Révisions de Mathématiques

Licence de Physique et applications – Université Paris-Sud

2012–2013

1. Révisions sur les nombres complexes
2. Révisions sur les fonctions d'une variable réelle
3. Révisions sur les équations différentielles
4. Révisions sur les fonctions de plusieurs variables réelles
5. Révisions sur l'algèbre linéaire

Révisions sur les nombres complexes

- *Représentation d'un nombre complexe*
- *Racines d'un nombre complexe*
- *Formule d'Euler ou de De Moivre*

---

1 Représentation d'un nombres complexe

1. Rappeler les différentes façons d'écrire un nombre complexe.
2. soit $z \in \mathbb{C}$ exprimer $\rho = |z|$ et $\theta = Arg z$ en fonction de $a = \Re z$ et $b = \Im z$.
3. soit $z \in \mathbb{C}$ exprimer $a = \Re z$ et $b = \Im z$ en fonction de $\rho = |z|$ et $\theta = Arg z$.
4. Représenter graphiquement l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles :
$$\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2.$$
.

2 Racines d'un nombre complexe

1. Identifier les parties réelles et imaginaires de $\sqrt[3]{i}$ et représenter les solutions dans le plan complexe. Retrouver ces valeurs en utilsant le notation polaire.
2. Déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :
$$z^n - 1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$
Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique lorsque $n = 6$.

3 Formule d'Euler ou de De Moivre

1. Rappeler la formule d'Euler ou de De Moivre.
2. Utilisez la formule d'Euler ou de De Moivre pour montrer que :
$$\sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta.$$

3. Calculer les sommes S_1 et S_2 de m cosinus ou sinus en progression arithmétique en utilisant la fonction exponentielle.

$$\begin{aligned} S_1 &= \cos\alpha + \cos(\alpha+\delta) + \cdots + \cos(\alpha+(m-1)\delta), \\ S_2 &= \sin\alpha + \sin(\alpha+\delta) + \cdots + \sin(\alpha+(m-1)\delta), \end{aligned}$$

où α et δ sont des réels quelconques.

4 Exercices supplémentaires

1. Donner l'ensemble des nombres complexes z tels que

$$|z+1+\mathrm{i}| = |z-4-2\mathrm{i}|$$

2. (a) Déterminer les racines cinquièmes de l'unité.
   (b) Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$. Montrer que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$
   (c) Démontrer que $\omega^4 = \bar{\omega}$ et que $\omega^3 = \bar{\omega}^2$. En déduire que

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

   puis la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

3. Soit $\theta \in [0, \pi[$. Déterminer les racines complexes de

$$z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{et} \quad t = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

Révisions sur les fonctions d'une variable réelle

- *Rappels sur les dérivées des fonctions d'une variable.*
- *Représentation des fonctions usuelles.*
- *La formule de Taylor et les développements limités.*
- *Intégration : primitives, changement de variables et intégration par parties.*

Les exercices marquées par ($\star$) constituent des exercices supplémentaires.

---

1 Limites, continuité, dérivée des fonctions d'une variable réelle

1. Calculer $f'(x)$ en utilisant le taux d'accroissement $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$:

   (a) $f(x) = \frac{1+2x}{(1-2x)}$ (b) $f(x) = \sqrt{2+x}$ (c) $f(x) = |x|$

2. Calculer la dérivée des expressions suivantes:

   (a) $y = (3+4x+x^2)^{1/2}$ (b) $z = \frac{w}{\sqrt{1-4w^2}}$ (c) $\rho = \frac{1}{2}\tan x \sin 2x$
   (d) $y = \arcsin(x-1)$ (e) $y = \arctan 3x^2$ (f) $z = \ln(\tanh 2x)$

($\star$) Montrer que la dérivée d'ordre n de $\sin x$ est $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Calculer la dérivée d'ordre n de $y = x^3 \sin x$. On pourra utiliser la formule de Leibniz:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}$$

2 Formule de Taylor, développements limités

1. Démontrer la formule d'approximation $\sin(\frac{\pi}{4}+x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+x)$, puis l'utiliser pour calculer $\sin 43°$. Dans quel intervalle doit se trouver x pour que l'erreur commise par cette approximation soit inférieure à 10^{-3}?

2. Étudier $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos(\ln x) - 1}{(e^x - e)^2}$

3. Montrer que le graphe de la fonction

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} - x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

admet une droite asymptote lorsque $x \to +\infty$. Préciser la position du graphe par rapport à l'asymptote.

Ê

4. Soit la fonction f définie sur D_f par

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$$

- Quels sont les asymptotes de la courbe représentative de f.
- Tracer cette courbe.

($\star$) Quel est le développement limité à l'ordre 3 de $y = (1+x)^{1/x}$ au voisinage de $x = 0$?

3 Représentation des fonctions usuelles.

Choisir cinq fonction parmi celles données ci-dessous et tracer leur courbe représentative.

$$\begin{array}{cccccc} \sin & \cos & \tan & \cosh & \sinh & \tanh \\ \arcsin & \arccos & \arctan & \cosh^{-1} & \sinh^{-1} & \tanh^{-1} \end{array}$$

4 Intégration : primitives, changement de variables et intégration par parties

1. Calculer la primitive des fonctions suivantes

   (a) $f(x) = e^{3\cos 2x} \sin 2x$

   (b) $g(x) = \dfrac{x^2}{1 - 2x^3}$

   (c) $h(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^6}}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)(4 - x^2)}$

(e) $g(x) = \dfrac{1}{\cos x\,(3+\cos^2 x)}$ Indice: se ramener à la forme du (d)

(f) $h(x) = \dfrac{\sin x \cos x}{2+\cos x}$

2. En utilisant l'intégration par parties calculer la primitive des fonctions suivantes:

   (a) $f(x) = x^2 \ln x$

   (b) $g(x) = x\sqrt{1+x}$

   (c) $h(x) = \sin^3 x$

($\star$) On pose

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

   (a) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

   (b) Calculer I_1 puis I_2.

Rappels de résultats mathématiques

1. *Formule de Taylor-Young: si f est de classe C^n au voisinage de 0 alors*

$$f(x) \;=\; f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

2. *Dérivée de l'inverse d'une fonction. Puisque par définition $\forall x \in D_{f^{-1}},\ f(f^{-1}(x)) = x$, en dérivant on obtient:*

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

3. *Développements limités usuels:*

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + o(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\ \frac{x^{2n+1}}{2n!} + o(x^{2n+2})\\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\ \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})
\end{aligned}$$

4. *Formules d'intégration:*

Fonction	***Primitive***
$u^a(x)u'(x)$	$\dfrac{u^{a+1}}{a+1}$ si $a \neq -1$, a constante
$f'(u)u'$	$f(u)$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$
$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left(\left\lvert\dfrac{a-x}{a+x}\right\rvert\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln\left(\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{\lvert a\rvert}\right)$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\dfrac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left(\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert\right)$
$\ln x$	$x\,(\ln x - 1)$

5. *Formules Trigonométriques:*

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2} \qquad \text{en particulier} \qquad \cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Révisions sur les équations différentielles

- *Savoir identifier une Equation Différentielle Ordinaire (EDO) : ordre, linéaire/non-linéaire, à coefficients variables ou constants, équations homogènes et inhomogènes.*
- *Connaître la méthode de la variation de la constante (EDO du 1er ordre).*
- *Savoir résoudre toutes les EDO linéaires du 1er ordre à coefficients variables ou constants avec et sans second membre*

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x)$$

- *Notion de polynôme caractéristique (EDO du 2ème ordre).*
- *Savoir résoudre toutes les EDO linéaires du 2ème ordre à coefficients constants sans second membre et avec un second membre du type exponentielle-polynôme*

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = \sum_k P_k(x)\mathrm{e}^{m_k x}$$

---

1 Equations différentielles du 1er ordre

1. Préciser le type des équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
y'(s) + y(s) &= 0,\\
y'(x) + y(x)\,\sin(x) &= 0,\\
x\,y'(x) + 2y(x) &= x^3,\\
y'(x) + x\,y^2(x) &= 0,\\
L\,i'(t) + R\,i(t) &= E_0,\\
(1+t^2)\,y'(t) + t\,y(t) &= 0\\
y'(\theta) + y(\theta) &= 4\,\sin\theta,\\
xy'(x) + y(x) + x^4y^2(x) &= 0,\\
m\,v'(t) + \alpha\,v(t) &= mg, \quad v(0) = 1
\end{aligned}$$

2. Parmi les équations différentielles précédentes, résoudre celles qui sont linéaires en utilisant si nécessaire la méthode de la variation de la constante.

   Vérifier vos résultats par dérivation.

2 Equations différentielles linéaires du 2ème ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes (toutes les constantes apparaissant dans les équations sont réelles):

$$
\begin{aligned}
y''(x) + \omega^2\, y(x) &= 0, \\
y''(x) - \omega^2\, y(x) &= 0, \\
L\, q''(t) + R\, q'(t) + \frac{1}{C}\, q(t) &= 0, \\
y''(x) + \omega^2\, y(x) &= x\, \mathrm{e}^{ax}, \\
y''(t) + 3\, y'(t) + 2\, y(t) &= 6 + t^2, \\
y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) &= 10\, \sin(x), \\
y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) &= 10\, x \cos(x), \\
y''(t) + \omega_0^2\, y(t) &= A\, \sin \omega t \quad (\text{lorsque} \quad \omega \neq \omega_0 \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0)
\end{aligned}
$$

Vérifier vos résultats par dérivation.

3 Exercices supplémentaires

1. Résoudre les équations différentielles

$$
\begin{aligned}
y'(x) + y(x) &= 2\, \mathrm{e}^{x} + 4\, \sin x, \\
y''(t) + y(t) &= t + \mathrm{e}^{-t}, \\
y''(t) + 4\, y(t) &= = 6\, \cos 3t + 20\, \sin 3t,
\end{aligned}
$$

   Ê

2. Déterminer la solution générale de l'équation

$$(f(\theta) - 2r\, \cos \theta)\, d\theta = dr$$

3. Montrer que l'équation différentielle non-linéaire

$$y'(x) + x\, y^2(x) = 0$$

   peut être résolue en séparant les variables.

   Ê

4. Quel est le type de l'équation différentielle :

$$y'(x) + \frac{1}{x}\, y(x) + x^3\, y^2(x) = 0\,?$$

   Résoudre cette équation différentielle en effectuant le changement de variable $u(x) = 1/y(x)$. On prendra $y(1) = 1$.

5. Sachant que $x+2$, $x+\sin x$ et $x+1$ sont solutions d'une certaine équation différentielle linéaire du 2ème ordre, déterminer la solution générale de cette équation différentielle.

6. Montrer qu'une solution particulière $y_p(x)$ de l'EDO : $y''(x)+y(x) = f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$y_p(x) = \int_0^x f(t)\, \sin(x-t)\, dt$$

Ê

Rappels de résultats sur les EDO

1. *La solution générale d'une équation différentielle linéaire est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.*

2. *La solution du problème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires existe et est unique.*

   Problème de Cauchy : Résolution de l'EDO avec une condition initiale fixée sur la solution (1er ordre), ou avec une condition initiale fixée sur la solution et sur sa dérivée au même point (2ème ordre).

3. *L'équation différentielle linéaire homogène :*

   $$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = 0$$

   admet au moins une solution particulière de la forme $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ *avec* $r \in \mathbb{C}$.

4. *L'équation différentielle linéaire inhomogène :*

   $$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = P(x)\,e^{mx}$$

   où P est un polynôme, admet une solution particulière de la forme $y(x) = Q(x)\mathrm{e}^{mx}$ *où Q est un polynôme tel que :*

   - degré $Q \leq$ degré P *si* m *n'est pas racine du polynôme caractéristique,*
   - degré $Q \leq$ degré P *+1 si* m *est une des racines du polynôme caractéristique,*
   - degré $Q \leq$ degré P *+2 si* m *est racine double du polynôme caractéristique.*

5. *Une équation différentielle linéaire dont le second membre s'écrit sous la forme* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ *admet pour solution particulière la fonction* $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x)$ *où* y_i *est une solution de l'équation diféfrentielle ayant pour second membre* $f_i(x)$ *pour* $i = 1, 2$.

Révisions sur les fonctions de plusieurs variables réelles

- *Savoir calculer les dérivées partielles et la différentielle d'une fonction de plusieurs variables réelles.*
- *Savoir travailler avec les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.*
- *Exprimer les éléments de longueur, surface et volume dans ces systèmes de coordonnées.*
- *gradient, divergence, rotationnel et Laplacien dans les différents systèmes de coordonnées.*
- *Appliquer la formule de Taylor à une fonction de plusieurs variables.*
- *Circulation, flux : théorèmes de Stokes et de Green Ostrogradski.*

---

1 Dérivées partielles

1. Calculer les dérivées partielles par rapport à chacune des variables des fonctions suivantes :

$$d(x,y) = \sqrt{x^2 - 2xy + y^2}\,,$$

$$s(x,t) = \sqrt{c^2t^2 - G(x,t)x^2}\,,$$

où $G(x,t)$ est une fonction dérivable,

$$f(x,y,z) = e^{-x^2-(y-y_0)^2-\epsilon z^2}\,,$$

où y_0 et ϵ sont des constantes,

$$J(\rho,\theta) = e^{-\rho\cos\theta}\,,$$

$$I(x,t) = L\frac{\sin(\omega t - kx)}{x}\,,$$

où L, ω et k sont des constantes.

2. Écrire, si elles existent, les formes différentielles de ces fonctions.

2 Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

1. Représenter schématiquement le système de coordonnées cylindriques.

2. Donner les relations de passage entre coordonnées cartésiennes et cylindriques.

3. Représenter schématiquement le système de coordonnées sphériques.

4. Donner les relations de passage entre coordonnées cartésiennes et sphériques.

5. Représenter les éléments de longueur, surface et volume dans les différents systèmes de coordonnées.

3 Opérateurs gradient, divergence, rotationnel et Laplacien

Les opérateurs gradient, divergence, rotationnel et Laplacien se retrouvent dans un grand nombre de problèmes en physique. Le gradient est une généralisation de la notion de dérivée pour une fonction de N variables, donc défini dans un espace à N dimensions. Une définition générale du gradient peut s'exprimer :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f . \overrightarrow{dr} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \,,$$

où les x_i désignent les N variables de la fonction f. En géométrie cartésienne, on obtient aisément :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y} \overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{e_z}$$

Le gradient transforme une fonction de plusieurs variables f en un champ de vecteurs, on introduit souvent la notation $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f$ à fins de simplification. La divergence s'applique à un champ de vecteur et renvoie un scalaire, elle se note $\mathrm{div} \overrightarrow{F}$ et s'exprime en coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{div} \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} . \overrightarrow{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \,.$$

La divergence mesure la propension d'un champ de vecteur à diverger ou converger autour de chaque point. Il faut faire attention en passant à un système de coordonnées plus compliquées car la notation utilisant l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ peut alors être source d'erreur. L'expression de la divergence est donnée pour des coordonnées cylindriques et sphériques dans le formulaire à la fin de ce sujet.

L'opérateur rotationnel indique la tendance à tourner d'un champ de vecteur, il s'applique donc à un champ de vecteur et renvoie également un vecteur. On peut l'exprimer comme un produit vectoriel avec le vecteur $\overrightarrow{\nabla}$, ici en géométrie cartésienne :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Gradient, divergence et rotationnel faisant intervenir une seule fois l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$, ce sont des opérateurs différentiels du premier ordre. On peut également définir l'opérateur Laplacien, en appliquant successivement les opérateurs divergence et gradient, on définit :

$$\Delta f = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\right)$$

Par analogie avec la notion de dérivée seconde d'une fonction d'une seule variable, l'opérateur Laplacien donne la courbure d'une fonction de plusieurs variables. Enfin, on peut mentionner qu'on définit également un Laplacien vectoriel :

$$\overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\overrightarrow{F}\right) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F}\right) .$$

1. Retrouver le gradient en coordonnées cylindriques et sphériques en partant de son expression en coordonnées cartésiennes et des formules de changement de variables vues précédemment.

2. Même chose pour la divergence, le rotationnel et le Laplacien.

3. Vérifier les identités :

   $$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}) = 0\,,$$

   $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi) = 0$$

   en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

4. Calculer le gradient et le Laplacien des fonctions suivantes:

   $$f_1(x,y,z) = x + y + z - 1\,,$$

   $$f_2(x,y,z) = x\ln x + y\ln y + z\ln z\,,$$

   $$f_3(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1\,,$$

   $$f_4(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3\,,$$

   même chose en coordonnées cylindriques et sphériques (en remplaçant (x,y,z) respectivement par $(r, r\theta, z)$ et $(r, r\theta, r\phi\sin\theta)$).

   N.B. : on reste maintenant en coordonnées cartésiennes, on pourra s'entrainer ultérieurement dans les autres systèmes de coordonnées...

5. Soit $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ le champ de vecteur suivant :

   $$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (yz + x^2y^3, xz + x^3y^2, xy + 1)\,.$$

   Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ et trouver f telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$. Même question avec :

   $$\overrightarrow{U}(x,y) = \left(\arctan\frac{y}{x}, \ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\,.$$

6. Soit $f(x,y) = -2x^2 + 3xy + y^2$ et $\overrightarrow{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$ un vecteur unitaire faisant l'angle θ avec l'axe (Ox). Calculer la dérivée de f dans la direction θ définie par :

$$\frac{df}{dn} = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\right) . \overrightarrow{n} \, .$$

Etudier les variations de df/dn quand θ varie. Pour quelle direction obtient-on le maximum ?

7. Soit $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{div}\overrightarrow{V} = 0$ et trouver un champ de vecteur $\overrightarrow{W}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{W}$.

8. Soit $\overrightarrow{V}(x,y)$ le champ de vecteur :

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = \left(2xz, f(y,z), x^2 + \frac{y^2}{2}\right) ,$$

où f est une fonction continue dérivable. Trouver f telle que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$. Pour cette valeur de f, trouver F telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} F$. Même question avec :

$$\overrightarrow{U}(x,y,z) = \left(x^2 - 2zx, y^2 - 2xy, f(y,z)\right) .$$

4 Formule de Taylor

La formule de Taylor, qui donne un développement en série d'une fonction au voisinage d'un point, peut se généraliser au cas d'une fonction de plusieurs variables. En tant que généralisation à plusieurs variables, le gradient apparait tout naturellement. Les termes associés aux dérivées d'ordre supérieur, faisant intervenir toutes les dérivées croisées, va voir apparaître une matrice représentant toutes ces dérivées, appelée Hessien (cf. Formulaire G). Les ordres supérieurs seront donnés par des tenseurs de rang croissant...

1. Calculer gradient et Hessien des fonctions données en section 1. *N.B. : Pour la fonction $J(\rho,\theta)$, on utilisera les coordonnées polaires, en retrouvant le Hessien polaire comme la matrice transformée du Hessien cartésien par la matrice de passage entre coordonnées cartésiennes et polaires.*

2. En appliquant la formule donnée dans le formulaire, calculer le développement limité au premier ordre des mêmes fonctions au voisinages de 0.

5 Circulation, flux

1. On considère un champ vectoriel $\overrightarrow{V} = y\overrightarrow{e}_x - x\overrightarrow{e}_y + \overrightarrow{e}_z$. On veut connaître la valeur de la circulation de ce vecteur sur un cercle parallèle au plan (xy), de rayon R et centré sur l'axe des z à une hauteur $h > 0$.

   a) Faire un dessin.

   b) Faire le calcul explicite de la circulation, puis utiliser le théorème de Stokes.

   c) On veut calculer maintenant la valeur du flux de ce même champ à travers la surface fermée d'un cylindre centré sur l'axe des z, de rayon R et de hauteur comprise entre 0 et $h > 0$, avec un calcul explicite et à l'aide du théorème de Green-Ostrogradsky.

Formulaire

A - *la différentielle totale exacte d'une fonction de plusieurs variables* $f(x_1, \cdots, x_N)$ *s'écrit :*

$$df = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f(x_1, \cdots, x_N)}{\partial x_i} dx_i$$ *, où les dérivées partielles* $\frac{\partial f(x_1,\cdots,x_N)}{\partial x_i}$ *doivent être définies.*

B - *gradient, rotationnel, divergence, Laplacien en cordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques :*

	cartésien (x, y, z)	*cylindrique* (r, θ, z)	*sphérique* (r, θ, ϕ)
$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix}$
$\mathrm{div}\overrightarrow{F}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rF_\phi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$
Δf	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

C - *le théorème de Green-Ostrogradski (flux-divergence) :*

$$\iiint_V \mathrm{div}\overrightarrow{F} dV = \oint_S \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{S}$$

D - *le théorème de Stokes :*

$$\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F} dS = \oint_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{d\ell}$$

E - *formule de Taylor pour une fonction de plusieurs variables* $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_N)$ *au voisinage du point* $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_N)$ *:*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \overrightarrow{\mathrm{grad}} f.(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \left. H(f)\right|_{\mathbf{a}} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(||\mathbf{x} - \mathbf{a}||^2),$$

où $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ *est le gradient de* f *et* $\left. H(f)\right|_{\mathbf{a}}$ *est la matrice Hessienne de la fonction* f *évaluée en* $\mathbf{a}$ *:*

$$\left. H_{ij}(f)\right|_{\mathbf{a}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Révisions d'algèbre linéaire

- *vecteurs : norme, produit scalaire, produit vectoriel*
- *matrices : déterminant, inverse, transposée, produit*
- *changement de base*
- *diagonalisation, valeurs propres, vecteurs propres*

---

1 Vecteurs

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$.

1. Exprimer $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ en fonction de $||\mathbf{u}||$, de $||\mathbf{v}||$ et de l'angle de vecteurs $\theta \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$. On a

$$\mathbf{u} \stackrel{\mathcal{B}}{=} U = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \stackrel{\mathcal{B}}{=} V = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   Calculer $||\mathbf{u}||$,$||\mathbf{v}||$, $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ et $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ à l'aide de U et V. En déduire la valeur de θ.

2 Matrices

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux applications linéaires (ou opérateurs) de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Sur la base $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ ont pour matrices représentatives

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les matrices représentatives de $\mathcal{M} \circ \mathcal{N}$ et de $\mathcal{N} \circ \mathcal{M}$ où $\circ$ désigne la composition. En déduire que le produit matriciel tout comme la composition d'opérateurs ne sont pas des opérations commutatives.

2. Calculer ${}^tM$ et ${}^tN$ où ^{t} désigne la transposition. Comment appelle-t-on une matrice M telle que ${}^tM = M$? Quelle relation lie ${}^tM$, ${}^tN$ et ${}^t(MN)$?

3. Calculer les déterminants de M et N. Ces matrices sont-elles inversibles ?
4. Calculer N^{-1} par la méthode du pivot de Gauss.
5. Soient A et B deux matrices inversibles, quelle relation lie A^{-1}, B^{-1} et $(AB)^{-1}$?

3 Changement de base

On note $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ une autre base de $\mathcal{E}$.

1. Donner les composantes de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ sur $\mathcal{B}$.
2. Sachant que les composantes de $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ et $\mathbf{e}'_3$ sur $\mathcal{B}$ sont

$$\mathbf{e}'_1 \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_3 \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   donner la matrice de passage α de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

3. Sachant que

$$\beta = \alpha^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

   calculer les composantes de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sur $\mathcal{B}'$.

4 Diagonalisation

On demande de diagonaliser M. On procédera de la manière suivante :

1. Calculer son polynôme caractéristique $P(\lambda) \equiv \det(M - \lambda I)$ où I est la matrice identité ;
2. Montrer que les valeurs propres sont 2, 1 et 0 (ce sont les zéros de P), c'est-à-dire que M est semblable à la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

3. Montrer que les vecteurs propres associés à 2, 1 et 0 sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$. En déduire que la matrice de passage vers la base de vecteurs propres est α ;

4. Vérifier que $M = \alpha D \beta$.
5. Pouvait-on affirmer dès le départ que M était diagonalisable de manière évidente ?
6. (Facultatif) Diagonaliser N.