Nombres complexes, applications

A. Notation polaire (ou d'Euler)

Si on définit une application Φ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ en posant $\Phi(\alpha)=\cos(\alpha)+j\sin(\alpha)$ on obtient une fonction dont les propriétés font nettement penser à celles des puissances :

$$\Phi(\alpha+\beta)=\Phi(\alpha).\Phi(\beta) \qquad \text{et} \qquad \Phi(-\alpha)=\frac{1}{\Phi(\beta)}$$

L'idée d'Euler est alors de choisir une notation commode qui prenne en compte ces deux propriétés…

Notation : On décide de noter $e^{j\alpha}$ le complexe $\cos(\alpha)+j\sin(\alpha)$: $\boxed{e^{j\alpha}=\cos(\alpha)+j\sin(\alpha)}$.

L'écriture trigonométrique devient alors $z=r.e^{j\alpha}$ où r est le module de z et α l'argument… On appelle **notation polaire** cette nouvelle notation.

Cas particuliers fondamentaux :

$\alpha=0$ donne $e^{j.0}=1$	$\alpha=\frac{\pi}{2}$ donne $e^{j.\frac{\pi}{2}}=j$
$\alpha=\pi$ donne $e^{j.\pi}=-1$	$\alpha=-\frac{\pi}{2}$ donne $e^{j.(-\frac{\pi}{2})}=-j$

Généralisation : Si $z=a+bj$, on décide que $e^{a+jb}=e^{a}.e^{jb}$ c'est à dire : $e^{z}=e^{a}.\left(\cos(b)+j.\sin(b)\right)$

Conséquences :

1. Si α est un réel quelconque, $e^{j\alpha}$ est toujours un complexe de module 1 : il ne peut jamais être nul.
2. Si z est un complexe quelconque, le module de e^{z} est toujours $e^{\Re e(z)}$… et comme une exponentielle n'est jamais nulle, e^{z} ne peut jamais être nul.
3. Tout nombre complexe de module ρ et d'argument α peut s'écrire $\rho.e^{j\alpha}$… si ρ est non-nul, α est défini à 2π près et si ρ est nul, α est quelconque.
4. Si z est un complexe écrit sous la forme $\lambda.e^{j\theta}$ où λ et θ sont des réels **quelconques**, il n'est pas certain que λ soit le module de z… parce que λ n'est peut-être pas positif ! Par exemple, si $z=-2.e^{j\frac{\pi}{6}}$ il est clair que le module de z n'est pas -2 et que, par conséquent son argument ne peut pas être $\frac{\pi}{6}$. En fait, dans ce cas on rectifie le signe en utilisant $e^{j.\pi}=-1$ et on obtient $z=+2.e^{j\pi}e^{j\frac{\pi}{6}}=2.e^{j\frac{7\pi}{6}}$ où le module est 2 et un argument est $\frac{7\pi}{6}$.
5. Quels que soient les complexes z et z', on a toujours :

$e^{z+z'}=e^{z}.e^{z'}$	$e^{-z}=\frac{1}{e^{z}}$	$\left(e^{z}\right)^{n}=e^{nz}$

B. Applications classiques

B-I. Formules d'Euler

Quel que soit le réel α on a $\boxed{\cos(\alpha)=\dfrac{e^{j\alpha}+e^{j(-\alpha)}}{2}}$ et $\boxed{\sin(\alpha)=\dfrac{e^{j\alpha}-e^{j(-\alpha)}}{2j}}$.

Ces formules permettent de linéariser les puissances… c'est à dire d'exprimer $\cos^n(\alpha)$ et $\sin^n(\alpha)$ en fonction de $\cos(k\alpha)$ et $\sin(k\alpha)$ où $k\in\{0..n\}$.

Exemple : Linéarisation de $\sin^4(\alpha)$

$$\begin{aligned}\sin^4(\alpha)&=\left(\frac{e^{j\alpha}-e^{j(-\alpha)}}{2j}\right)^4=\left(\frac{1}{2j}\right)^4.\left(e^{j4\alpha}-4e^{j2\alpha}+6e^{j0}-4e^{-j2\alpha}+e^{j4\alpha}\right)\\&=\frac{1}{16}.\left(2\cos(4\alpha)-8\cos(2\alpha)+6\right)\\&=\frac{1}{8}\cos(4\alpha)-\frac{1}{2}\cos(2\alpha)+\frac{3}{8}\end{aligned}$$

B-II. Formule de Moivre

Quel que soit le réel α et l'entier n on a $\left(e^{j\alpha}\right)^n=e^{jn\alpha}$ c'est à dire :

$$\boxed{\left(\cos(\alpha)+j.\sin(\alpha)\right)^n=\cos(n\alpha)+j.\sin(n\alpha)}$$

Cette formule permet de faire «quasiment tout le contraire » des formules d'Euler, c'est à dire d'exprimer $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ en fonction de $\cos^k(\alpha)$ et $\sin^k(\alpha)$ où $k\in\{0..n\}$.

Exemple : Expression de $\sin(3\alpha)$

On sait que $\sin(3\alpha)$ est la partie imaginaire de $\cos(3\alpha)+j.\sin(3\alpha)$, donc…

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha)&=\Im m\left[\left(\cos(\alpha)+j\sin(\alpha)\right)^3\right]\\&=\Im m\left[\cos^3(\alpha)+3j\cos^2(\alpha).\sin(\alpha)+3j^2\cos(\alpha).\sin^2(\alpha)+j^3.\sin^3(\alpha)\right]\\&=3\cos^2(\alpha).\sin(\alpha)-\sin^3(\alpha)\end{aligned}$$

B-III. Racines n^ième^ de l'unité

Soit à résoudre l'équation $z^n=1$. Si on écrit z sous la forme $\rho.e^{j\alpha}$ avec $\rho\geq 0$ l'équation devient $\rho^n.e^{jn\alpha}=1.e^{j0}$ ce qui revient à $\begin{cases}\rho^n=1\\ n\alpha=0+k.2\pi\end{cases}$ …d'où $\begin{cases}\rho=1\\ \alpha=k.\dfrac{2\pi}{n}\end{cases}$.

On obtient donc n solutions, toutes de module 1, représentées par les sommets d'un polygone régulier à n sommets, inscrit dans le cercle trigonométrique.

B-IV. Racines n^ième^ d'un complexe non-nul

Soit à résoudre l'équation $z^n=z_0$. Si on écrit z sous la forme $\rho.e^{j\alpha}$ avec $\rho\geq 0$ et z_0 sous la forme $\rho_0.e^{j\alpha_0}$ avec $\rho\geq 0$ l'équation devient $\rho^n.e^{jn\alpha}=\rho_0.e^{j\alpha_0}$ ce qui revient à $\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{\rho_0}\\ \alpha=\dfrac{\alpha_0+k.2\pi}{n}\end{cases}$ … et on obtient donc encore n solutions, toutes de module $\sqrt[n]{\rho_0}$, représentées par les sommets d'un polygone régulier à n sommets, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho_0}$.

On peut noter en particulier que tout nombre complexe non-nul est le carré de deux complexes opposés… et que par conséquent le signe « racine » ne peut être utilisé avec les complexes : écrire $\sqrt{-1}$ était une ânerie au collège, c'en est encore une… et pour longtemps même si les journalistes l'écrivent pour « faire chic » !

B-V. Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit à résoudre l'équation $az^2+bz+c=0$ où a,b,c sont des constantes complexes données et z un complexe inconnu.

On suppose $a\neq 0$ (sinon l'équation est du 1er degré et c'est trop facile !).

L'équation s'écrit : $a\left(z^2+\dfrac{b}{a}z+\dfrac{c}{a}\right)=0$ c'est à dire $a\left((z+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0$. Comme $a\neq 0$, on peut diviser par a et il ne reste qu'à résoudre $\left((z+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0$.

Tout complexe est le carré d'au moins un complexe (0 n'est le carré que de 0 mais tous les complexes non-nuls sont les carrés de deux complexes opposés) donc si on pose $\Delta=b^2-4ac$ on est sûr qu'il existe au moins un complexe δ tel que $\delta^2=\Delta$

En appelant alors δ un complexe tel que $\delta^2=b^2-4ac$ (**et surtout on n'écrit pas** $\delta=\sqrt{b^2-4ac}$! ! !) l'équation se factorise en $\left(z+\dfrac{b-\delta}{2a}\right)\left(z+\dfrac{b+\delta}{2a}\right)=0$ dont les solutions sont alors $z=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ ou $z=\dfrac{-b+\delta}{2a}$.

On retrouve donc les mêmes techniques que pour l'équation du 2nd degré dans $\mathbb{R}$ au « détail » près que le signe $\sqrt{\ }$ n'est plus utilisable et que la technique de recherche des complexes de carrés connu n'est pas immédiate.

La meilleure méthode si on peut l'employer est celle décrite précédemment et qui utilise la notation polaire. Sinon, on utilise l'écriture algébrique en pensant que deux complexes égaux ont le même module.

Exemple 1 : Résolution de $z^2+jz+j\dfrac{\sqrt{3}}{4}=0$:

$\Delta=j^2-4(-1)(1+j\dfrac{\sqrt{3}}{4})=3+j\sqrt{3}=2\sqrt{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+j\dfrac{1}{2})=2\sqrt{3}.e^{j\frac{\pi}{6}}\ldots=\left(\sqrt{2\sqrt{3}}.e^{j\frac{\pi}{12}}\right)^2$ donc les solutions sont : $z_1=\dfrac{-j-\sqrt{2\sqrt{3}}.e^{j\frac{\pi}{12}}}{2}$ et $z_2=\dfrac{-j+\sqrt{2\sqrt{3}}.e^{j\frac{\pi}{12}}}{2}$

Exemple 2 : Résolution de $3jz^2+z+2j=0$

$\Delta=1-4(3j)(2j)=25=5^2$ donc les solutions sont : $z_1=\dfrac{-1-5}{6j}=j$ et $z_2=\dfrac{-1+5}{6j}=-\dfrac{2}{3}j$

Exemple 3 : Résolution de $jz^2+(1+j)z-2=0$

$$\Delta=(1+j)^2-4(j)(-2)=2j+8j=10j=10e^{j\frac{\pi}{2}}=\left(\sqrt{10}.e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^2$$ donc les solutions sont :

$$z_1=\frac{-1-j-\sqrt{10}.e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j} \text{ et } z_2=\frac{-1-j+\sqrt{10}.e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j}$$

B-VI. Somme et différence de deux complexes de même module

Soit deux complexes de même module ρ : $z_1=\rho.e^{j\alpha}$ et $z_2=\rho.e^{j\beta}$ on souhaite additionner ces complexes et pouvoir donner le module et un argument de la somme :

$$S=z_1+z_2=\rho.\left(e^{j\alpha}+e^{j\beta}\right)=\rho.e^{j\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{j\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{j\frac{-\alpha+\beta}{2}}\right)=\rho.e^{j\frac{\alpha+\beta}{2}}.2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

On en déduit sans peine que $|S|=2\rho.\left|\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\right|$ et $Arg(S)=\begin{cases}\frac{\alpha+\beta}{2}\text{si } \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})>0\\ \pi+\frac{\alpha+\beta}{2}\text{si } \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})<0\end{cases}$

De même pour la différence :

$$D=z_1-z_2=\rho.\left(e^{j\alpha}-e^{j\beta}\right)=\rho.e^{j\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{j\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{j\frac{-\alpha+\beta}{2}}\right)=\rho.e^{j\frac{\alpha+\beta}{2}}.2j\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

dont on en déduit que :

$$|D|=2\rho.\left|\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\right| \text{ et } Arg(D)=\begin{cases}\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\text{si } \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})>0\\ \frac{\alpha+\beta-\pi}{2}\text{si } \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})<0\end{cases}$$

C. Exercice typique

Donner le module et un argument de $z=\frac{1+e^{j3\alpha}}{j-e^{j2\alpha}}$. Donner des valeurs approchées si $\alpha=\frac{4\pi}{9}$.

$$z=\frac{1+e^{j3\alpha}}{j-e^{j2\alpha}}=\frac{e^{j\frac{3\alpha}{2}}.2\cos(\frac{3\alpha}{2})}{e^{j(\frac{\pi}{4}+\alpha)}.2j\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)}=e^{j(\alpha-\frac{3\pi}{4})}\frac{\cos(\frac{3\alpha}{2})}{\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)}$$ donc :

$$|z|=\left|\frac{\cos(\frac{3\alpha}{2})}{\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)}\right| \text{ et } Arg(z)=\begin{cases}\alpha-\frac{3\pi}{4}\text{si } \frac{\cos(\frac{3\alpha}{2})}{\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)}>0\\ \alpha+\frac{\pi}{4}\text{si } \frac{\cos(\frac{3\alpha}{2})}{\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)}<0\end{cases}$$

Avec $\alpha=\frac{4\pi}{9}$ on a $\frac{\cos(\frac{3\alpha}{2})}{\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)}<0$ donc…