Intégrale de Riemann

Bernhard RIEMANN 1826-1866 (Allemagne)

Non satisfait de la théorie de l'intégration de Cauchy portant sur les fonctions continues qui lui paraît insuffisante pour manipuler certaines séries de Fourier (pour des fonctions « peu » régulières), il publie (1854) une rigoureuse théorie de l'intégration pour les fonctions bornées (continues ou non) sur un intervalle fermé. D'autres théories de l'intégration ont vu le jour plus tard : intégrale de Stiltjes, intégrale de Lebesgue… mais nous n'en parlerons pas ici.

On sait depuis Mercator (1620-1687) et Leibniz (1646-1716), que si une fonction est positive, l'intégrale de cette fonction sur un intervalle $[a;b]$ évalue l'aire « sous la courbe ». L'idée de Riemann a été de repartir de cette évaluation de l'aire en montrant qu'elle pouvait se faire même pour des fonctions non continues… et qui donc ne possèdent pas de primitive.

A. Présentation et définition

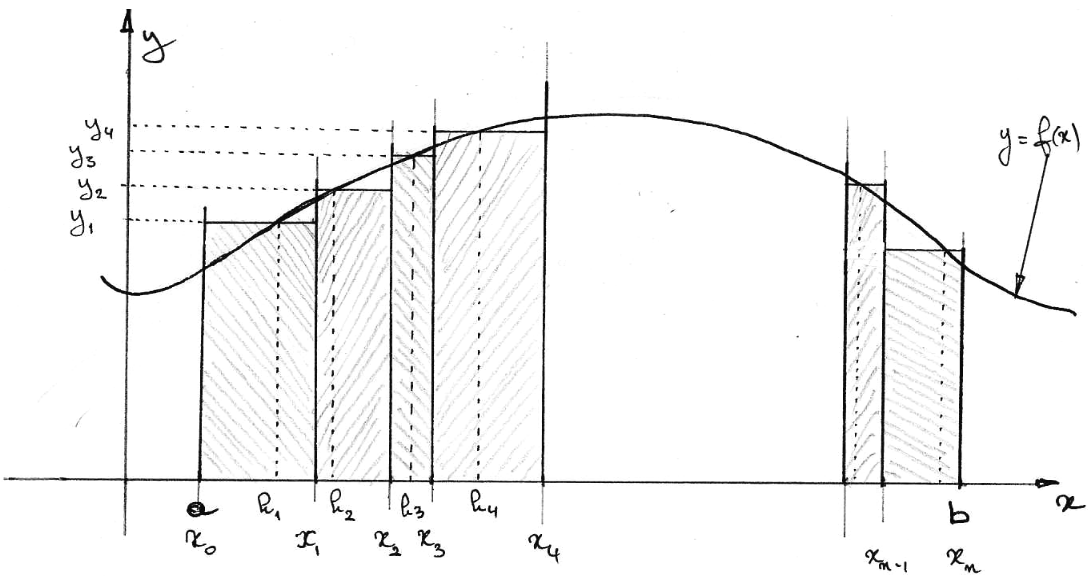
A-I. Approximation d'une aire

On suppose pour commencer, qu'une fonction f, pas trop « irrégulière » vérifie $f(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[a;b]$. On note C_f sa représentation graphique et on appelle S la surface décrite par $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

On place entre a et b, des réels $x_0, x_1, ..., x_n$ tels que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

Dans chaque intervalle de la forme $[x_{k-1};x_k]$ on choisit un réel h_k (au hasard) et on pose $y_k = f(h_k)$. On appelle alors R_k le rectangle de base $[x_{k-1};x_k]$ et de hauteur y_k.

Les rectangles R_k recouvrent approximativement la surface S et on comprend bien que, plus les largeurs des rectangles R_k sont petites, plus l'approximation est « bonne ».



Pour énoncer la condition « les largeurs des rectangles R_k tendent vers 0 » on définit Δx comme étant le maximum des largeurs : $\Delta x = \max_{k=1..n}(x_k - x_{k-1})$ et on impose la condition $\Delta x \to 0$

Riemann pose alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} y_k.(x_k - x_{k-1})$ et démontre que :

Si $\lim_{\Delta x \to 0} S_n = L$ alors L ne dépend pas du choix des $x_0, x_1, ..., x_n$ ni des h_k

Notation : Dans le cas où $\lim_{\Delta x\to 0} S_n = L$, on note L sous la forme $\int_a^b f(x).dx$ qui se lit « somme entre a et b de tous les $f(x).dx$ » c'est à dire somme de toutes les aires des rectangles de largeur infinitésimale que l'on peut trouver en partageant l'intervalle $[a;b]$… Dans cette notation, on confond dx avec Δx mais on démontre et nous admettons que cette confusion n'est pas nuisible.

Remarques :

- Dans la construction de Riemann, rien n'oblige la fonction à être continue… mais la question qui reste est de savoir quelles sont les fonctions « pas trop irrégulières » dont on parle.
- Au départ, on utilise une fonction positive… mais rien n'interdit de faire la même construction pour des fonctions négatives ou de signe variable. Evidemment il ne s'agit alors plus de calculer une aire.
- Lorsque le procédé de Riemann s'applique ($\lim_{\Delta x\to 0} S_n = L$) on facilite les notations et le calcul en utilisant deux « astuces »
  - on répartit les $x_0, x_1, ..., x_n$ régulièrement dans $[a;b]$ si bien que chaque rectangle a pour largeur $\frac{b-a}{n}$
  - on place les h_k à la borne droite de chaque sous-intervalle de $[a;b]$.

Dans ces conditions, on obtient une forme plus commode de S_n appelée « somme de Riemann » dans la suite de ce cours : $\boxed{S_n = \frac{b-a}{n}.\sum_{k=1}^{n} f(a+k.\frac{b-a}{n})}$

Vocabulaire :

Dans la notation $\int_a^b f(x).dx$…

- a et b sont appelés « bornes de l'intégrale »
- $f(x).dx$ est appelé « intégrande » (c'est celui qui subit l'intégration, de même que le multiplicande est celui qui subit la multiplication et, plus généralement, l'opérande est celui qui subit l'opération… l'opérateur étant celui qui fait l'opération)
- dx est appelé « élément différentiel »
- x est une variable « muette » : son nom n'intervient pas dans le résultat.

A-II. Où disparaissent les erreurs ?

En fait, pour obtenir réellement l'aire souhaitée, il faudrait que les « frontières supérieures » des rectangles soient remplacées par des portions de la courbe C_f … L'erreur commise en remplaçant ces frontières courbes par des frontières droites est une erreur d'ordre supérieur à 1 qui disparaît donc lors du passage à la limite comme on le verra en TD.

A-III. Fonctions intégrables au sens de Riemann

Un grand nombre de fonctions sont intégrables par le procédé de Riemann… On peut citer en particulier :

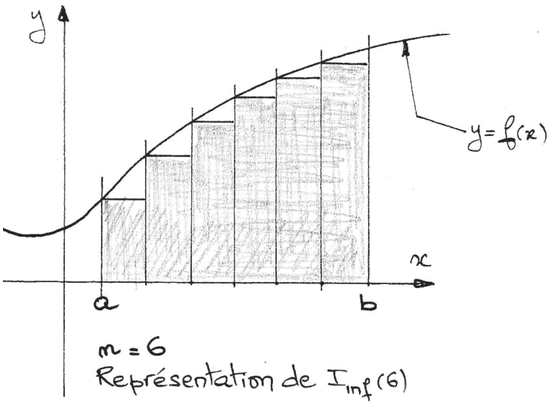
- Toutes les fonctions définies et monotones dans $[a;b]$
- Toutes les fonctions continues par morceaux dans $[a;b]$ (c'est à dire les fonctions pour lesquelles on peut trouver un nombre fini de sous-intervalles de l'ensemble de définition tels que dans chaque sous-intervalle la fonction soit continue)

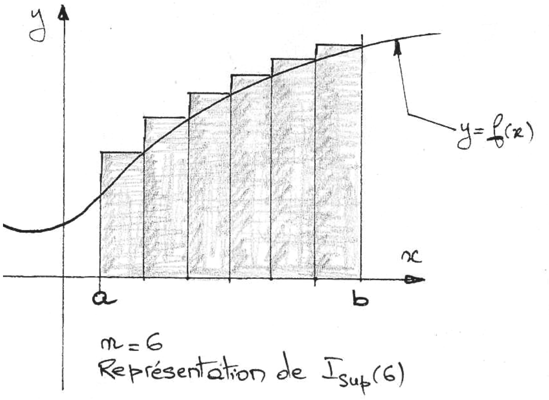
On voit donc apparaître des fonctions qui ne sont pas intégrables par la méthode usuelle des primitives mais qui le sont par le procédé de Riemann : une fonction intégrable dans $[a;b]$ au sens de Riemann ne possède pas nécessairement une primitive dans $[a;b]$.

Démonstration pour ceux qui souhaitent comprendre :

> Les fonctions monotones croissantes définies dans $[a;b]$ sont toutes intégrables selon Riemann :

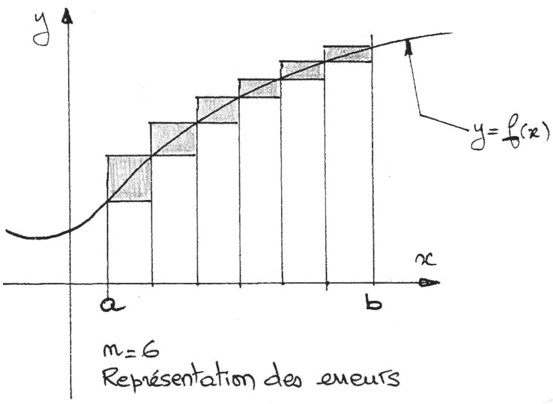
On encadre l'aire cherchée, disons A, en utilisant d'une part les bornes gauches des sous intervalles et d'autre part les bornes droites :



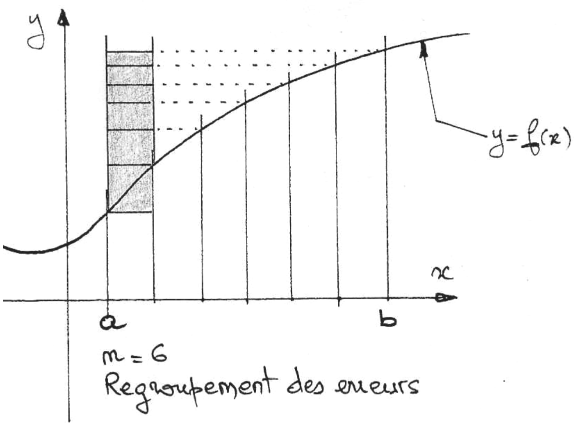


$$I_{\inf}(n)=\sum_{k=1}^{n}\text{Aires des rectangles avec les bornes gauches}\leq A\leq\sum_{k=1}^{n}\text{Aires des rectangles avec les bornes droites}=I_{\sup}(n)$$

On voit ainsi apparaître dans chaque « colonne » l'erreur maximum commise : c'est l'écart entre l'aire du rectangle « trop grand » et celle du rectangle « trop petit ».



On peut regrouper toutes ces erreurs en les faisant « glisser » dans la première colonne : la somme des erreurs est alors représentée par un rectangle de largeur $\dfrac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(b)-f(a)$.



Si on note σ la somme des erreurs, on a : $\sigma=\dfrac{b-a}{n}.\left(f(b)-f(a)\right)$.

Lorsque $n\to\infty$, on a $\sigma\to 0$ et le théorème des gendarmes permet d'être certain que $\int_a^b f(x).dx$ existe puisque $I_{\inf}(n)\leq\int_a^b f(x).dx\leq I_{\sup}(n)$.

A-IV. Algorithme

Comment alors calculer l'intégrale d'une fonction qui n'a pas de primitive ? En utilisant un algorithme qui « colle » de près à la définition !

On suppose connus :

- la fonction f
- les bornes a et b
- le nombre n de sous intervalles du partage de [a ;b]

On utilise des variables locales :

- deltax : réel, pour représenter la largeur des sous-intervalles
- som : réel, pour préparer le résultat de la fonction
- k : entier, compteur de boucle

```
Début
   som←0
   deltax←(b-a)/n
   Pour k allant de 1 à n faire (k pourrait aller de 0 à n-1)
         som←som+deltax*f(a+k*deltax)
   FinPour
   Retourner som
Fin
```

NB : A la fin de ce chapitre, la version « langage C » de cet algorithme est donnée « intégralement »…

Un exemple d'application concrète :

On sait que la quantité d'électricité est l'intégrale de l'intensité électrique. Par exemple, pour un courant d'intensité constante 2 mA, la quantité d'électricité qui traverse un conducteur en 7 h est 14 mAh. Lorsque l'intensité est variable comme c'est le cas dans une maison ou un appartement (la consommation est forte lorsqu'une machine à laver, un fer à repasser, un four… fonctionnent et plus faible lorsque tout est éteint !) la mesure de la quantité d'électricité ne peut pas se faire par une simple multiplication.

En fait, le compteur fait une mesure « de temps en temps » disons tous les $1/10^{\text{ème}}$ de seconde et multiplie l'intensité mesurée pendant ce $1/10^{\text{ème}}$ de seconde par la durée… et il additionne les produits obtenus : c'est bien d'une intégration qu'il s'agit !

On peut parfaitement simuler le travail d'un compteur électrique en utilisant Excel… donc on peut parfaitement calculer une intégrale (de façon approchée) en utilisant Excel ou un langage de programmation comme Pascal ou C ou Python… Si ça vous intéresse, comme d'habitude : georges.vincents@iut-orsay.fr .

B. Propriétés

B-I. Propriétés usuelles

On démontre et nous admettons les propriétés suivantes, déjà vues et utilisées au lycée :

1. Positivité : Si $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[a;b]$ avec $a < b$ alors $\int_a^b f(x).dx \geq 0$
2. Conservation de l'ordre :

   Si $f(x) < g(x)$ pour tout x de $[a;b]$ avec $a < b$ alors $\int_a^b f(x).dx \leq \int_a^b g(x).dx$
3. Linéarité : $\int_a^b [\alpha.f(x) + \beta.g(x)].dx = \alpha\int_a^b f(x).dx + \beta\int_a^b g(x).dx$

4. Relation de Chasles : $\int_a^b f(x).dx+\int_b^c f(x).dx=\int_a^c f(x).dx$

5. Symétries : $\int_{-a}^{+a} f(x).dx=\begin{cases}2.\int_0^a f(x).dx \text{ si } f \text{ est paire}\\ 0 \text{ si } f \text{ est impaire}\end{cases}$

6. Période : si f a pour période T alors $\int_a^b f(x).dx=\int_{a+T}^{b+T} f(x).dx$ et $\int_a^{a+T} f(x).dx=\int_0^T f(x).dx$

7. Dans tous les cas, $\left|\int_a^b f(x).dx\right|\le\int_a^b |f(x)|.dx$

B-II. Newton - Leibniz (lien avec les primitives)

Dans le cas où la fonction intégrée est continue dans l'intervalle d'intégration, la méthode de Riemann coïncide avec celle de Cauchy… La formule utilisée en terminale reste donc valable si on connaît une primitive de la fonction intégrée :

Si F est une primitive quelconque de f alors on a : $\int_a^b f(x).dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

Démonstration pour les amateurs :

Soit f une fonction définie et intégrable sur $[a;b]$. Pour $x\in[a;b]$ on pose $F(x)=\int_a^x f(t).dt$ ce qui définit une fonction F comme fonction de la borne supérieure de l'intégrale.

1. F est une fonction continue dans $[a;b]$
2. Si f est une fonction continue alors F est dérivable et vérifie $F'(x)=f(x)$

- Démonstration de 1.

On a $\lim_{h\to0}F(x_0+h)=\lim_{h\to0}\int_a^{x_0+h} f(t).dt=\lim_{h\to0}(\int_a^{x_0} f(t).dt+\int_{x_0}^{x_0+h} f(t).dt)$

Comme $\lim_{h\to0}(\int_a^{x_0} f(t).dt)=F(x_0)$ il suffit de montrer que $\lim_{h\to0}(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t).dt)=0$.

On appelle M le maximum de $|f(t)|$ pour $t\in[x_0;x_0+h]$ et on a :

$$0\le\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t).dt)\right|\le\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)|.dt\le\int_{x_0}^{x_0+h}M.dt=M.h$$

…si $h\to0$ alors $M.h\to0$ et le théorème des gendarmes donne $\lim_{h\to0}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t).dt\right|=0$ si bien que $\lim_{h\to0}(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t).dt)=0$ et finalement $\lim_{h\to0}F(x_0+h)=F(x_0)$.

- Démonstration de 2.

Si $F'(x)$ existe, ce ne peut être par définition, que $\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ et on a :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{\int_a^{x+h} f(t).dt-\int_a^x f(t).dt}{h}=\frac{\int_x^{x+h} f(t).dt}{h}$$ ***relation (1)***

Si f est une fonction continue, on sait que si $x\to t$, on a $f(x)\to f(t)$ c'est-à-dire que si on pose $f(t)-f(x)=\varepsilon$ cet écart ε dépend de $(t-x)$ et tend vers 0 lorsque $(t-x)\to0$. On peut donc écrire $f(t)=f(x)+\varepsilon(t-x)$ où ε est une fonction qui tend vers 0 quand sa variable tend vers 0 (ici, sa variable c'est $t-x$). Ce qu'il faut bien voir alors c'est que $f(x)$ est une constante vis-à-vis de la variable t donc, dans l'intégrale en dt, $f(x)$ est une constante et on obtient :

$$\int_x^{x+h} f(t).dt = \int_x^{x+h} \big(f(x) + \varepsilon(t-x) \big).dt = h.f(x) + \int_x^{x+h} \varepsilon(t-x).dt \quad \textbf{\textit{relation (2)}}$$

Lorsque $h \to 0$, l'écart entre x et $x+h$ tend vers 0… et comme t reste entre x et $x+h$, l'écart entre t et x c'est-à-dire $t-x$ tend vers 0 et $\varepsilon(t-x)$ tend aussi vers 0 ce qu'on peut écrire sous la forme $-m(h) \le \varepsilon(t-x) \le m(h)$ où $m(h)$ est une fonction de limite 0 qui ne dépend plus ni de t ni de x. On en déduit l'encadrement $-m(h).h \le \int_x^{x+h} \varepsilon(t-x).dt \le m(h).h$ ***relation (3)*** puis en reportant dans ***relation (1)*** : $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{h.f(x) + \int_x^{x+h} \varepsilon(t-x).dt}{h} = f(x) + \dfrac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon(t-x).dt$

On a successivement :

$$-m(h).h \le \int_x^{x+h} \varepsilon(t-x).dt \le m(h).h$$

$$-m(h) \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon(t-x).dt \le m(h)$$

$$-m(h) + f(x) \le f(x) + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon(t-x).dt \le m(h) + f(x)$$

c'est à dire : $f(x) - m(h) \le \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \le f(x) + m(h)$

et puisque $m(h)$ est une fonction de limite 0, les bornes gauche et droite de cet encadrement tendent toutes les deux vers $f(x)$ d'où $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$ grâce au « théorème des gendarmes ».

C. Applications et généralisations

C-I. Valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne de n nombres (où n est un entier naturel) est simple : on additionne et on divise par n… Mais comment pourrait-on par exemple calculer la moyenne des carrés de tous les réels compris entre 0 et 1 ?

L'idée qui permet la généralisation n'est pas très compliquée :

> *La valeur moyenne de « plusieurs » nombres est la constante qui en remplaçant chacun de ces nombres donnerait la même « somme ».*

Par exemple, la moyenne de 5 et 13 est 9 parce que 5+13=18 et que 9+9=18.

Si les nombres dont on veut la moyenne sont en quantité infinie dénombrable, au lieu d'une somme ordinaire on utilise un $\sum$ et s'il sont en quantité infinie non-dénombrable on utilise une intégrale…

Exemples :

1. Quelle est la moyenne des carrés des réels compris entre 0 et 1 ?

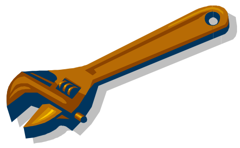
On cherche une constante m telle que $\int_0^1 x^2.dx = \int_0^1 m.dx$ … Le calcul donne $m = \dfrac{1}{3}$.

2. Quelle est la moyenne des sinus des réels compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$?

On cherche une constante m telle que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x).dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} m.dx$ … Le calcul donne $m = \dfrac{2}{\pi}$.

Définition : La fonction f étant intégrable dans $[a;b]$, on appelle moyenne de $f(x)$ dans $[a;b]$ le nombre $m = \frac{1}{b-a}.\int_a^b f(x).dx$

Remarque : Pour les fonctions périodiques, si on ne dit pas dans quel intervalle on calcule la moyenne on utilise systématiquement un intervalle de longueur une période… Quelle est la valeur moyenne de $\sin(x)$?



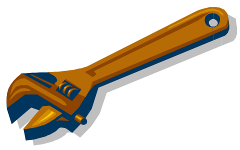
C-II. Valeur efficace

Ce n'est qu'une variante de la valeur moyenne… pour des raisons physiques (phénomènes électriques, thermiques, acoustiques…) il arrive qu'on ait besoin de la valeur moyenne du carré d'une fonction et pour la cohérence de la dimension, on calcule alors la racine de cette moyenne : le résultat obtenu est la valeur efficace de la fonction.

Définition : La fonction f étant intégrable dans $[a;b]$, on appelle valeur efficace de $f(x)$ dans $[a;b]$ le nombre v_e tel que $v_e = \sqrt{\frac{1}{b-a}.\int_a^b f^2(x).dx}$ c'est à dire $v_e^2 = \frac{1}{b-a}.\int_a^b f^2(x).dx$.

Exemple : Essayez donc de calculer la valeur efficace de x^2 sur l'intervalle $[0;1]$.

Remarque : Pour les fonctions périodiques, si on ne dit pas dans quel intervalle on calcule la valeur efficace on utilise systématiquement un intervalle de longueur une période… Quelle est la valeur efficace de $\sin(x)$?



C-III. Intégrales indéfinies

On décide que la notation « sans bornes » $\int f(x).dx$ désigne une primitive quelconque de $f(x)$ et on appelle cette notation « sans bornes » intégrale indéfinie. Attention à bien comprendre que deux primitives quelconques d'une même fonction dans un intervalle diffèrent d'une constante et que par conséquent les calculs d'intégrales indéfinies se terminent toujours par le fatidique « +Cste »… ce qui n'est jamais le cas pour les intégrales définies.

Exemple : $\int \sin^2(x).dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}.dx = \frac{1}{2}.\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right) + Cste$

C-IV. Intégrales généralisées

La méthode de Riemann ne peut s'appliquer qu'à des intégrales dans un intervalle borné… comment peut-on alors donner un sens à une notation telle que $\int_a^{+\infty} f(x).dx$?

La réponse passe nécessairement par un calcul de limite :

Définition : La notation $\int_a^{+\infty} f(x).dx$ désigne (si cette limite existe) $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x).dx$.

Pour calculer $\int_a^{+\infty} f(x).dx$ on commence donc par calculer $\int_a^b f(x).dx$ puis, avec le résultat obtenu on cherche la limite lorsque $b \to +\infty$.

De même, pour $\int_{-\infty}^b f(x).dx$ …

Définition : La notation $\int_{-\infty}^b f(x).dx$ désigne (si cette limite existe) $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x).dx$.

Enfin, pour la notation $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx$, on sépare l'intégrale en deux parties pour pouvoir traiter séparément les deux limites…

Définition : La notation $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx$ désigne (si ces deux limites existent séparément) $\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x).dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x).dx$ où c est un réel quelconque que l'on peut choisir.

D. Méthodes élémentaires d'intégration

D-I. Décomposition en somme

Si une fonction f est telle que $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ et si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ ont des primitives on calcule $\int_a^b f(x).dx$ en utilisant $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f_1(x).dx+\int_a^b f_2(x).dx$

Exemple : $\int_0^1 \frac{x^2}{x-2}.dx=\int_0^1 \frac{x(x-2)+2(x-2)+4}{x-2}.dx=\int_0^1\left(x+2+\frac{4}{x-2}\right).dx=\frac{5}{2}+4.\ln(2)$

D-II. Intégration par parties

On sait que $d(uv)=v.du+u.dv$ et, en intégrant, $\int d(uv)=\int v.du+\int u.dv$ c'est à dire $uv=\int v.du+\int u.dv$ ou encore $\int u.dv=uv-\int v.du$. On en déduit :

Si u et v sont des fonctions à dérivées continues :

1. Pour les intégrales indéfinies : $\int u.dv=uv-\int v.du$
2. Pour les intégrales définies : $\int_a^b u.dv=[uv]_a^b-\int_a^b v.du$

Remarque : L'intégration par parties est commode dans les cas où $f(x)$ est de l'une des formes $P(x).e^{kx}$ ou $P(x).\sin(\omega x)$ ou $P(x).\cos(\omega x)$ ou $P(x).\ln(ax)$ … $P(x)$ étant un polynôme.

D-III. Changements de variable

On suppose que f est une fonction intégrable dans $[a;b]$, que φ est une fonction à dérivée continue, réalisant une bijection de $[\alpha;\beta]$ vers $[a;b]$ et telle que $\begin{cases}\varphi(\alpha)=a\\ \varphi(\beta)=b\end{cases}$.

Dans ces conditions on a :

1. Pour les intégrales indéfinies $\int f(x).dx=\int f(\varphi(t)).\varphi'(t).dt$.
2. Pour les intégrales définies $\int_a^b f(x).dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t).dt$

Remarques :

Les conditions sur φ sont facilement compréhensibles si on veut bien réaliser que, lorsque $x=\varphi(t)$, on a « évidemment » $dx=\varphi'(t).dt$ …

Ce changement de variable peut s'utiliser de deux façons, soit on remplace x par $\varphi(t)$ dans $f(x)$, soit on remplace $\varphi(t)$ par x, le but étant toujours de simplifier l'écriture ou le calcul de l'intégrale.

Dans les deux cas, on doit se méfier de l'élément différentiel : dx ou dt ce n'est pas pareil !

De plus, si l'intégrale est définie, il faut aussi se méfier des bornes : dire que x varie de a à b ce n'est pas dire que t varie de a à b.

Enfin, si l'intégrale est indéfinie, il est souhaitable dans la mesure du possible, de donner la réponse finale avec la même variable que celle utilisée dans l'énoncé.

1. Exemple où on remplace x par $\varphi(t)$: $I=\int\sqrt{1-x^2}.dx$

On remarque que les valeurs raisonnables de x sont dans [-1 ;+1]… et que si $x=\sin(t)$ avec $t\in[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}]$ alors $\sqrt{1-x^2}=\cos(t)$ et $d\varphi=\cos(t).dt$ avec $t=\text{Arcsin}(x)$.

On obtient

$$I=\int\cos^2(t).dt=\int\frac{1+\cos(2t)}{2}.dt=\frac{1}{2}.(t+\frac{\sin(2t)}{2})+Cste=\frac{1}{2}.(\text{Arcsin}(x)+x.\sqrt{1-x^2})+Cste.$$

2. Exemple où on remplace $\varphi(t)$ par x : $I=\int\frac{e^{3t}+e^{2t}+4e^t}{1+e^t}.dt$

On pose $x=e^t$, alors $dx=e^t.dt$.

On obtient $I=\int\frac{e^{3t}+e^{2t}+4e^t}{1+e^t}.dt=\int\frac{x^2+x+4}{1+x}.dx=\int\frac{x(1+x)+4}{1+x}.dx=\frac{x^2}{2}+4.\ln|1+x|+Cste$

E. Quelques exemples complets

E-I. Calcul de $\int_1^e x^2.\ln(x).dx$ (méthode IPP)

$$\int_1^e x^2.\ln(x).dx=[\frac{x^3.\ln(x)}{3}]_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2.dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}(\frac{e^3-1}{3})=\frac{2e^3+1}{9}$$

E-II. Calcul de $\int\frac{1}{(1+u^2)^2}.du$ (méthode CdV)

On pose $u=\tan(x)$ d'où $du=(1+u^2).dx$ et $\frac{1}{1+u^2}=\cos^2(x)$ …

$$\int\frac{1}{(1+u^2)^2}.du=\int\cos^2(x).dx=\frac{1}{2}.(x+\frac{\sin(2x)}{2})+Cste=\frac{1}{2}.(\text{Arctan}(u)+\frac{u}{1+u^2})+Cste$$

E-III. Calcul de $\int\frac{x}{\sqrt{1+x}}.dx$ (méthode CdV)

On pose $u=\sqrt{1+x}$ d'où $u^2=1+x$ et $2u.du=dx$.

On obtient

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x}}.dx=\int\frac{u^2-1}{u}.2u.du=2.\int(u^2-1).du=2.(\frac{u^3}{3}-u)+Cste=2.\sqrt{1+x}.(\frac{x-2}{3})+Cste$$

E-IV. Calcul de $\int_{-1}^0 x.\sqrt{1+x^2}.dx$ (méthode CdV)

On pose $u=1+x^2$ d'où $du=2x.dx$ et $\begin{cases}x=-1\Rightarrow u=2\\ x=0\Rightarrow u=1\end{cases}$

On obtient

$$\int_{-1}^0 x.\sqrt{1+x^2}.dx=\frac{1}{2}\int_2^1\sqrt{u}.du=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_2^1=\frac{1}{3}(1-2\sqrt{2})$$

E-V. Calcul de $\int\text{Arcsin(x)}.dx$ (méthode IPP+CdV)

$$\int \text{Arcsin}(x).dx = x.\text{Arcsin}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx = x.\text{Arcsin}(x) - \left[\int \frac{-\frac{1}{2}du}{\sqrt{u}} \right] =$$

$$u = 1 - x^2$$
$$du = -2x.dx$$

$$x.\text{Arcsin}(x) + \sqrt{u} + Cste = x.\text{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} + Cste$$

E-VI. Calcul de $\int x.e^{\sqrt{x}}.dx$ (méthode CdV+3xIPP)

On pose $t = \sqrt{x}$ d'où $t^2 = x$, $dx = 2t.dt$

$$\int x.e^{\sqrt{x}}.dx = \int t^2.e^t.2t.dt = 2\int t^3.e^t.dt = \ldots = 2e^{\sqrt{x}}(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6) + Cste$$

F. Annexe : programme d’intégration en langage C

```
//Version Borland C… adaptable à dev-cpp via conio2.h
#include <stdio.h>
#include <conio.h>

double f(double x);
double Integrale(double a, double b, long n);

void main(void)
{
  double borneinf, bornesup;
  long nbintervalles;
  int rep;
  clrscr();
  printf("Calcul d'intégrale (la fonction est contenue dans le programme) \n");
  printf("\tDonnez la borne inférieure : ");
  scanf("%lf",&borneinf);
  printf("\tDonnez la borne supérieure : ");
  scanf("%lf",&bornesup);
  do{
    printf("\n\tDonnez le nombre d'intervalles du partage : ");
    scanf("%d",&nbintervalles);
    printf("\n\tOn obtient %lf",Integrale(borneinf,bornesup,nbintervalles));
    printf("\n\nVoulez vous changer le nombre d'intervalles ? ");
    rep=getch();
  }while(rep!='n' && rep!='N' && rep!=27);
}

double f(double x)
{
  return x*x;// La fonction intégrée est ici… on peut la changer !
}

double Integrale(double a, double b, long n)
{
  double deltax, som;
  long k;
  som=0;
  deltax=(b-a)/n;
  for(k=0;k<n;k++){
    som=som+deltax*f(a+k*deltax);
  }
  return som;
}

/*Variante un peu plus futée... appelée "méthode des trapèzes"
double Integrale(double a, double b, int n)
{
  double deltax, som, h;
  int k;
  som=0;
  deltax=(b-a)/n;
  for(k=0;k<n;k++){
    //On utilise comme hauteur de colonne la moyenne des hauteurs
    //calculées aux bornes gauche et droite de chaque sous-intervalle.
    h=(f(a+k*deltax)+f(a+(k+1)*deltax))/2;
    som=som+deltax*h;
  }
  return som;
}
*/
```

G. Sujets de problèmes plus complets…

G-I. Valeur moyenne et géométrie…

a. Valeur moyenne avec un cercle…

On place un point M sur le cercle trigonométrique (centre O et rayon 1), dans le premier quadrant. On appelle S le projeté de M sur l'axe des ordonnées.

On se propose de calculer la longueur moyenne des segments [SM] ainsi définis…

1ère méthode : On repère le point M par son angle polaire, on exprime SM en fonction de cet angle polaire et on calcule la moyenne en faisant varier l'angle polaire entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Faire le calcul.

2ème méthode : On repère le point M par son ordonnée, on exprime SM en fonction de cette ordonnée et on calcule la moyenne en faisant varier l'ordonnée entre 0 et 1. Faire le calcul.

Conclusion : Peut-on parler de la valeur moyenne d'une grandeur géométrique sans préciser comment on calcule cette moyenne ? Que pensez-vous de l'affirmation « le rayon d'un cercle est la longueur moyenne d'une corde dans ce cercle » ?

b. Valeur moyenne avec un triangle équilatéral…

On place un point M sur le côté [BC] d'un triangle équilatéral ABC dont les côtés mesurent 1. Expliciter deux façons différentes de calculer la longueur moyenne de la AM qui conduisent à calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos(\frac{\pi}{6} - \theta)} \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 \sqrt{\frac{3}{4} + (\frac{1}{2} - l)^2}.dl$$

Sachant que ces intégrales donnent les résultats $I_1 = \ln(3)$ et $I_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}.\ln(3)$ quelles sont les valeurs moyennes de AM correspondantes ?

G-II. La formule de Wallis (calcul de π : John WALLIS 1616-1703)

a. Vision mathématique du problème

On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x).dx$ où n est un entier positif.

Calculer $I_0, I_1 \; et \; I_2$. Calculer $\frac{d(\cos(x).\sin^{n-1}(x))}{dx}$ et en déduire que $n.I_n = (n-1).I_{n-2}$.

Montrer que $\begin{cases} I_{2p} = \frac{\pi}{2}.\frac{1\times3\times5\times...\times(2p-1)}{2\times4\times6\times...\times2p} \\ I_{2p+1} = \frac{2\times4\times6\times...\times2p}{1\times3\times5\times...\times(2p+1)} \end{cases}$ puis prouver que $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} < \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} < 1$.

Déterminer $\lim_{p\to+\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$ et en déduire que $\frac{\pi}{2} = \lim_{p\to+\infty} \frac{(2\times4\times6\times...\times2p)^2}{(1\times3\times5\times...\times(2p-1))^2.(2p+1)}$.

b. Vision informatique du problème

Programmer en C le calcul de $\frac{\pi}{2}$ à l'aide cette formule est assez simple… mais demande un peu d'astuce pour gagner beaucoup en rapidité et en précision… Pour ceux que ça intéresse (maintenant ou au semestre prochain)… georges.vincents@iut-orsay.fr !

G-III. Formule de Taylor avec reste intégral

La formule étudiée ici sera, dans sa version finale, utilisée sans démonstration dans le chapitre « développements limités ».

Si $f:[0;x]\to\mathbb{R}$ admet n dérivées continues dans $[0;x]$ alors :

$$\boxed{f(x)=f(0)+\sum_{p=1}^{p=n-1}\frac{x^p}{p!}f^{(p)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t).dt}$$

a. Comprendre la formule à l'aide de cas particuliers

a 1) Le cas de la fonction exponentielle

1) Ecrire la formule en général pour la fonction exponentielle.
2) Ecrire la formule dans le cas $n=2$ pour la fonction exponentielle.
3) Démontrer la formule à l'aide d'une intégration par parties dans le cas $n=2$ pour la fonction exponentielle.

a 2) Le cas de la fonction sinus

1) Ecrire la formule en général pour la fonction sinus.
2) Ecrire la formule dans le cas $n=3$ pour la fonction sinus.
3) Démontrer la formule dans le cas $n=3$ pour la fonction sinus.

b. Le cœur de la démonstration

b 1) Cas « simple »

En remarquant que $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t).dt$ et en utilisant une intégration par parties, montrer que $f(x)-f(0)=x.f'(0)+\int_0^x(x-t).f''(t).dt$.

b 2) Cas « utile »

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^x\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(t).dt=\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t).dt$$

c. Et la démonstration elle même

c 1) Rappel

Soit une propriété P(k) dépendant d'un entier k qui est vraie pour toutes les valeurs de k depuis 1 jusqu'à n , si on arrive à prouver que P(n+1) est une conséquence de P(1), P(2)… P(n) alors la propriété est vraie pour tout entier n à partir de 1. C'est ce qu'on appelle une démonstration par récurrence.

c 2) Récurrence

1) Démontrer que $f(x)=f(0)+\sum_{p=1}^{p=n-1}\frac{x^p}{p!}f^{(p)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t).dt$ est vraie pour $n=1$.
2) Démontrer que si $f(x)=f(0)+\sum_{p=1}^{p=n-1}\frac{x^p}{p!}f^{(p)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t).dt$ est vraie pour $n<N$ alors $f(x)=f(0)+\sum_{p=1}^{p=n-1}\frac{x^p}{p!}f^{(p)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t).dt$ est aussi vraie pour $n=N$.
3) Conclure.

d. Généralisation

En utilisant l'intervalle $[a;b]$ au lieu de l'intervalle $[0;x]$ on démontre de la même façon (intégration par parties et récurrence) que :

Si $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ admet n dérivées continues dans $[a;b]$ alors :

$$f(b)=f(a)+\sum_{p=1}^{p=n-1}\frac{(b-a)^p}{p!}f^{(p)}(a)+\int_a^b\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x).dx$$

… si ça vous tente, ne vous en privez surtout pas !

e. Majoration du reste intégral

On utilise la formule $f(x)=f(0)+\sum_{p=1}^{p=n-1}\frac{x^p}{p!}f^{(p)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t).dt$ en supposant que $f:[0;x]\to\mathbb{R}$ admet n dérivées continues dans $[0;x]$.

Le terme $\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t).dt$ est appelé reste intégral dans la formule de Taylor.

On rappelle qu'une fonction continue dans un intervalle fermé borné atteint ses bornes par conséquent, puisque $f^{(n)}$ est continue dans $[0;x]$, il existe une constante positive M telle que pour tout $t\in[0;x]$ on a $\left|f^{(n)}(t)\right|\le M$.

1. En distinguant les deux cas $0\le x$ et $x\le 0$, montrer que si t est entre 0 et x alors $|x-t|\le|x|$. En déduire que, quel que soit x, si t est entre 0 et x alors $|x-t|^{n-1}\le|x|^{n-1}$.
2. Quelle inégalité peut-on écrire entre $\left|\int_a^b g(t)dt\right|$ et $\int_a^b|g(t)|dt$ lorsque g est une fonction intégrable dans $[a;b]$? En déduire que $\left|\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t).dt\right|\le\frac{M}{(n-1)!}.|x|^n$.
3. On dit qu'une quantité Q est « bornée devant x^n » lorsque $\lim_{x\to 0}\frac{Q}{x^n}$ est une constante et on écrit alors $Q=\bigcirc(x^n)$ ce qui se lit « Q égale grand O de x^n ». Avec cette notation, que devient la formule de Taylor ?

En fait, $Q=\bigcirc(x^n)$ signifie qu'il existe un intervalle autour de 0 dans lequel $\frac{Q}{x^n}$ est borné… et lorsque $\lim_{x\to 0}\frac{Q}{x^n}$ existe, c'est évidemment le cas !

4. On dit qu'une quantité Q est « négligeable devant x^n » lorsque $\lim_{x\to 0}\frac{Q}{x^n}=0$ et on écrit alors $Q=\circ(x^n)$ ce qui se lit « Q égale petit O de x^n ». Avec cette notation, que devient la formule de Taylor ?
5. Montrer que, si $Q=\bigcirc(x^n)$ alors $Q=\circ(x^{n-1})$.
6. Exemples informatisés… avec le logiciel MAPLE

- Si on demande le développement de Taylor de $\sin(x)$ au voisinage de 0 en utilisant 5 dérivées successives… On obtient :

$$\sin(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\mathrm{O}(x^5)$$

- Si on demande le développement de Taylor de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 en utilisant 10 dérivées successives… On obtient :

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8+\frac{1}{9}x^9+\mathrm{O}(x^{10})$$

G-IV. *Fini, dénombrable, continu (culture générale !)*

On dit qu'un ensemble est fini… lorsqu'il est fini ! Mais qu'est-ce qu'un ensemble infini et les ensembles infinis ont-ils tous la même « taille » ?

On dit qu'un ensemble est dénombrable lorsqu'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels). Autrement dit un ensemble est dénombrable si on peut numéroter ses éléments…

Par exemple, les entiers relatifs forment un ensemble dénombrable. Il suffit d'écrire les entiers relatifs de la façon suivante : 0 ;-1 ;1 ;-2 ;2 ;-3 ;3 ;-4 ;4 ;-5 ;5 … On est sûr de les écrire tous et une seule fois chacun si bien qu'il n'y a plus qu'à les numéroter :

entiers relatifs	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	…
numéros (entiers naturels)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…

A chaque entier relatif correspond un entier naturel et un seul, à chaque entier naturel correspond un entier relatif et un seul : on a bien construit une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Les rationnels forment aussi un ensemble dénombrable… il n'y a donc pas plus de fractions d'entiers que d'entiers naturels ! Si ça vous étonne, vous pouvez demander des précisions à georges.vincents@iut-orsay.fr .

Les réels ne forment pas un ensemble dénombrable : c'est un ensemble « plus gros », on dit qu'il est continu. Prouver qu'il n'y a pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ est assez facile : supposons que tous les réels entre 0 et 1 soient écrits sous forme décimale et présentés en une liste ordonnée n'importe comment :

0	0,01506291004…
1	0,61821070309…
2	0,00557108020…
3	0,78105690431…
4	0,28109123781…
etc.	0,45097106423…

On va montrer que cette liste est forcément incomplète en créant un nombre qui ne peut en aucun cas être déjà dans la liste.

On garde le 0 initial puis on utilise 1 de plus que le 1er chiffre du 1er nombre (donc ici ce sera un 1), 1 de plus que le 2ème chiffre du 2ème nombre (donc ici ce sera un 2), 1 de plus que le 3ème chiffre du 3ème nombre (donc ici ce sera un 6) et ainsi de suite… si on rencontre un 9 en lui ajoutant 1 on obtiendrait 10… on écrira 0. Le procédé fait ainsi apparaître un nombre qui est forcément différent du 1er (à cause du 1er chiffre après la virgule) forcément différent du 2ème (à cause du 2ème chiffre après la virgule) etc. et qui pourtant est bien entre 0 et 1 ! La liste qu'on avait supposée complète ne l'est pas puisqu'il manque le nombre 0,126102… : on ne peut pas dresser une liste des réels entre 0 et 1.

Les conséquences sont importantes : on ne peut jamais dire quel réel est le suivant d'un autre (par exemple, la question « Quel est le réel juste après 0 ? » n'a aucun sens, la « quantité » de réels est très grande, bien plus grande que celle des entiers naturels. Une question mathématique épineuse est de savoir s'il existe des ensembles qui soient « plus grands » que l'ensemble des entiers naturels mais tout de même « plus petits » que l'ensemble des réels… et la réponse c'est « on n'en sait rien, on choisit ce qu'on veut comme réponse, à chaque choix correspond une nouvelle mathématique ! ».

Ce résultat est typique de l'évolution des mathématiques au 20ème siècle : il ne date que de 1960. On peut chercher « hypothèse du continu » avec GOOGLE, et l'encyclopédie libre WIKIPEDIA donne des informations simples et intéressantes sur le sujet.