté la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ c'est-à-dire la surface d'équation $z = x^2 + y^2$ en fixant la valeur de z … chaque coupe est alors un cercle.



B-III. Tangentes et vecteurs tangents, plan tangent, vecteur normal



S est la surface représentative d'une fonction f à deux variables x et y.

On choisit un point $M_0(x_0; y_0; z_0)$ sur S donc tel que $z_0 = f(x_0; y_0)$.

a. On construit la coupe $x = x_0$ de S.

La courbe obtenue peut être considérée comme la représentation graphique d'une fonction, disons f_{x_0} telle que $f_{x_0}(y) = f(x_0; y)$, dont la seule variable est y. La tangente est alors une droite (entièrement contenue dans le plan $x = x_0$) dont le coefficient directeur est le nombre dérivé de f_{x_0} en y_0 … c'est à dire $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)$.

Un vecteur directeur $\overrightarrow{V_2}$ de cette tangente a alors en première coordonnée nécessairement 0 mais sa deuxième coordonnée peut-être choisie… pour faire simple, prenons 1… La troisième coordonnée s'en déduit alors en multipliant la variation d'antécédent par le coefficient directeur de la tangente, ce qui fait $1.\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)$.

La tangente à la coupe $x = x_0$ au point $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ est dirigée par

$\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \end{pmatrix}$ … notation qu'on réduit souvent à $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ ou bien $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{pmatrix}$

b. On construit la coupe $y = y_0$ de S.

La même construction conduit à la conclusion :

La tangente à la coupe $y = y_0$ au point $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ est dirigée par

$\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \end{pmatrix}$ … notation qu'on réduit souvent à $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}$ ou bien $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{pmatrix}$

La connaissance des deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ permet de définir au point M_0 le plan tangent à S puisque deux droites sécantes déterminent un plan unique. Une normale à ce plan en M_0 s'obtient en calculant le produit vectoriel de $\overrightarrow{V_1}$ par $\overrightarrow{V_2}$ ce qui donne, en repère orthonormé : $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ +1 \end{pmatrix}$ suivant qu'on calcule $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ ou $\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_1}$.

Ce vecteur n'est, en général, pas unitaire… mais on peut le rendre unitaire en le divisant par sa norme **puisqu'il n'est jamais nul.**

B-IV. Exercices en repère orthonormé

1. On donne $f(x; y) = (2x-1).\sin(y)$ et on appelle S la représentation graphique de cette fonction. Calculer les coordonnées d'un vecteur normal unitaire au point d'abscisse 0 et d'ordonnée 0 situé sur S.

2. On donne $f(x; y) = x^2 e^{\frac{1}{1+y^2}}$ et on appelle S la représentation graphique de cette fonction. Former une équation du plan tangent à la surface S au point $A(1; 0; f(1; 0))$. Quelle est la distance de l'origine à ce plan ?

C. Compléments : fonction continue, fonction différentiable.

C-I. *Définition de la continuité*

> Si f est une fonction à deux variables $(x;y)$, on dit que f est continue en $(x_0;y_0)$ si**, quelle que soit la façon dont** $(x;y)$ **tend vers** $(x_0;y_0)$, on a $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=f(x_0;y_0)$.

Il faut bien comprendre que faire tendre séparément x vers x_0 et y vers y_0 ne suffit pas : ce ne serait que deux cas particuliers… Comme la distance entre le point $M(x;y)$ et le point $M_0(x_0;y_0)$ peut s'écrire $\sqrt{h_x^2+h_y^2}$ en posant $\begin{cases} x=x_0+h_x \\ y=y_0+h_y \end{cases}$, on voit souvent la définition de la continuité sous la forme :

> Si f est une fonction à deux variables $(x;y)$, on dit que f est continue en $(x_0;y_0)$ si on a
> $$\lim_{\sqrt{h_x^2+h_y^2}\to 0} f(x+h_x;y+h_y)=f(x_0;y_0).$$

Exemples de fonctions **discontinues** en (0;0) :

- $f(x;y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } x \text{ ou } y \text{ est non-nul} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
  - Si $x\neq 0$ et si $y\to 0$ on a $f(x;y)\to 0$ c'est à dire $f(x;y)\to f(0;0)$
  - Si $y\neq 0$ et si $x\to 0$ on a $f(x;y)\to 0$ c'est à dire $f(x;y)\to f(0;0)$
  - …mais si $\begin{cases} x\to 0 \\ y\to 0 \end{cases}$ avec $x=y$, on a $f(x;y)=\dfrac{1}{2}$ donc $f(x;y)$ ne tend pas vers $f(0;0)$.
- $f(x;y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } x \text{ ou } y \text{ est non-nul} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
  - Montrer que si $x\neq 0$ et si $y\to 0$ on a $f(x;y)\to f(0;0)$ et si $y\neq 0$ et si $x\to 0$ on a encore $f(x;y)\to f(0;0)$.
  - Montrer que f n'est pas continue en (0 ;0) en utilisant les points de coordonnées $(x;x^2)$

Et pour finir une fonction continue en (0;0) :

- $f(x;y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } x \text{ ou } y \text{ est non-nul} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
  - Exprimer l'image de $(x;y)$ en utilisant les coordonnées polaires ρ et θ puis montrer que, quel que soit $\varepsilon>0$, on a $\rho<\varepsilon \Rightarrow |f(x;y)|<\varepsilon$ … Conclure.

C-II. Estimation et fonction différentiable

Soit S la représentation graphique de $f:(x;y)\mapsto f(x;y)$.

On appelle M_0 le point de S de coordonnées $(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ et M_1 le point de S de coordonnées $(x_0+h_x;y_0+h_y;f(x_0+h_x;y_0+h_y))$. On note m_0 et m_1 les projetés respectifs de M_0 et M_1 sur le plan xOy.

On note enfin M'_1 le point du plan tangent à S en M_0, situé sur la droite (m_1M_1).

La variation vraie de $f(x;y)$ lorsque l'antécédent varie de $(x_0;y_0)$ à $(x_0+h_x;y_0+h_y)$ est la différence des ordonnées entre M_0 et M_1. Cette variation s'écrit :

$$\Delta f = f(x_0+h_x;y_0+h_y)-f(x_0;y_0)$$

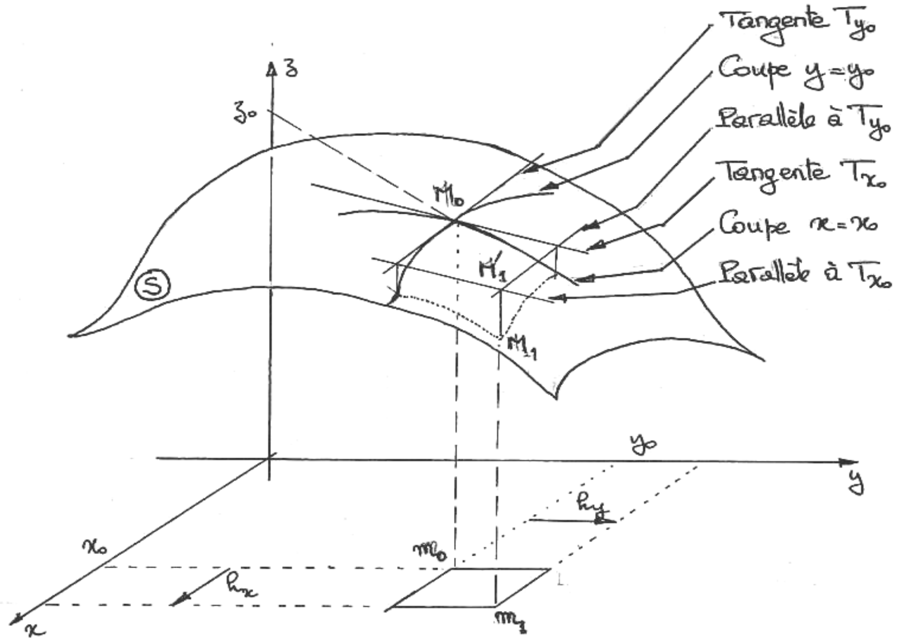
On peut la décomposer en :

$$\Delta f = \underbrace{f(x_0+h_x;y_0+h_y)-f(x_0;y_0+h_y)}_{\delta_1}+\underbrace{f(x_0;y_0+h_y)-f(x_0;y_0)}_{\delta_2}$$

On a alors $\delta_2 \cong \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0).h_y$ et $\delta_1 \cong \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0+h_y).h_x$.

- Sous réserve que $\frac{\partial f}{\partial x}$ soit continue en $(x_0;y_0)$, on a $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)$ et alors, si $h_y\to 0$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0+h_y)\to\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)$.
- Lorsque $(h_x;h_y)\to(0;0)$ on peut alors estimer la variation en remplaçant $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0+h_y).h_x$ par $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0).h_x$:

$$\Delta f \cong \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0).h_x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0).h_y$$



et on pose :

$$\tilde{\Delta} f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 ; y_0).h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 ; y_0).h_y$$

Cette variation estimée a été obtenue en supposant la continuité de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$…

On obtiendrait le même résultat en utilisant la décomposition

$$\Delta f = \underbrace{f(x_0 + h_x ; y_0 + h_y) - f(x_0 + h_x ; y_0)}_{\delta_1} + \underbrace{f(x_0 + h_x ; y_0) - f(x_0 ; y_0)}_{\delta_2}$$

et en supposant la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Dans les deux cas, cette variation estimée correspond à la différence entre les ordonnées de M_0 et de M'_1…

On peut tirer de cette construction deux informations utiles :

1. Dire qu'une fonction $f(x;y)$ est différentiable en $(x_0 ; y_0)$ revient à dire qu'au point $M_0(x_0 ; y_0 ; f(x_0 ; y_0))$ la surface représentant cette fonction possède un plan tangent.
2. Lorsque les dérivées partielles premières de $f(x;y)$ sont continues en $(x_0 ; y_0)$, on est sûr que la fonction est différentiable en $(x_0 ; y_0)$, on dit qu'elle est continûment différentiable.

En notant alors dx et dy les fonctions telles que $\begin{cases} dx(h_x, h_y) = h_x \\ dy(h_x, h_y) = h_y \end{cases}$ on peut écrire :

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}.dy}$$

df est appelée différentielle de f et son application au couple de variations (h_x, h_y) en partant du point de référence (x_0, y_0) donne :

$$\boxed{df_{(x_0,y_0)}(h_x, h_y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).dx(h_x, h_y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).dy(h_x, h_y)}$$

Pour terminer, bien évidemment ces résultats sont généralisables pour des fonctions à plusieurs variables… sauf que la notion de représentation graphique n'est plus assimilable à la notion de surface, que la notion de plan tangent devient un peu plus fumeuse… ce qui n'est pas gênant si on accepte d'utiliser les mathématiques pour ce qu'elles sont : un enchaînement de définitions, de méthodes et de propriétés qui n'ont aucun besoin de support matériel pour être exposées et développées.

C-III. Exercices

1. On donne $f(x;y) = x.\sin(y) + 1$. Estimer la variation de f lorsque l'antécédent varie de (1 ;0) à (1 ;0,1).

2. On donne $f(x;y) = x.\sqrt{x^2 + y^2}$. Estimer la variation de f lorsque l'antécédent varie de (1 ;0) à (0,9 ;0,1).

3. On donne $f(x;y) = \ln(x^2 + y^2) + y$. Estimer la variation de f lorsque l'antécédent varie de (1 ;1) à (1,1 ;1,02).

D. Courbes de niveau, surfaces de niveau, gradient.

D-I. Rappel

Si f est une fonction définie dans le plan et à valeurs réelles, c'est à dire qu'à chaque point M du plan la fonction f associe un réel $f(M)$, on appelle niveau de M pour f la valeur de $f(M)$.

L'ensemble des points du plan qui ont le même niveau que M pour f est appelé **courbe de niveau** de M pour f.

Cette notion est « copiée » sur la notion d'altitude représentée sur les cartes de géographie : à chaque point de la carte correspond une altitude et la courbe de niveau sur laquelle est un point de la carte représente l'ensemble des points qui ont la même altitude.

Exemples mathématiques :

- Dans le plan P, on donne deux points A et B distants de 1unité. A chaque point M du plan on associe le réel $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$. Quel est le niveau de A ? Quelle est la courbe de niveau de A ?
- Dans le plan P, on donne deux points A et B distants de 1unité. A chaque point M du plan on associe le réel $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$. Quel est le niveau de A ? Quelle est la courbe de niveau de A ?
- Dans le plan P muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé, à chaque point $M(x;y)$ du plan on associe le réel xy. Quel est le niveau de $A(1;1)$? Quelle est la courbe de niveau de ce point ?

D-II. Fonctions à deux variables, courbes de niveau et gradient

Si f est une fonction à deux variables indépendantes x et y représentée par la surface S d'équation $z = f(x;y)$, on appelle courbe de niveau du point $M(x_0;y_0;0)$ l'ensemble des points du plan (xOy) qui ont le même niveau que M, c'est à dire tels que $f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

On appelle gradient de f le vecteur de coordonnées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}(f) \Leftrightarrow \vec{V}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Si un point $M(x;y)$ se déplace de façon infinitésimale, les coordonnées de ce déplacement seront représentées par dx et dy.

Comme on a $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, on peut interpréter df comme le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{grad}(f)$ d'une part et $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ d'autre part.

Dans ces conditions, on observe que df est…

- nul si $\overrightarrow{grad}(f)$ et $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ sont orthogonaux,
- maximum si $\overrightarrow{grad}(f)$ et $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ sont colinéaires et de même sens,

- ➢ minimum si $\overrightarrow{grad}(f)$ et $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ sont colinéaires et de sens contraires,

Conclusions :

- ❑ $\overrightarrow{grad}(f)$ est le vecteur qui indique la direction et le sens dans lequel il faut déplacer un point du plan (xOy) pour que la fonction f augmente le plus rapidement possible.
- ❑ En tout point d'une courbe de niveau, le vecteur gradient est orthogonal à cette courbe.

Remarque : Cette notion de gradient n'est pas l'invention d'un matheux pris de boisson, c'est une notion qu'on rencontre dans la nature… En voici deux exemples.

En montagne, on peut se déplacer « à altitude constante » c'est à dire en suivant une coupe de la montagne correspondant à une courbe de niveau sur la carte. Pour se déplacer de façon à ce que l'altitude augmente le plus vite possible, il faut monter en suivant la ligne de plus grande pente c'est à dire une autre coupe de la montagne qui cette fois correspond à la direction et au sens du gradient sur la carte… lequel se voit – sur la carte - en allant perpendiculairement d'une courbe de niveau à une autre.

Le serpent python est très sensible à la chaleur et recherche toujours l'endroit le plus chaud pour faire sa sieste… Lorsqu'un serpent python recherche un endroit pour faire la sieste, on le voit qui tourne la tête d'un côté de l'autre, jusqu'à ce qu'il repère vers où la température augmente le plus rapidement… en fait il fait une recherche de gradient de température !

Lorsqu'un installateur d'antenne de télévision vient poser une antenne sur un toit, il cherche comment orienter au mieux cette antenne par rapport au champ reçu de l'émetteur… et cette orientation correspond évidemment à celle du gradient. Au fait, $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ ça vous rappelle quelque chose ?

D-III. Fonctions à trois variables et surfaces de niveau

Si f est une fonction à trois variables indépendantes x, y et z (sans représentation graphique) et si on pose $R = f(x;y;z)$, on appelle surface de niveau du point $M(x_0;y_0;z_0)$ l'ensemble des points de l'espace qui ont le même niveau que M, c'est à dire tels que $f(x;y;z) = f(x_0;y_0;z_0)$.

On appelle gradient de f le vecteur de coordonnées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}(f) \Leftrightarrow \vec{V}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Le même raisonnement qu'avec les fonctions à deux variables conduit aux conclusions :

- ❑ $\overrightarrow{grad}(f)$ est le vecteur qui indique la direction et le sens dans lequel il faut déplacer un point de l'espace pour que la fonction f augmente le plus rapidement possible.
- ❑ En tout point d'une surface de niveau, le vecteur gradient est orthogonal à cette surface.

Par exemple, une particule chargée électriquement crée autour d'elle un potentiel électrique. Les surfaces équipotentielles (qui sont des surfaces de niveau) sont les sphères dont le centre est la particule et le gradient n'est autre que le champ électrique (ou plutôt son opposé). Si on note V le potentiel et $\vec{E}$ le champ électrique, on a $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$: ce champ est radial (c'est à dire dirigé suivant les rayons des sphères équipotentielles.

D-IV. Exercices

1. On donne $f(x;y) = x^2 + y^2$. Préciser la nature des courbes de niveau pour cette fonction. Dessiner la courbe de niveau 4.

2. On donne $f(x;y) = x + 2y - 1$. Préciser la nature des courbes de niveau pour cette fonction. Dessiner la courbe de niveau qui passe par $A(2;-1)$ et le gradient en ce point… Quelle observation peut-on faire ?

3. On donne $f(x;y) = xy$. Préciser la nature des courbes de niveau pour cette fonction. Dessiner la courbe de niveau qui passe par $A(2;-1)$ et le gradient en ce point… Quelle observation peut-on faire ?

4. On donne $f(x;y) = x^2 + y$. Préciser la nature des courbes de niveau pour cette fonction. Dessiner la courbe de niveau 0 et le gradient aux points de coordonnées $(0;0)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(2;-4)$

5. On donne $f(x;y;z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$. Vérifier que la surface de niveau passant par le point de coordonnées $(1;1;1)$ est orthogonale au vecteur gradient en ce point.

D-V. Extrait de DS (S'1 juin 05)

1. Applications immédiates en repère orthonormé

On donne les points $A(-1;1;0)$, $B(0;1;2)$, $C(-1;2;1)$, $D(0;0;2)$

- Former une équation du plan ABC.
- Quelle est l'aire du triangle ABC ?
- Quel est le volume du pavé oblique dont trois arêtes sont AB, AC, AD ?
- Quelle est la distance du point D au plan ABC ?

2. Applications moins immédiates toujours en repère orthonormé

On utilise les mêmes points $A(-1;1;0)$, $B(0;1;2)$, $C(-1;2;1)$

- Quelle est la distance de A à la droite BC ?
- Quelles sont les coordonnées du point H projeté de A sur la droite BC ?
- Quelle est la distance de O au plan ABC ?
- Quelles sont les coordonnées du point I projeté de O sur le plan ABC ?

3. Et sans repère orthonormé…

Deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient les conditions $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$, $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$.

1) Calculer les produits scalaires suivants : $PS_1 = \vec{u}.\vec{v}$; $PS_2 = 2\vec{u}.(\vec{u} - 3\vec{v})$; $PS_3 = (-\vec{u} + \vec{v}).(3\vec{u} + \vec{v})$
2) Montrer qu'il existe deux valeurs du réel a telles que $a\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} + a\vec{v}$ soient orthogonaux.
3) Calculer les **normes** des produits vectoriels suivants : $PV_1 = \vec{u} \wedge \vec{v}$; $PV_2 = (2\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - 3\vec{v})$
4) Montrer qu'il existe deux valeurs du réel a telles que $a\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} + a\vec{v}$ soient colinéaires.