Université Paris-Sud **Année 2014–15**
Licences L3 PAPP & PMEC

Mathématiques pour la Physique II

TD 3 : Lemmes de Jordan et applications

Les lemmes qui suivent sont constamment utilisés pour justifier des passages à la limite lors du calcul d'intégrales de contour. Il est recommandé de s'en rappeler les démonstrations, afin de les adapter éventuellement.

Démontrer les trois lemmes suivants :

Exercice 1 : Lemme du demi-cercle

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant z_0. Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$, telle que z_0 soit un pôle *simple* de f, c'est-à-dire dire qu'il existe une limite non nulle $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$ qu'on notera $\mathrm{Res}(f, z_0)$ (correspondant au résidu de f en z_0 qui est dans ce cas-ci un pôle simple de f).

On note, pour $\varepsilon > 0$, $\gamma(\varepsilon) = \{z = z_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}; 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi\}$. Alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1)\,\mathrm{Res}(f, z_0).$$

Exercice 2 : Lemme de Jordan n° 1

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur le secteur $\mathcal{S} = \{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}; r > 0 \text{ et } 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 \leqslant \pi\}$ telle que

$$\lim_{\substack{|z| \to 0 \\ z \in \mathcal{S}}} z f(z) = 0 \qquad \left(\text{resp. } \lim_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in \mathcal{S}}} z f(z) = 0\right).$$

Si l'on note $\gamma(r) = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}; \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\}$, alors

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\gamma(r)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \qquad \left(\text{resp. } \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma(r)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\right).$$

Exercice 3 : Lemme de Jordan n° 2

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur le secteur $\mathcal{S} = \{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}; r > 0 \text{ et } 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 \leqslant \pi\}$ telle que

$$\lim_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in \mathcal{S}}} f(z) = 0.$$

Alors, en notant $\gamma(r) = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}; \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\}$, on a

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma(r)} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Le second lemme de Jordan est plus spécifiquement utile pour le calcul des transformées de Fourier.

Exercice 4 : Intégrale dans le plan complexe 1 (Sinus cardinal)

On considère la fonction $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$.

1 – Montrer qu'elle est holomorphe sur un ouvert Ω qu'on précisera.

2 – On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit et $R > 0$ suffisamment grand. On considère le chemin γ parcouru dans le sens trigonométrique, réunion des quatre chemins suivants :

$$\gamma_1 = \{z = t \mid t \in [-R, -\varepsilon]\} \qquad \gamma_2 = \{z = \varepsilon\, e^{i\theta} \mid \theta \in [\pi, 0]\}$$
$$\gamma_3 = \{z = t \mid t \in [+\varepsilon, +R]\} \qquad \gamma_4 = \{z = R\, e^{i\theta} \mid t \in [0, \pi]\}$$

Tracer le contour et l'orienter.

3 – Que vaut $\int_\gamma f(z)\, dz$? Justifier sa réponse. Que valent les limites suivantes ?

(a) $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$

(b) $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_4} f(z)\, dz$.

4 – En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi\,. \tag{1}$$

Exercice 5 : Intégrale dans le plan complexe 2 (Lorentzienne)

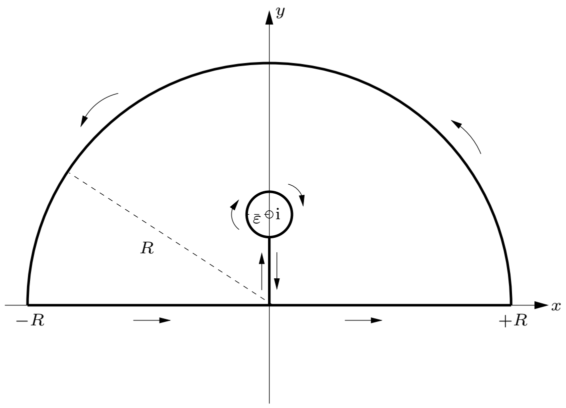
On considère la fonction de la variable complexe z

$$f(z) = \frac{e^{ikz}}{1+z^2} \quad , \tag{2}$$

où k est un réel positif.

1 – Sur quel domaine du plan complexe $f(z)$ est-elle holomorphe ?

2 – Que vaut $\int_\gamma dz\, f(z)$? avec γ le chemin fermé défini sur la figure :



3 – On décompose γ en trois chemins. γ_1 est le segment de l'axe réel reliant $-R$ à R, γ_2 le demi-cercle de centre l'origine et de rayon R et γ_3 le cercle de centre i et de rayon ε. Exprimer $\int_\gamma f(z)\, dz$ en fonction des intégrales sur les chemins γ_1, γ_2 et γ_3, en précisant l'orientation des contours.

4 – Montrer que la contribution de γ_2 s'annule quand $R \to \infty$.

5 – Expliciter la contribution de γ_3, et prendre la limite $\varepsilon \to 0$ (on pourra utiliser le théorème de convergence dominée).

6 – En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-k} \quad . \tag{3}$$

Comment devrait-on adapter le calcul pour $k < 0$?