Examen

Correction succincte

1 Exercice - Mesure de spin

La mesure donne l'une des valeurs propres des observables, c'est-à-dire $\pm\hbar/2$ (le choix d'un axe est sans conséquence sur le spectre).

1. Une mesure conduit à projeter l'état $|\,\psi\,\rangle$ sur le sous-espace associé à la valeur propre considérée. En projetant sur $|+\rangle$, nous obtenons
$$\widehat{P}_{z+}|\,\psi\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\,(|\,1,0,0\,\rangle + |\,2,1,0\,\rangle) \otimes |+\rangle_z \tag{1}$$
d'où la probabilité $||P_{z+}|\,\psi\,\rangle||^2 = 2/3$ de mesurer $+\hbar/2$. Pour obtenir $|\,\psi'\,\rangle$, il nous reste à normaliser la projection :
$$\boxed{|\,\psi'\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|\,1,0,0\,\rangle + |\,2,1,0\,\rangle) \otimes |+\rangle_z} \tag{2}$$
De même, on mesure une valeur $-\hbar/2$ avec probabilité 1/3, à la suite de quoi on a
$$\boxed{|\,\psi'\,\rangle \;=\; |\,1,0,0\,\rangle \otimes |-\rangle_z} \tag{3}$$
2. La normalisation impose $\alpha = 1/\sqrt{2}$.
3. Cf cours.
4. On remarque que
$$|+\rangle_z \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|+\rangle_x + |-\rangle_x\,) \tag{4}$$
si bien que
$$|\,\psi\,\rangle \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,|\,1,0,0\,\rangle \otimes |+\rangle_x \;+\; \frac{1}{\sqrt{3}}|\,2,1,0\,\rangle \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,(|+\rangle_x + |-\rangle_x\,)\right] \tag{5}$$
$$\;=\; \frac{1}{\sqrt{6}}\,(2\,|\,1,0,0\,\rangle + |\,2,1,0\,\rangle) \otimes |+\rangle_x \;+\; \frac{1}{\sqrt{6}}|\,2,1,0\,\rangle \otimes |-\rangle_x, \tag{6}$$
expression commode pour lire les résultats de la projection sur $|\pm\rangle_x$. On mesure donc $S_x = \hbar/2$ avec probabilité $(4+1)/6 = 5/6$, et $S_x = -\hbar/2$ avec probabilité 1/6. Après mesure, le système se trouve respectivement dans les états
$$\boxed{|\,\psi'\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2\,|\,1,0,0\,\rangle + |\,2,1,0\,\rangle) \otimes |+\rangle_x \qquad \text{et} \qquad |\,\psi'\,\rangle \;=\; |\,2,1,0\,\rangle \otimes |-\rangle_x}\,. \tag{7}$$

2 Mesure de l'interaction magnétique entre deux électrons liés à deux ions séparés.

1. L'expérience de Stern et Gerlach (1923) a été décrite en cours.

2.1 Base couplée et base découplée

2. La base produit tensoriel $|\,\sigma_a, \sigma_b\,\rangle$ (base découplée) est formée de 4 vecteurs, $|\,++\rangle$, $|\,+-\rangle$, $|\,-+\rangle$, $|\,--\rangle$. La dimension de l'espace des états est en effet le produit des dimensions des espaces à une particule, soit 2×2.
3. Les valeurs possibles pour s sont 0 ou 1.
4. Pour $s = 0$, $m_s = 0$ tandis que pour $s = 1$, $m_s = -1$, 0 ou 1.
5. On retrouve bien 4 états.
6. La seule façon de réaliser $m_s = 1$ est d'avoir les deux projections positives : $\sigma_a = \sigma_b = +$. Cela signifie que $|\,11\,\rangle = |\,++\rangle$. De même $|\,1-1\,\rangle = |\,--\rangle$.
7. Pour calculer le ket $|\,10\rangle$, nous pouvons faire agir $\widehat{S}_- = \widehat{S}_{a-} + \widehat{S}_{b-}$ sur $|\,11\,\rangle$:

$$\widehat{S}_-|\,11\,\rangle = \sqrt{1(1+1)-1(1-1)}\,|\,10\,\rangle = (\widehat{S}_{a-} + \widehat{S}_{b-})|\,++\rangle.$$

   Par ailleurs

$$\widehat{S}_{a-}|\,++\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}\,|\,-+\,\rangle \;=\; |\,-+\rangle.$$

   De même, $\widehat{S}_{b-}|\,++\,\rangle \;=\; |\,+-\,\rangle$ si bien que

$$\boxed{|\,10\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,|\,+-\,\rangle + |\,-+\,\rangle\,)}.$$

8. Pour trouver le ket $|\,00\rangle$, on note qu'ayant un nombre quantique magnétique $m_s = 0$, il s'exprime comme combinaison linéaire de vecteurs de la base non couplée ayant des σ_i opposés, en d'autres termes $|\,+-\,\rangle$ et $|\,-+\rangle$. C'est également le cas de $|\,10\rangle$, auquel $|\,00\rangle$ doit par ailleurs être orthogonal. Il s'ensuit que

$$\boxed{|\,00\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,|\,+-\,\rangle - |\,-+\,\rangle\,)}.$$

2.2 L'hamiltonien dipolaire

9. γ est le rapport gyromagnétique. Son ordre de grandeur est donné par le rapport entre la charge et la masse de l'objet. Pour cette raison, le moment magnétique lié au noyau est négligé devant celui de l'électron.
10. Pour l'expérience considérée, $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de l'axe des z, et l'hamiltonien du système des deux ions s'écrit

$$\widehat{H}_0 \;=\; \frac{\mu_0\gamma^2}{4\pi d^3}\left[\widehat{\vec{S}}_a \cdot \widehat{\vec{S}}_b - 3\,\widehat{S}_{az}\widehat{S}_{bz}\right]. \tag{8}$$

   On calcule ensuite

$$\left(\widehat{\vec{S}}_a + \widehat{\vec{S}}_b\right)^2 \;=\; \widehat{S}_a^2 + \widehat{S}_a^2 + 2\,\widehat{\vec{S}}_a \cdot \widehat{\vec{S}}_b \tag{9}$$

   car $\widehat{\vec{S}}_a$ et $\widehat{\vec{S}}_b$ commutent. Finalement,

$$\boxed{\widehat{H}_0 \;=\; -\frac{\mu_0\gamma^2}{8\pi d^3}\left(6\,\widehat{S}_{az}\,\widehat{S}_{bz} \;-\; \widehat{S^2} \;+\; \widehat{S_a^2} \;+\; \widehat{S_b^2}\right)}, \tag{10}$$

   d'où $\beta = -\mu_0\gamma^2/(8\pi d^3)$ et $k = 6$.

11. On part de $\widehat{S}_{az}\,\widehat{S}_{bz}|\,\sigma_a,\sigma_b\,\rangle \;=\; \sigma_a\sigma_b\frac{\hbar^2}{4}\,|\,\sigma_a,\sigma_b\,\rangle$ d'où

$$\widehat{S}_{az}\,\widehat{S}_{bz}|\,1,\pm1\,\rangle \;=\; \frac{\hbar^2}{4}\,|\,1,\pm1\,\rangle \tag{11}$$

$$\widehat{S}_{az}\,\widehat{S}_{bz}|\,s,0\,\rangle \;=\; -\frac{\hbar^2}{4}|\,s,0\,\rangle. \tag{12}$$

Les vecteurs $|\,sm_s\,\rangle$ de la base couplée sont donc des vecteurs propres du produit $\widehat{S}_{az}\,\widehat{S}_{bz}$ avec des valeurs propres $\pm\hbar^2/4$.

12. L'action de l'hamiltonien sur les vecteurs de base donne

$$\widehat{H}_0\,|\,1,\pm1\,\rangle \;=\; -\frac{\mu_0\,\gamma^2\,\hbar^2}{8\pi d^3}\left(\frac{6}{4}-1(1+1)+2\frac{1}{2}\frac{3}{2}\right)|\,1,\pm1\,\rangle \;=\; -\frac{\mu_0\,\gamma^2\,\hbar^2}{8\pi d^3}\,|\,1,\pm1\rangle \tag{13}$$

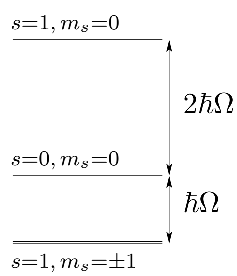
$$\widehat{H}_0\,|\,1,0\,\rangle \;=\; -\frac{\mu_0\,\gamma^2\,\hbar^2}{8\pi d^3}\left(-\frac{6}{4}-1(1+1)+2\frac{1}{2}\frac{3}{2}\right)|\,1,0\,\rangle \;=\; 2\,\frac{\mu_0\,\gamma^2\,\hbar^2}{8\pi d^3}|\,1,0\,\rangle \tag{14}$$

$$\widehat{H}_0\,|\,0,0\,\rangle \;=\; -\frac{\mu_0\,\gamma^2\,\hbar^2}{8\pi d^3}\left(-\frac{6}{4}-0+2\frac{1}{2}\frac{3}{2}\right)|\,0,0\,\rangle \;=\; 0. \tag{15}$$

On en déduit la représentation matricielle de $\widehat{H}_0$ dans la base couplée ordonnée $|\,11\,\rangle$, $|\,1-1\,\rangle$,$|\,10\,\rangle$,$|\,00\,\rangle$:

$$\widehat{H}_0 \;=\; \frac{\mu_0\,\gamma^2\,\hbar^2}{8\pi d^3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

13. Il y a 3 niveaux d'énergie $-\hbar\Omega$, $2\hbar\Omega$, et 0 où $\boxed{\Omega = \mu_0\,\gamma^2\,\hbar\,/(8\pi d^3)}$. Le niveau fondamental est dégénéré deux fois.



2.3 Évolution

14. A l'instant $t=0$, $|\,\psi(0)\,\rangle = |\,+-\,\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(|\,1,0\,\rangle\;+\;|\,0,0\,\rangle)$.

15. On en déduit

$$|\,\psi(t)\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-2i\Omega t}|\,1,0\,\rangle\;+\;|\,0,0\,\rangle\right) \tag{17}$$

16. ... soit aussi

$$\boxed{|\,\psi(t)\,\rangle \;=\; \frac{1+e^{-2i\Omega t}}{2}\,|\,+-\,\rangle \;+\; \frac{-1+e^{-2i\Omega t}}{2}\,|\,-+\,\rangle}. \tag{18}$$

17. Le système reste dans le sous-espace engendré par les deux vecteurs $|\,+-\,\rangle$ et $|\,-+\,\rangle$; son vecteur d'état n'a jamais de projection sur $|\,++\,\rangle$ ou sur $|\,--\,\rangle$: la probabilité de trouver les deux spins avec même projection est nulle.

18. La probabilité de trouver l'ion A dans l'état $|+\rangle$ à l'instant t est

$$\boxed{p(t) \;=\; \left|\frac{1+e^{-2i\Omega t}}{2}\right|^2 \;=\; \frac{1}{2}\left[1+\cos(2\Omega t)\right]}. \tag{19}$$

On vérifie que $p(0)=1$.

19. Une fréquence particulière apparaît, c'est la quantité Ω définie plus haut.

20. La fréquence Ω varie comme $1/d^3$, et l'on s'attend donc à trouver $n=3$. Sur la figure, on mesure *grosso-modo* une pente

$$\frac{\log_{10}(10)-\log_{10}(0.1)}{\log_{10}(5)-\log_{10}(1)} = 2/\log_{10}(5) \simeq 2/0.7 \simeq 3. \tag{20}$$

Tout est raisonnablement cohérent.

2.4 Effet d'un champ magnétique extérieur

21. Avec un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\vec{u}_z$ dirigé suivant l'axe z, le nouvel hamiltonien est

$$\widehat{H}_1 \;=\; \widehat{H}_0 - \gamma B \widehat{S}_z. \tag{21}$$

22. La base couplée est une base propre de $\widehat{S}_z$ et de $\widehat{H}_0$. Elle est donc aussi une base propre de $\widehat{H}_1$. Les niveaux d'énergie s'écrivent

$$E(1,1) \;=\; -\hbar\Omega \;-\; \hbar\gamma B \tag{22}$$
$$E(1,-1) \;=\; -\hbar\Omega \;+\; \hbar\gamma B \tag{23}$$
$$E(1,0) \;=\; 2\,\hbar\Omega \tag{24}$$
$$E(0,0) \;=\; 0, \tag{25}$$

soit de façon plus compacte $E_1(s,m_s) = E_0(s,m_s) - \gamma\hbar B\, m_s$.

23. Il apparaît que pour $m_s=0$, l'énergie ne dépend pas de B. On en conclut que la dynamique étudiée dans la partie 2.3 n'est pas affectée par le champ magnétique. Si celui-ci n'a plus le bon goût d'être aligné avec la direction centre-à-centre des dipôles, l'affaire se complique. . .