Rappels de trigonométrie circulaire

A. Rappel sur les définitions et le vocabulaire

A-I. Les notions angulaires

La **première notion angulaire** rencontrée est celle de SECTEUR ANGULAIRE. Elle est définie à partir des demi plans :

- un SECTEUR SAILLANT est l'intersection de deux demi plans de frontières sécantes
- un SECTEUR RENTRANT est la réunion de deux demi plans de frontières sécantes

Les secteurs angulaires sont mesurés en choisissant un secteur qui sert d'unité et en comptant combien d'unités sont contenues dans le secteur.

Les choix classiques d'unité sont :

- le plan entier (réunion de deux demi plans non confondus et de même frontière), la mesure est alors dite en « tours »
- le demi plan (réunion ou intersection de deux demi plans confondus), la mesure est dite en « angle plats »
- le quart de plan (intersection de deux demi plans de frontières perpendiculaires), la mesure est alors dite en « droits »
- le 180ème de demi plan, la mesure est alors dite en « degrés »

1 tour	= 2 plats
1 plat	= 2 droits
1 droit	= 90 degrés
1 plat	= 180 degrés

La **deuxième notion angulaire** est abordée au collège c'est celle d'ANGLE GEOMETRIQUE. Elle est définie à partir des paires de demi droites de même origine : l'angle géométrique $\widehat{xOy}$ est l'ensemble des paires de demi droites qui peuvent, par glissement dans le plan, être superposées à la paire $\{[Ox),[Oy)\}$. La mesure d'un angle géométrique $\widehat{xOy}$ est celle du petit arc géométrique qu'il détermine sur un cercle de centre O… voir polycopié **Aide Mémoire**. A partir de cette notion, une unité apparaît comme plus naturelle que les autres : c'est le radian. Par définition un angle plat mesure π radians.

1 tour	= 2π radians
1 plat	= π radians
1 droit	= $\dfrac{\pi}{2}$ radians
1 degré	= $\dfrac{\pi}{180}$ radians

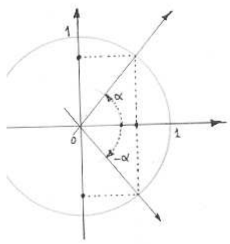
La **troisième notion angulaire** est abordée au lycée, c'est celle d' ANGLE ORIENTE. Elle est définie à partir des couples de demi droites de même origine : l'angle orienté (Ox,Oy) est l'ensemble des couples de demi droites qui peuvent, par glissement dans le plan, être superposées au **couple** $([Ox),[Oy))$. Les mesures de (Ox,Oy) sont les mesures de l'arc orienté intercepté sur un cercle de centre O par le couple $([Ox),[Oy))$… voir polycopié **Aide Mémoire**.

B. Equations $\cos(x)=...$ où x est un réel inconnu

B-I. Le cas $\cos(x)=\cos(x_0)$

Une solution évidente est $x=x_0$… mais il en existe beaucoup d'autres comme, par exemple $x=-x_0$ ou $x=x_0+2\pi$ …

En fait un dessin suffit pour comprendre (en se rappelant de la période 2π et des symétries vues en 2nde) qu'il y a deux familles de solutions qui sont $x=x_0+k.2\pi$ d'une part et $x=-x_0+k.2\pi$ d'autre part où k désigne un entier relatif quelconque.



Exemple 1 : Résolution de $\cos(x)=\cos(\dfrac{\pi}{12})$

Les solutions sont :

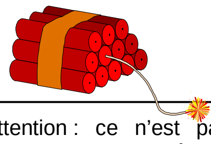
$$x=\frac{\pi}{12}+k.2\pi \text{ ou } x=-\frac{\pi}{12}+k.2\pi$$

Exemple 2 : Résolution de $\cos(6x+\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{12})$

Les solutions sont $6x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}+k.2\pi$ ou $6x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{12}+k.2\pi$ c'est à dire :

$$x=\frac{-\pi}{36}+k.\frac{\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{-\pi}{18}+k.\frac{\pi}{3}$$

Exemple 3 : Résolution de $\cos(6x+\frac{\pi}{4})=\cos(x)$



Les solutions sont $6x+\frac{\pi}{4}=x+k.2\pi$ ou $6x+\frac{\pi}{4}=-x+k.2\pi$ c'est à dire :

$$x=\frac{-\pi}{20}+k.\frac{2\pi}{5} \text{ ou } x=\frac{-\pi}{28}+k.\frac{2\pi}{7}$$

Attention : ce n'est pas parce qu'on a traité l'un des deux cas qu'on peut se passer de traiter l'autre.

B-II. *Le cas* $\cos(x)=a$

1ère possibilité : Soit $a\in[-1;+1]$ et dans ce cas on peut trouver (au pire à l'aide d'une calculette) une valeur particulière x_0 telle que a puisse être remplacé par $\cos(x_0)$ si bien que l'équation s'écrit $\cos(x)=\cos(x_0)$ et on sait la résoudre comme dans le cas précédent.

2ème possibilité : Soit $a\notin[-1;+1]$ et alors l'équation n'a pas de solution.

Exemple 1 : Résolution de $\cos(x)=\frac{\pi}{3}$

Comme $\frac{\pi}{3}>1$, l'équation n'a pas de solution.

Exemple 2 : Résolution de $\cos(x)=\frac{3}{4}$.

Remarque : Si un exercice de résolution est noté sur n points et si un étudiant trouve une solution alors qu'il y en a 1000000, quelle doit être sa note ?

$n\times\frac{1}{1000000}$ … ça ne fait pas beaucoup !

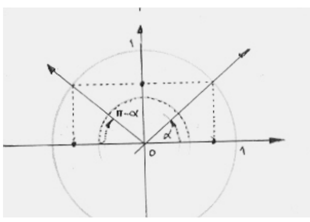
Et s'il y a une infinité de solutions et qu'il n'en trouve qu'une ?

Comme $\frac{3}{4}\in[-1;+1]$, il existe x_0 tel que $\cos(x_0)=\frac{3}{4}$ et les solutions sont les deux familles $x=x_0+k.2\pi$ et $x=-x_0+k.2\pi$ avec ici $x_0=0,722734...$ (obtenu avec une calculette)

C. Equations $\sin(x)=...$ où x est un réel inconnu

C-I. *Le cas* $\sin(x)=\sin(x_0)$

Une solution évidente est $x=x_0$… mais il en existe beaucoup d'autres comme, par exemple $x=\pi-x_0$ ou $x=x_0+2\pi$ …



Il suffit encore d'un dessin pour comprendre (en se rappelant de la période 2π et des symétries vues en 2nde) qu'il y a deux familles de solutions qui sont $x=x_0+k.2\pi$ d'une part et $x=\pi-x_0+k.2\pi$ d'autre part où k désigne un entier relatif quelconque.

Exemple 1 : Résolution de $\sin(x)=\sin(\frac{\pi}{9})$

Les solutions sont :

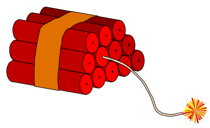
$$x = \frac{\pi}{9} + k.2\pi \text{ ou } x = \frac{8\pi}{9} + k.2\pi$$

Exemple 2 : Résolution de $\sin(2x + \frac{\pi}{5}) = \sin(\frac{\pi}{3})$

Les solutions sont $2x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3} + k.2\pi$ ou $2x + \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi$ c'est à dire :

$$x = \frac{\pi}{15} + k.\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{30} + k.\pi$$

Exemple 3 : Résolution de $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$



Les solutions sont $3x + \frac{\pi}{4} = 2x - \frac{\pi}{3} + k.2\pi$ ou $3x + \frac{\pi}{4} = \pi - 2x + \frac{\pi}{3} + k.2\pi$ c'est à dire :

$$x = \frac{-7\pi}{12} + k.2\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{60} + k.\frac{2\pi}{5}$$

Ici encore, les deux cas ne se ressemblent guère…

C-II. *Le cas* $\sin(x) = a$

1ère possibilité : Soit $a \in [-1;+1]$ et dans ce cas on peut trouver (au pire à l'aide d'une calculette) une valeur particulière x_0 telle que a puisse être remplacé par $\sin(x_0)$ si bien que l'équation s'écrit $\sin(x) = \sin(x_0)$ et on sait la résoudre comme dans le cas précédent.

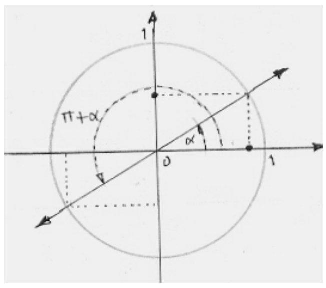
2ème possibilité : Soit $a \notin [-1;+1]$ et alors l'équation n'a pas de solution.

Exemples : A vous de résoudre $\sin(x) = \frac{\pi}{3}$; $\sin(x) = \frac{1}{3}$; $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. Equations $\tan(x) = ...$ où x est un réel inconnu

D-I. *Le cas* $\tan(x) = \tan(x_0)$

Une solution évidente est $x = x_0$ … mais il en existe beaucoup d'autres comme, par exemple $x = \pi + x_0$ ou $x = \pi + x_0 + 2\pi$ …



Il suffit encore d'un dessin pour comprendre (en se rappelant de la période π -et non pas 2π - et des symétries vues en 2nde) qu'il y a deux familles de solutions qui sont $x = x_0 + k.2\pi$ d'une part et $x = \pi + x_0 + k.2\pi$ d'autre part où k désigne un entier relatif quelconque. Les deux familles de solutions se regroupent en une seule écriture : $x = x_0 + k.\pi$

Exemple 1 : Résolution de $\tan(x) = \tan(\frac{\pi}{8})$

Les solutions sont :

$$x = \frac{\pi}{8} + k.\pi \text{ (ou bien, si vous préférez } x = \frac{9\pi}{8} + k.\pi \text{ ou même } x = \frac{-7\pi}{8} + k.\pi)$$

Exemple 2 : Résolution de $\tan(2x + \frac{\pi}{5}) = \tan(\frac{\pi}{3})$

Les solutions sont $2x+\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{3}+k.\pi$ ou $2x+\frac{\pi}{5}=\frac{4\pi}{3}+k.\pi$ c'est à dire :

$$\boxed{x=\frac{\pi}{15}+k.\frac{\pi}{2} \text{ ou } x=\frac{17\pi}{30}+k.\frac{\pi}{2}}$$

Exemple 3 : Résolution de $\tan(3x+\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})$

Les solutions sont $3x+\frac{\pi}{4}=x+\frac{\pi}{3}+k.\pi$ ou $3x+\frac{\pi}{4}=\pi+x+\frac{\pi}{3}+k.\pi$ c'est à dire :

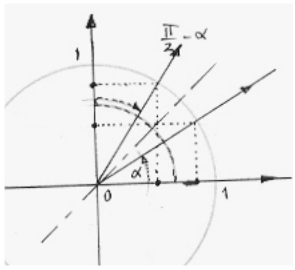
$$\boxed{x=\frac{\pi}{12}+k.\frac{\pi}{2} \text{ ou } x=\frac{13\pi}{24}+k.\frac{\pi}{2}}$$

D-II. Le cas $\tan(x)=a$

Quel que soit a, l'équation a toujours des solutions car la fonction tangente donne des résultats qui vont de $-\infty$ à $+\infty$. On trouve donc une valeur x_0 telle que a puisse être remplacé par $\tan(x_0)$ et on résout comme dans le cas précédent.

Exemples : A vous de résoudre $\tan(x)=1$; $\tan(x)=2$

E. Equation du type $\cos(x)=\sin(x_0)$



On se ramène à un cas connu en utilisant la symétrie qui échange les cosinus avec les sinus… c'est à dire la symétrie par rapport à la diagonale principale du repère : $\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos(\alpha)\\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin(\alpha)\end{cases}$

Exemple : Résolution de $\cos(3x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})$ …

On transforme l'équation en $\cos(3x)=\cos(\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{6})$ ou en $\sin(\frac{\pi}{2}-3x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})$ et on résout « classiquement ».

Tiens, au fait, on résout ça s'écrit bien comme ça et non pas avec un d !

Je résous, tu résous, il ou elle résout…

F. Equations $a.\cos(x)+b.\sin(x)=c$ où a, b et c sont dans $\mathbb{R}$

F-I. La méthode d'après un exemple

Si a et b étaient deux nombres tels que $a^2+b^2=1$ le point $M(a,b)$ serait sur le cercle trigonométrique… donc on pourrait trouver α tel que $a=\cos(\alpha)$ et $b=\sin(\alpha)$. Dans ces conditions, l'équation pourrait s'écrire $\cos(\alpha).\cos(x)+\sin(\alpha).\sin(x)=c$ ce qui grâce aux formules d'addition se transforme en $\cos(\alpha-x)=c$ … et on est alors en présence d'une équation d'un type élémentaire que l'on sait résoudre.

Le problème est que a et b ne sont pas en général deux nombres tels que $a^2+b^2=1$ … Par exemple, dans l'équation $2.\cos(x)+3.\sin(x)=1$, on ne peut pas dire que $2=\cos(\alpha)$ et $3=\sin(\alpha)$!

Si l'idée générale ne s'applique pas, c'est que le point $M(2;3)$ n'est pas sur le cercle trigonométrique…On peut améliorer la situation en définissant un point m sur le cercle trigonométrique et tel que $\overrightarrow{Om}$ soit unitaire, colinéaire avec $\overrightarrow{OM}$ et de même sens, c'est à dire en posant $\overrightarrow{Om} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}.\overrightarrow{OM}$.

C'est facile à comprendre : si $M(a,b)$ est trop loin de l'origine on le rapproche et s'il est trop près on l'éloigne.

Dans l'exemple précédent : $2.\cos(x)+3.\sin(x)=1$, $M(2;3)$ est trop loin de l'origine.

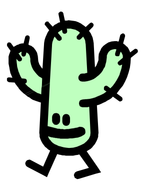
En posant $\overrightarrow{Om} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}.\overrightarrow{OM}$ c'est à dire $\overrightarrow{Om} = \frac{1}{\sqrt{4+9}}.\overrightarrow{OM}$ on obtient un point $m(\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}})$ qui est sur le cercle trigonométrique puisque $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2=1$ et il est donc certain qu'on peut trouver α vérifiant à la fois : $\cos(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{13}}$ et $\sin(\alpha)=\frac{3}{\sqrt{13}}$.

La résolution de $2.\cos(x)+3.\sin(x)=1$ se fait donc de la façon suivante :

1. On pose $R=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$
2. On divise les deux membres de l'équation par $\sqrt{13}$ pour obtenir $\frac{2}{\sqrt{13}}\cos(x)+\frac{3}{\sqrt{13}}\sin(x)=\frac{1}{\sqrt{13}}$ c'est à dire $\cos(\alpha).\cos(x)+\sin(\alpha).\sin(x)=\frac{1}{\sqrt{13}}$ ou encore $\cos(\alpha-x)=\frac{1}{\sqrt{13}}$.
3. Comme $\frac{1}{\sqrt{13}}\in[-1;+1]$, on est sûr qu'il existe au moins une valeur β telle que $\cos(\beta)=\frac{1}{\sqrt{13}}$ et l'équation devient $\cos(\alpha-x)=\cos(\beta)$ dont les solutions sont $x=\alpha+\beta+k.2\pi$ ou $x=\alpha-\beta+k.2\pi$
4. On donne enfin des valeurs approchées de α et β… à l'aide d'une calculette : $\alpha \cong 0.9827937235$ et $\beta \cong 1.289761425$

F-II. *La méthode générale de résolution de* $a.\cos(x)+b.\sin(x)=c$

1. On pose $R=\sqrt{a^2+b^2}$ et on divise les deux membres de l'équation par cette valeur.
2. On appelle α un réel tel que $\cos(\alpha)=\frac{a}{R}$ et $\sin(\alpha)=\frac{b}{R}$: l'équation devient $\cos(\alpha-x)=\frac{c}{R}$



3. On distingue deux cas :
   - **Si** $\frac{c}{R}\in[-1;+1]$ on pose $\cos(\beta)=\frac{c}{R}$ et les solutions de l'équation sont
$$\left[\begin{array}{l} x=\alpha+\beta+k.2\pi \\ x=\alpha-\beta+k.2\pi \end{array}\right.$$
   - **Sinon** l'équation n'a pas de solution.

F-III. Exemples

- **Résolution de** $\cos(x)+\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

1. $R=\sqrt{2}$, l'équation s'écrit $\frac{1}{\sqrt{2}}.\cos(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}.\sin(x)=\frac{1}{2}$
2. $\alpha=\frac{\pi}{4}$, l'équation devient $\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$
3. Comme $\frac{1}{2}\in[-1;+1]$ on peut trouver β… $\beta=\frac{\pi}{3}$… solutions : $\left[\begin{array}{l} x=\frac{7\pi}{12}+k.2\pi \\ x=\frac{-\pi}{12}+k.2\pi \end{array}\right.$

- **Résolution de** $\cos(x)+\sin(x)=4\sqrt{2}$

1. $R=\sqrt{2}$, l'équation s'écrit $\frac{1}{\sqrt{2}}.\cos(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}.\sin(x)=4$
2. $\alpha=\frac{\pi}{4}$, l'équation devient $\cos(x-\frac{\pi}{4})=4$
3. Comme $4\notin[-1;+1]$ l'équation n'a pas de solution.

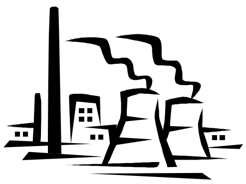
- **Résolution de** $3\cos(x)+4\sin(x)=1$

1. $R=5$, l'équation s'écrit $\frac{1}{5}.\cos(x)+\frac{1}{5}.\sin(x)=\frac{1}{5}$
2. On pose $\cos(\alpha)=\frac{3}{5}$ et $\sin(\alpha)=\frac{4}{5}$, l'équation devient $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{5}$
3. Comme $\frac{1}{5}\in[-1;+1]$ on peut trouver β… $\cos(\beta)=\frac{1}{5}$ …solutions : $\left[\begin{array}{l} x=\alpha+\beta+k.2\pi \\ x=\alpha-\beta+k.2\pi \end{array}\right.$
4. $\alpha\cong 0,9272952180$ et $\beta=1,369438406$

G. Transformation des expressions $a.\cos(x)+b.\sin(x)$

En électricité, on a souvent des tensions (ou des intensités) sinusoïdales. Lorsqu'on utilise une combinaison linéaire de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ on peut remarquer que cette combinaison linéaire se résume à une seule fonction cosinus ou sinus… mais avec un **déphasage**.

$$a.\cos(x)+b.\sin(x)=\sqrt{a^2+b^2}.\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\right)$$



$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos(\alpha).\cos(x)+\sin(\alpha).\sin(x)\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\frac{\pi}{2}+x-\alpha)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\frac{\pi}{2}-x+\alpha)$$

… Parmi ces quatre dernières expressions on choisit celle qui convient le mieux aux calculs ou à l'interprétation.