

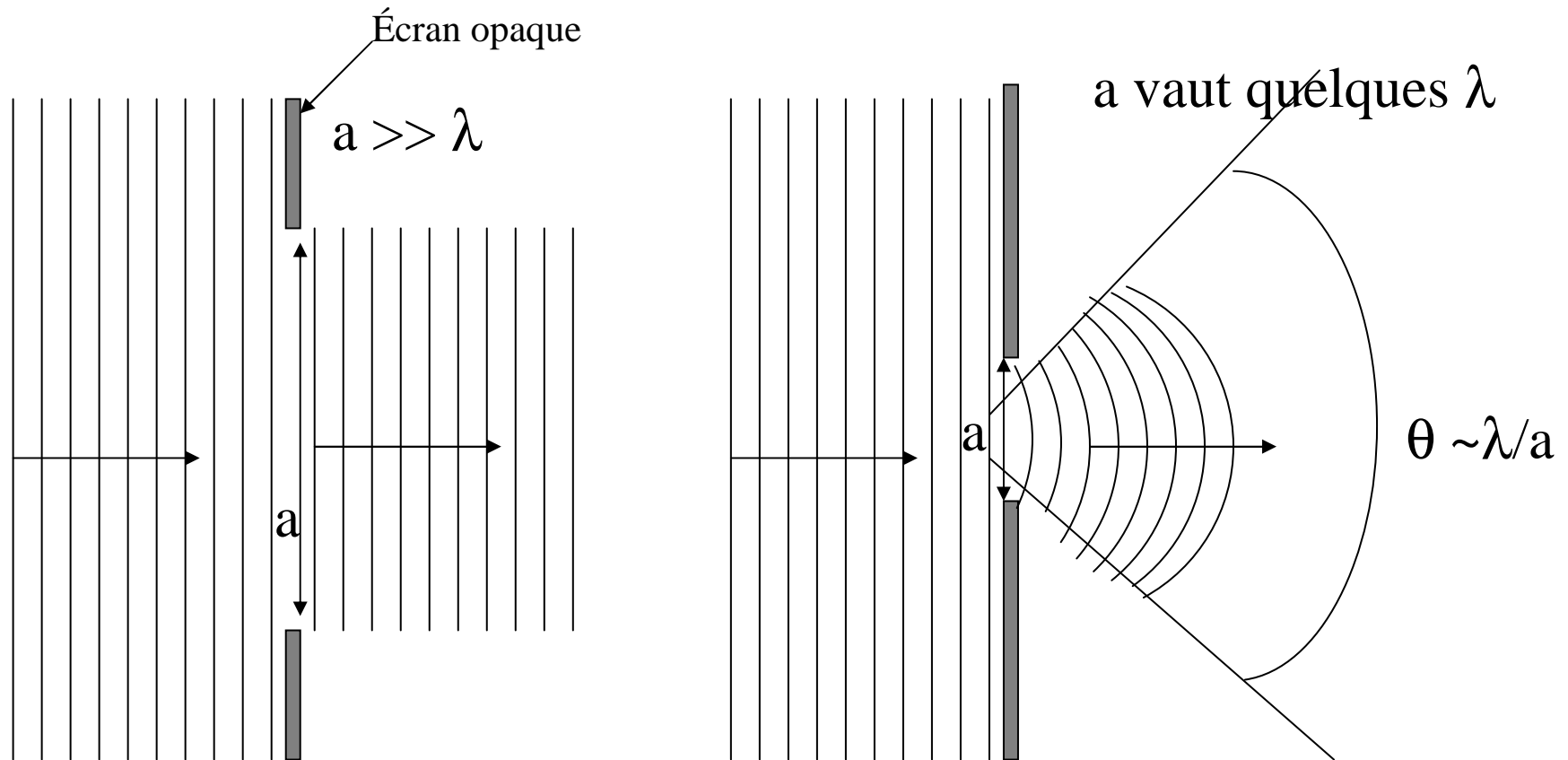
# Diffraction de la lumière

## Cours 5

# 1 Introduction

# La diffraction est un phénomène propre aux ondes (Huygens)

Vision très grossière du phénomène:

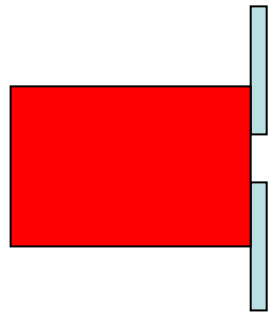


Onde plane progressive

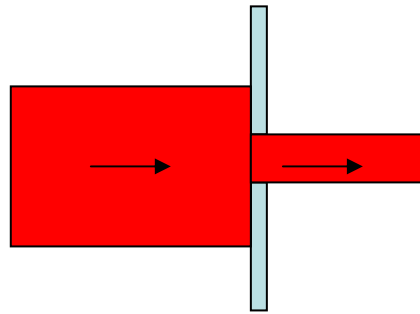
Onde plane progressive

Onde après le trou

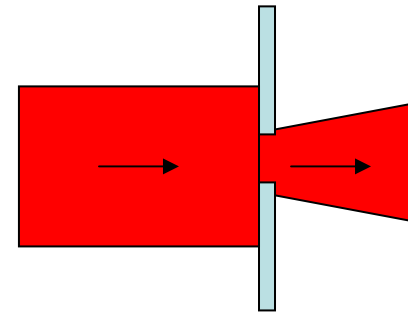
# Ce phénomène s'observe effectivement avec la lumière



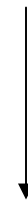
Faisceau lumineux incident = Cylindre



Ce que prévoit l'optique géométrique et la théorie corpusculaire



Ce que prévoit la théorie ondulatoire



**C'est ce qui est observé si le trou est très petit**

# Interprétation électromagnétique

L'onde incidente  $S_i(M,t)$  excite les atomes de l'écran qui génèrent à leur tour un champ  $S_e(M,t)$

- A) Lorsque l'écran est « plein », le champ de l'autre côté de l'écran est tel que:  **$S(M,t) = S_e(M,t) + S_i(M,t) = 0$ . L'écran est opaque.**
- B) Lorsqu'on fait un trou dans l'écran, on retire des « sources » qui généraient avant un champ  $S_t(M,t)$  (petite contribution au champ  $S_e(M,t)$ )

Après l'écran on a donc:

$$S'(M,t) = S_e(M,t) + S_i(M,t) - S_t(M,t) = -S_t(M,t)$$

**Si le trou est tout petit**, la portion retirée rayonnait avant un **champ d'onde quasi-sphérique**.

Donc  $S'(M,t) = -S_t(M,t)$  est pratiquement un champ d'onde sphérique.

On retrouve ainsi ce que nous avons supposé sur les trous d'Young.

# Interprétation quantique

Impulsion d'un photon, quantum du champ  $\mathbf{E}\mathbf{M}\mathbf{p} = \hbar\vec{k} = \hbar(k_x\vec{e}_x + k_z\vec{e}_z)$   
 $= \hbar k(\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_z)$

Le trou dans l'écran permet de dire que la position du photon au niveau de l'écran était  $-a/2 < x < a/2 \rightarrow$  **L'incertitude sur la position est  $\Delta x \sim a$**

**Inégalité de Heisenberg:**

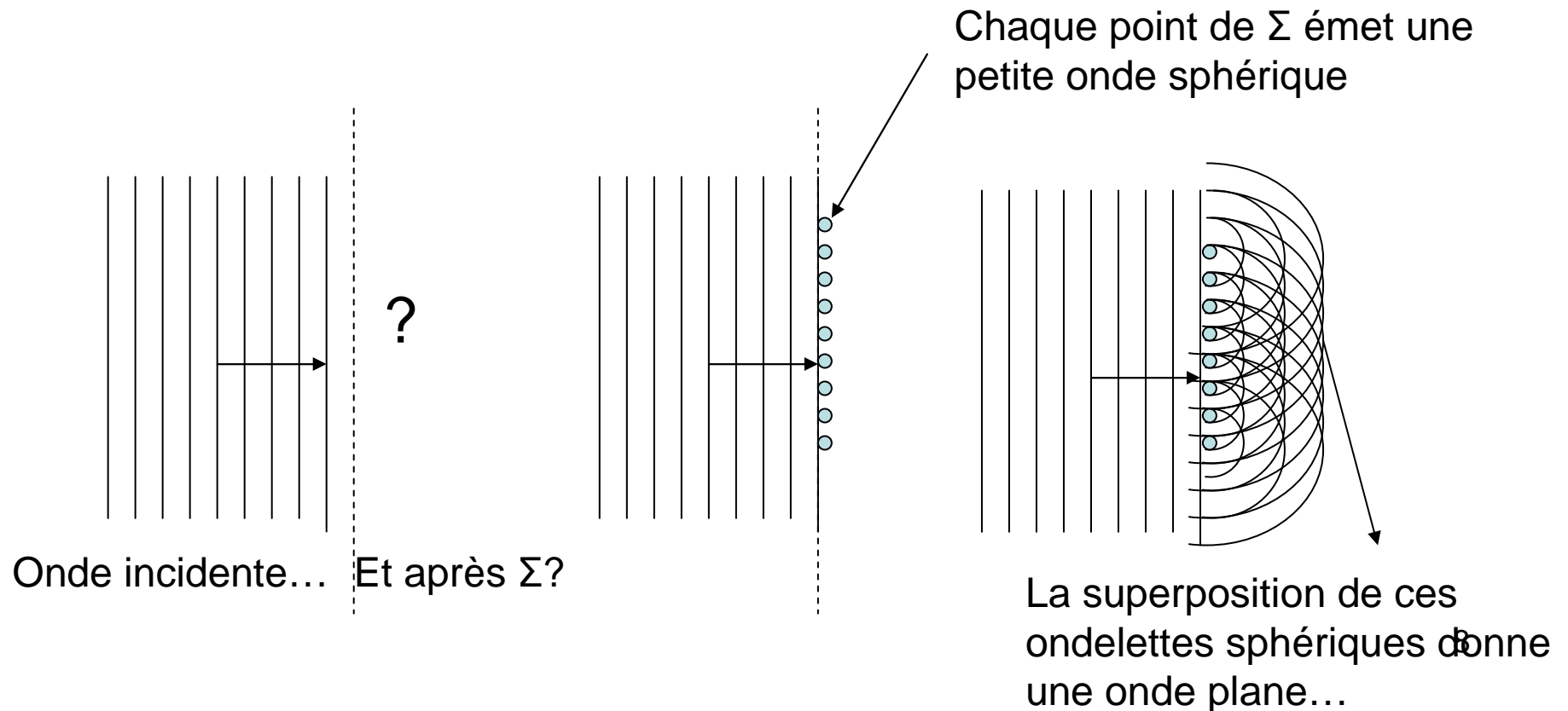
**Plus  $\Delta x$  (et donc  $a$ ) est petit, plus  $\Delta p_x$  est grand et plus l'incertitude sur  $\theta$  est grande  $\rightarrow$  plus la divergence de l'onde sortante sera grande.**

# 2 Principe de Huygens-Fresnel

# Interprétation « Mécanique »

Une onde se propage par ébranlement de proche en proche des points du milieu matériel (ou ici du champ).

Un point atteint par l'onde se met à vibrer et rayonne un champ d'onde sphérique. La vibration est proportionnelle à la perturbation incidente





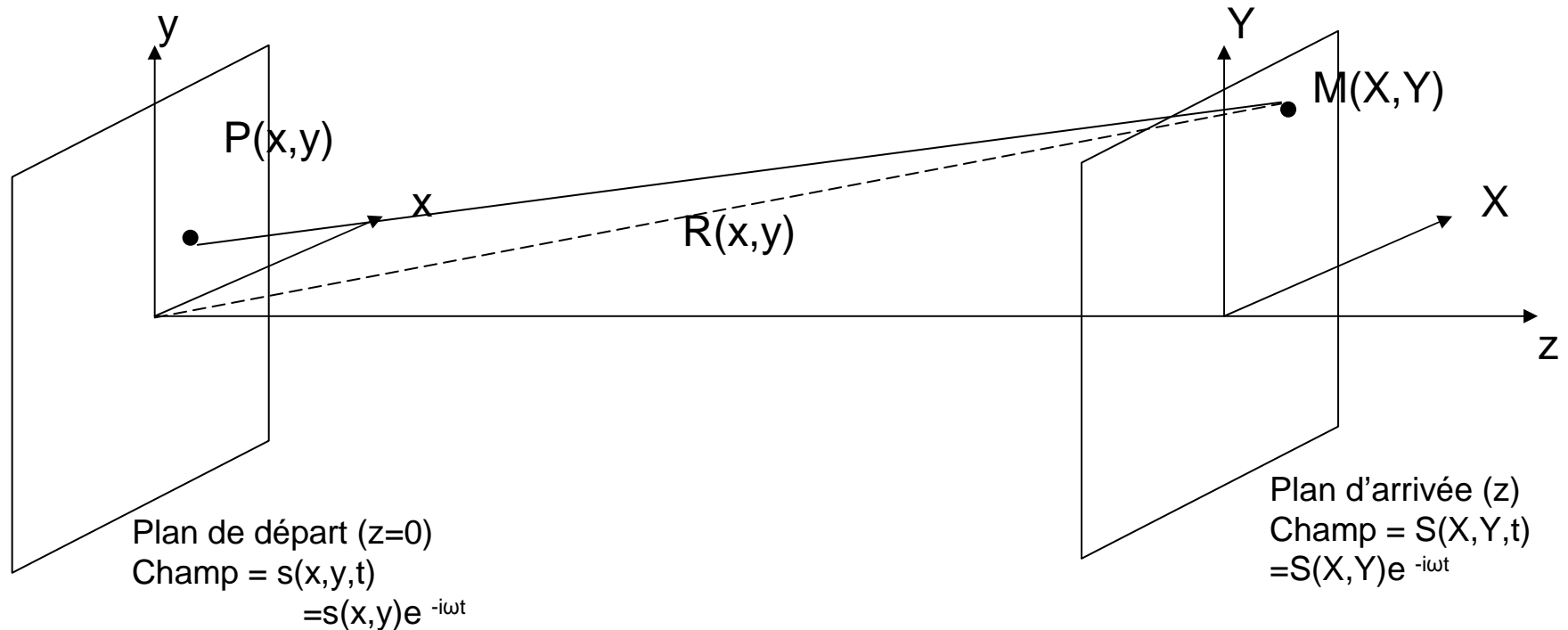
# Huygens-Fresnel: un « principe » ?

On peut montrer (avec beaucoup de mathématiques...) que ce « principe » découle en fait des équations de Maxwell.

Les équations de Maxwell sont des équations aux dérivées partielles, qui décrivent localement le comportement du champ.

On peut cependant les traduire sous une forme intégrale. Un exemple célèbre est le théorème de Gauss de l'électrostatique. Ce dernier fait intervenir l'intégrale d'un champ sur une surface.

# Principe de Huygens-Fresnel (Formulation Moderne)



Intégrale de Kirchhoff

$$S(X, Y) = \iint s(x, y) K \frac{e^{ikPM}}{PM} dx dy$$

Champ dans le plan de départ

K: Facteur de Kirchhoff, dépendant de l'inclinaison de PM par rapport à (Oz)

Champ en M d'une ondelette sphérique émise par P

# Interprétation

Si on connaît le champ dans un plan, on peut le déterminer dans un autre plan situé à la distance  $D \gg \lambda$

Le champ en  $M$  est la somme d'une infinité de champs élémentaires émis par les points  $P$  du plan de départ.

Ces champs élémentaires sont des ondelettes sphériques d'amplitudes complexes initiales proportionnelles à celles du champ en  $P$ .

# 3-Approximation de Fresnel et de Fraunhofer

# Approximation de Fresnel

- On suppose que  $z \gg X, Y, x, y > \lambda$  ALORS

Au dénominateur,  $PM \sim R \sim z$

- En revanche, dans le terme de phase on a:

$$PM = \sqrt{z^2 + (X - x)^2 + (Y - y)^2}$$

$$PM = \sqrt{z^2 + X^2 + Y^2 + x^2 + y^2 - 2Xx - 2Yy}$$

$$PM = \sqrt{R + x^2 + y^2 - 2Xx - 2Yy}$$

$$PM \approx R \left( 1 + \frac{(x^2 + y^2)}{2R^2} - \frac{(xX + yY)}{R^2} \right)$$

$$PM \approx R + \frac{(x^2 + y^2)}{2R} - \frac{(xX + yY)}{R}$$

# Approximation de Fresnel (Suite)

De plus  $K \approx \frac{i}{\lambda}$  (admis)

L'intégrale de Huygens Fresnel devient alors...

$$S(X, Y) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR}}{z} \iint s(x, y) e^{i \frac{k(x^2+y^2)}{2R}} e^{-i \frac{k(Xx+Yy)}{R}} dx dy$$

$R \sim z$  dans les conditions de Fresnel

## Intégrale de Fresnel

$$S(X, Y) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR}}{z} \iint s(x, y) e^{i \frac{k(x^2+y^2)}{2z}} e^{-i \frac{k(Xx+Yy)}{R}} dx dy$$

« terme ou noyau de Fresnel »

# Approximation de Fraunhofer

Situation dans laquelle le terme de Fresnel devient proche de 1, c'est à dire  
La phase de  $k(x^2+y^2)/2z \ll \pi$  (1/100<sup>ème</sup> par exemple)

$$\frac{x^2}{\lambda z}, \frac{y^2}{\lambda z} \ll 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Condition très drastique !!!}$$

Alors l'intégrale de Fresnel devient:

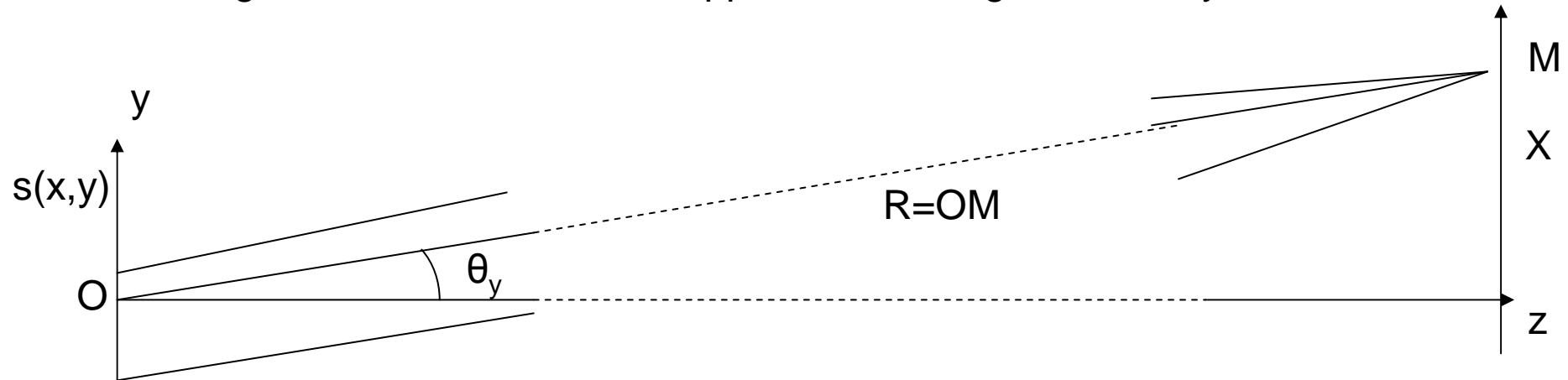
$$S(X, Y) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR}}{z} \iint s(x, y) e^{-i \frac{k(Xx+Yy)}{R}} dx dy$$

**Intégrale de Fraunhofer**

$$\frac{x^2}{\lambda z}, \frac{y^2}{\lambda z} \ll 1$$

## Diffraction de Fraunhofer comme diffraction à « l'infini »

Si  $R$  ou  $z$  tendent vers l'infini, le noyau de Fresnel tend vers 1. L'intégrale de Fraunhofer garde son sens si on fait apparaître les angles  $\theta_x$  et  $\theta_y$ .



On pose

$$u = \frac{X}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_x}{\lambda}$$

$$v = \frac{Y}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_y}{\lambda}$$

On obtient

$$S(u, v) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR}}{z} \iint s(x, y) e^{-i2\pi(xu + yv)} dx dy$$

**Intégrale de Fraunhofer**



# Importance de la diffraction de Fraunhofer (I)

Intérêt des coordonnées  $u, v$ :

1) Ne fait plus apparaître  $z$  et  $X$  mais un angle  $\rightarrow$  permet de décrire le comportement « à l'infini » car coordonnées indépendante de la distance.

2) La diffraction de Fraunhofer est souvent qualifiée de diffraction à l'infini.

On regarde la répartition de l'amplitude du champ diffracté

ANGULAIREMENT

3) Permet de faire apparaître l'intégrale de Fraunhofer comme la transformée de Fourier du champ  $s(x, y)$

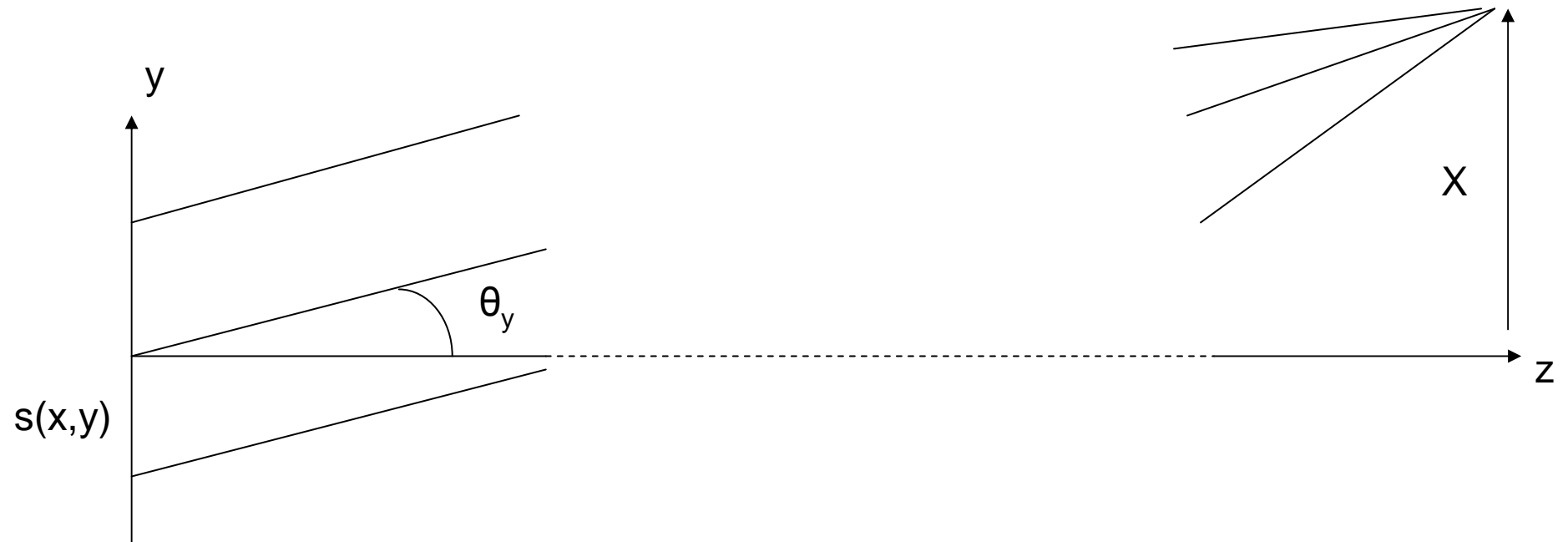
$$S(X, Y) = S(u, v) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR}}{z} \iint s(x, y) e^{-i2\pi(xu + yv)} dx dy$$

$$S(u, v) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR}}{z} TF(s)$$

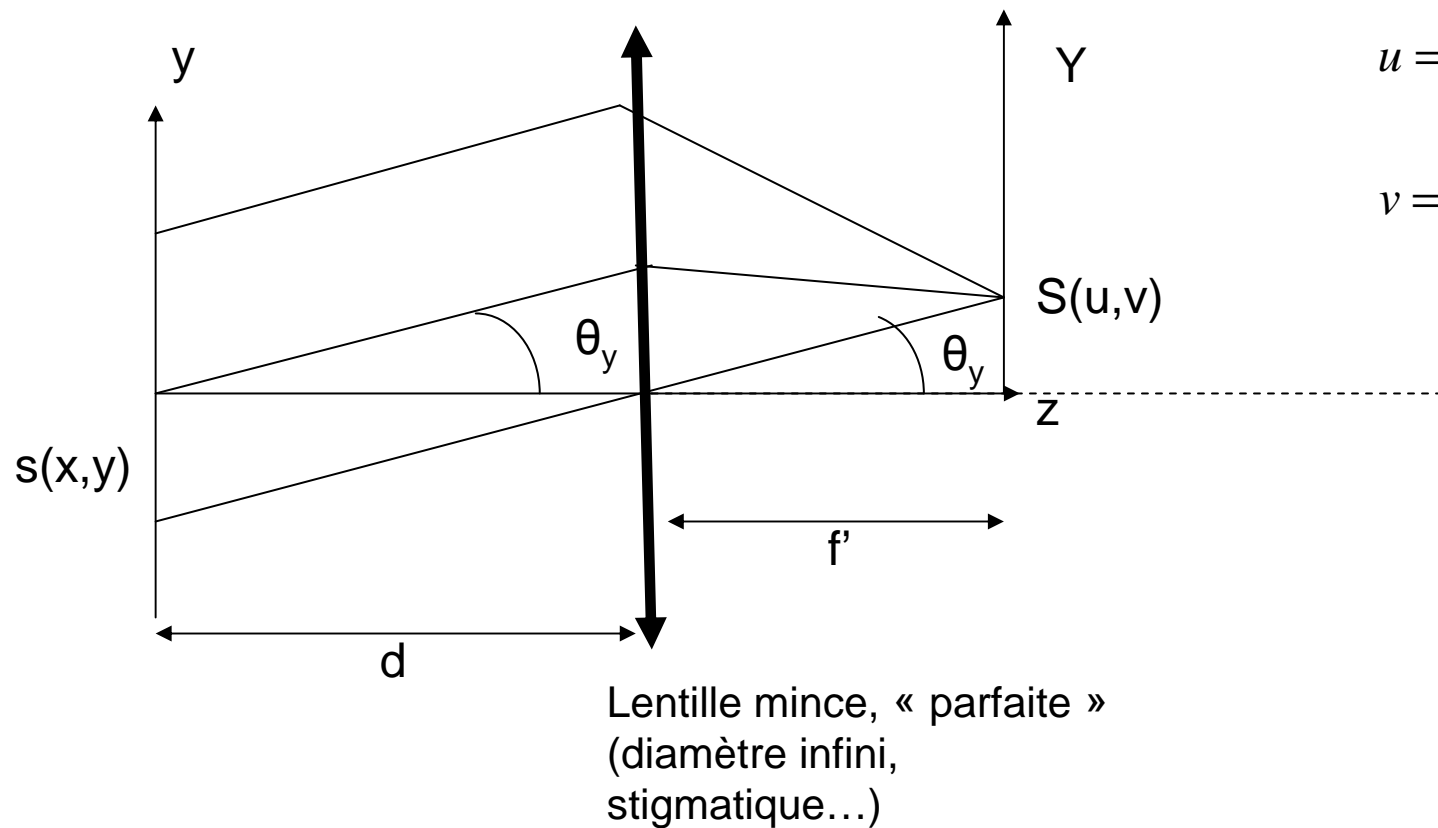
$$u = \frac{X}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_x}{\lambda}$$

$$v = \frac{Y}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_y}{\lambda}$$

# Approximation de Fraunhofer (III)

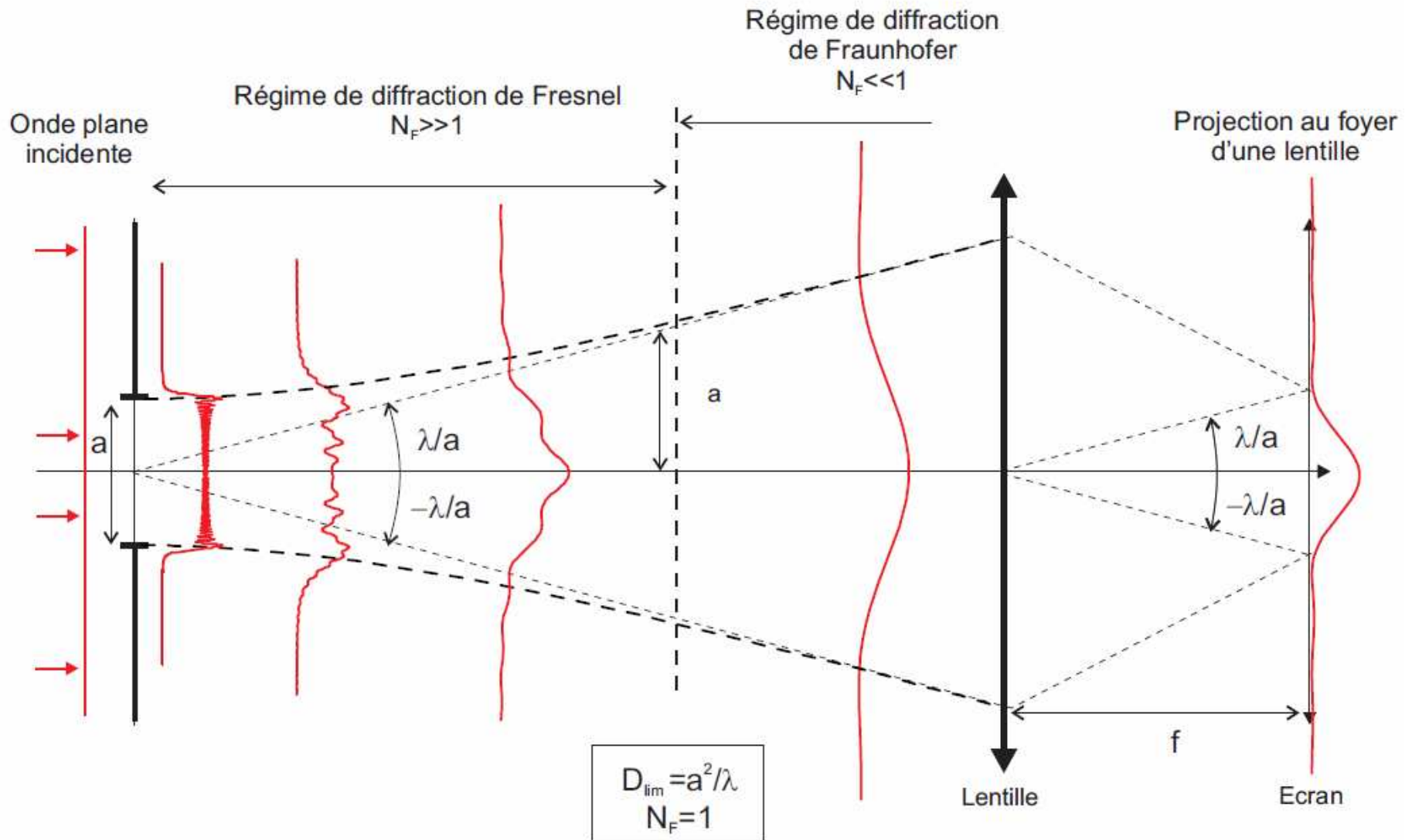


# Diffraction de Fraunhofer en pratique



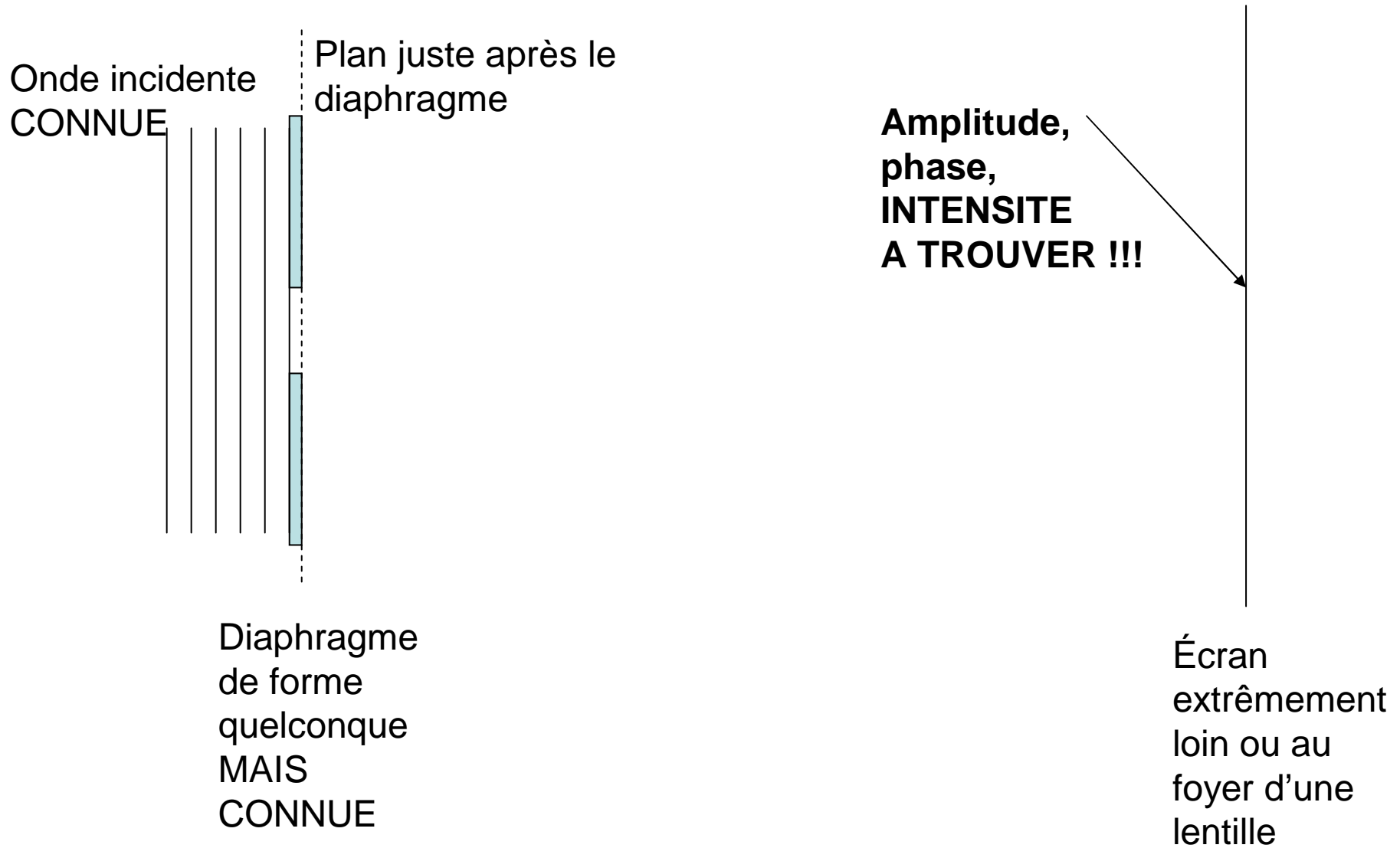
$$u = \frac{\sin \theta_X}{\lambda} \approx \frac{\theta_X}{\lambda} \approx \frac{X}{\lambda f'}$$
$$v = \frac{\sin \theta_Y}{\lambda} \approx \frac{\theta_Y}{\lambda} \approx \frac{Y}{\lambda f'}$$

# Bilan



# Calcul d'une figure de diffraction dans l'approximation de Fraunhofer

# Un problème concret...



# Résolution

1) On détermine  $s(x,y)$  le champ juste après le diaphragme

$$s(x,y) = t(x,y) s_i(x,y)$$

Où  $s_i(x,y)$  est le champ de l'onde incidente sur le plan du diaphragme,  
Et  $t(x,y)$  est la transmission en amplitude du diaphragme.

Exemples:      si  $t(x,y)=0$  , le diaphragme est opaque en  $x,y$ .  
                  si  $t(x,y)=1$ , le diaphragme est transparent en  $x,y$   
                  si  $|t(x,y)|<1$  le diaphragme est partiellement transparent en  $x,y$   
                  si  $t(x,y)$  est complexe, le diaphragme déphase l'onde incidente  
                  (fine plaque de verre..)

2) On calcule le champ diffracté sur l'écran en intégrant l'intégrale de Fraunhofer

$$S(u, v) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR}}{z} \iint s(x, y) e^{-i2\pi(xu+ yv)} dx dy$$

Avec

$$u = \frac{X}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_x}{\lambda} \quad v = \frac{Y}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_y}{\lambda}$$

# Utilisation des transformées de Fourier

On peut intégrer directement l'intégrale dans quelques cas simples.

Pour des cas plus complexes (et plus intéressants !) cela n'est pas possible.

Heureusement, l'arsenal mathématique des transformées de Fourier va nous aider.

$$S(u, v) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR}}{z} \iint s(x, y) e^{-i2\pi(xu + yv)} dx dy$$

$$S(u, v) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR}}{z} TF(s)$$

$$I(u, v) = |S(u, v)|^2 \propto |TF(s)|^2$$



## Rappel: propriétés des TF

### Définition (1D)

$$F(u) = TF(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi ux} dx$$

$$f(x) = TF^{-1}(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{i2\pi ux} du$$

### Propriétés

$$TF^{-1}(TF(f)) = f$$

Linéarité

$$TF(af(x) + bg(x)) = aF(u) + bG(u)$$

translation

$$TF(f(x-a)) = e^{-i2\pi au} F(u)$$

Similitude

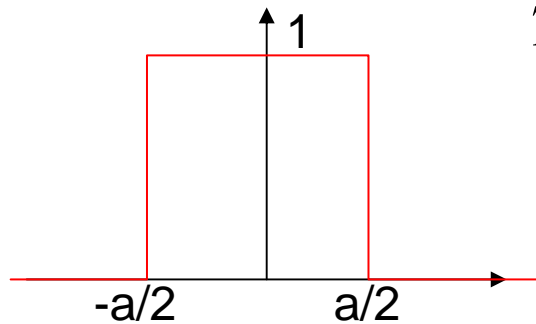
$$TF\left(f\left(\frac{x}{a}\right)\right) = aF(au)$$

TF d'une TF

$$TF(TF(f(x))) = f(-x)$$

# TF de fonctions de base

**Fonction rectangle (« rect(x) »)**



$$TF(\text{rect}(x/a)) = a \sin(\pi u a) / \pi u a = a \text{sinc}(\pi u a)$$

**Fonction gaussienne**

$$TF(\exp(-\pi x^2)) = \exp(-\pi u^2)$$

# TF à deux dimensions

$$F(u, v) = \iint f(x, y) e^{-i2\pi(xu + yv)} dx dy$$

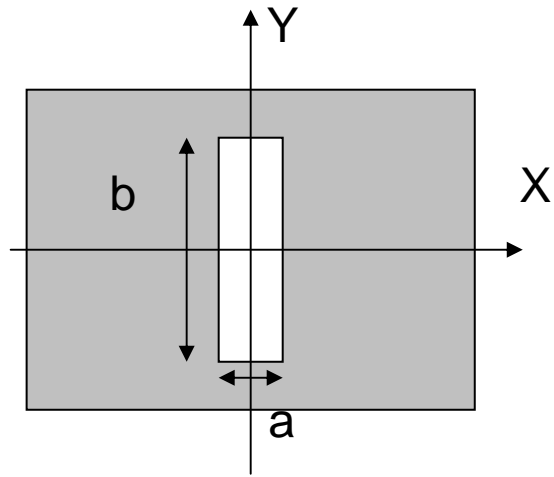
**Cas particulier important fonction  $f$  à variables séparées:**

:

**Alors:**  $f(x, y) = h(x)g(y)$

$$F(u, v) = H(u)G(v)$$

# Exemple 1: diffraction par une fente éclairée par une onde plane



$$s_i(x, y) = s_0 e^{ikz} = s_0 \quad (z = 0)$$

$$t(x, y) = \text{rect}(x/a) \text{rect}(y/b)$$

$$s(x, y) = t(x, y) s_i(x, y) = s_0$$

$$S(u, v) \propto TF(\text{rect}(x/a) \text{rect}(y/b))$$

$$S(u, v) \propto s_0 ab \text{sinc}(\pi au) \text{sinc}(\pi bv)$$

$$I(u, v) = |S(u, v)|^2 \\ = I_0 a^2 b^2 \text{sinc}^2(\pi au) \text{sinc}^2(\pi bv)$$

Intensité maximale si  $u=0$ ,  $v=0$ .

Intensité s'annule une première fois pour  $u=1/a$  et/ou  $v=1/b$

# Exemple 1: diffraction par une fente éclairée par une onde plane

Intensité maximale si  $u=0$ ,  $v=0$ .

Intensité s'annule une première fois pour  $u=1/a$  et/ou  $v=1/b$

Ceci correspond à des angles :

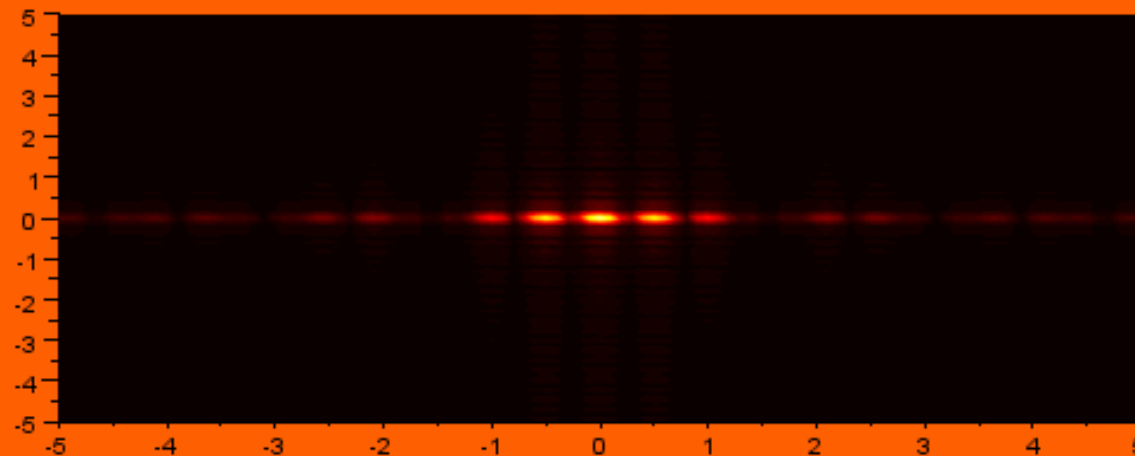
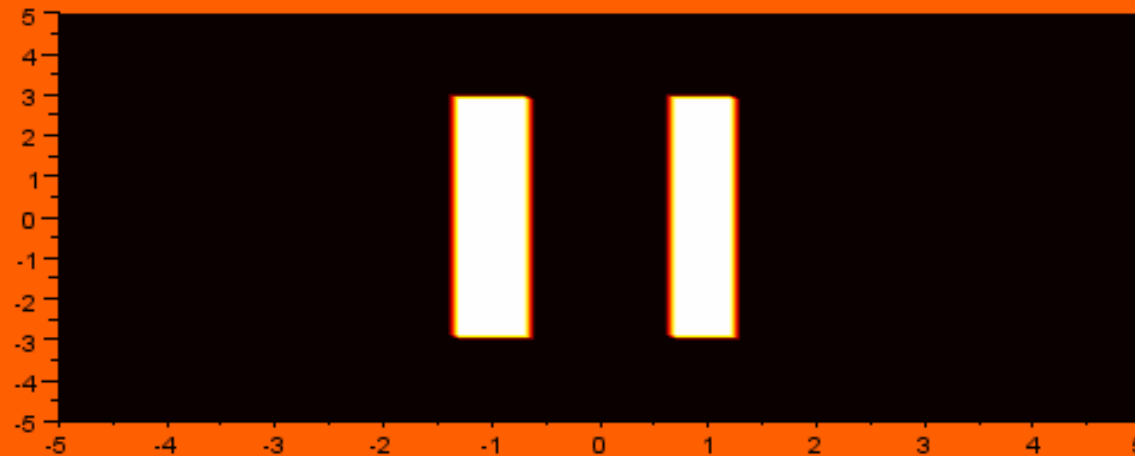
$$\sin \theta_x = \frac{\lambda}{a} \quad \sin \theta_y = \frac{\lambda}{b}$$

Si les angles sont petits, la divergence du faisceau vaut:

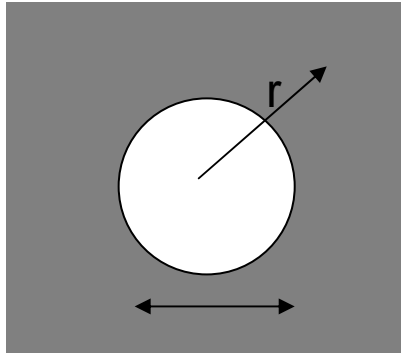
$$\Delta \theta_x \approx \frac{2\lambda}{a} \quad \Delta \theta_y \approx \frac{2\lambda}{b}$$

# TF 2D de deux fentes (cf TD)

Calcul effectué avec Scilab



# TF 2D d'un « trou circulaire »



2a

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{circ}(x, a) = 0 \quad r > a$$

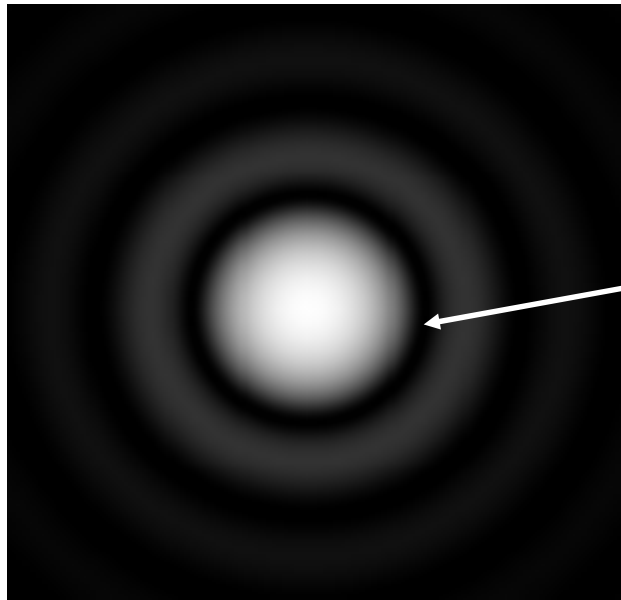
$$\text{circ}(x, a) = 1 \quad r < a$$

$$TF(\text{circ}(x, a)) = \frac{2J_1(2\pi a \rho)}{2\pi a \rho} \quad \rho = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$J_1$  : Fonction de Bessel

# TF 2D d'un « trou circulaire »

$$TF(\text{circ}(x, a)) = \frac{2J_1(2\pi a \rho)}{2\pi a \rho} \quad \rho = \sqrt{u^2 + v^2}$$



$$|TF(\text{circ}(x, a))|^2$$

$J_1$  : Fonction de Bessel

La fonction de Bessel s'annule en plusieurs points. Le premier zéro correspond à:

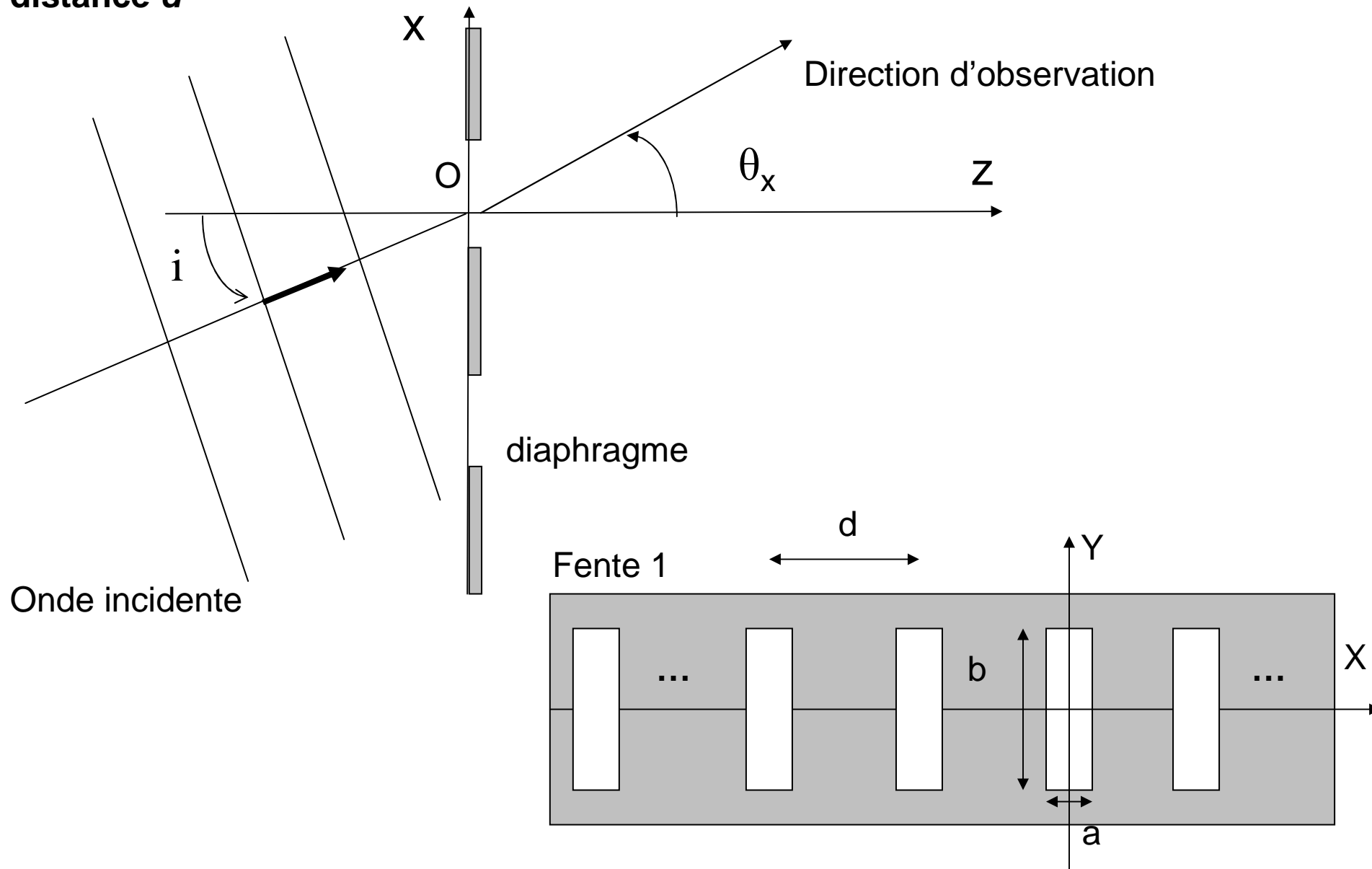
Position du premier zéro :  $\rho = 1.22/2a$

**Angle correspondant au premier zéro:  
 $\Theta = 1.22\lambda/2a$**



## Application: le réseau de diffraction (voir TD)

Succession de  $N$  fentes identiques parallèles entre elles et séparées de la même distance  $d$



# Application: le réseau de diffraction (voir TD)

- Succession de  $N$  fentes identiques parallèles entre elles et séparées de la même distance  $d$
- Formellement: interférences à  $N$  ondes
- Peut être traité totalement à l'aide de la diffraction

**Pics d'intensité (Interférences constructives) dans les directions telles que:**

$$\sin \theta_x - \sin i = p\lambda / d = PN\lambda$$

Direction incidente

Nombre de fentes par  
unité de longueur

# Application: le réseau de diffraction (voir TD)

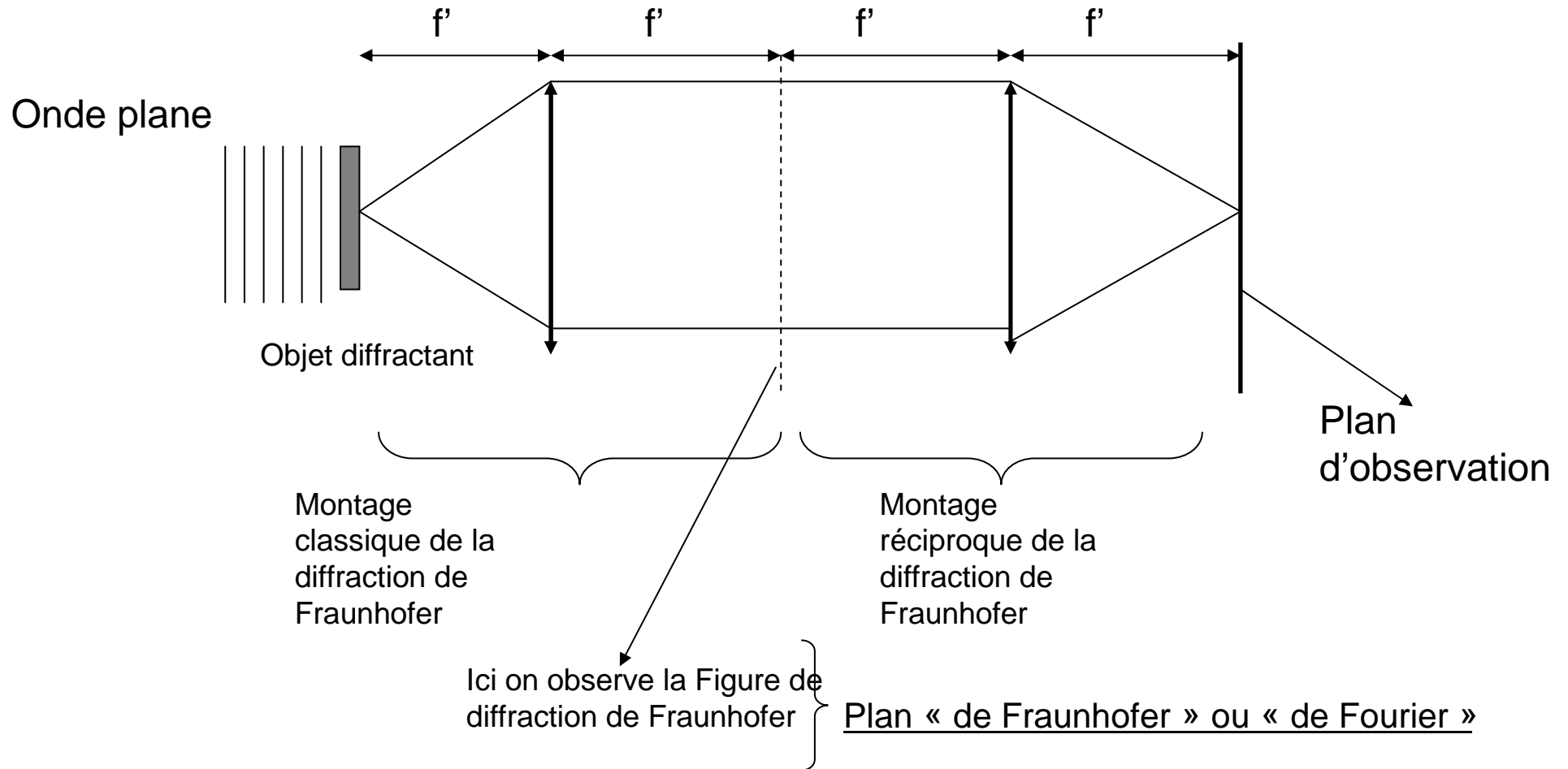
**La direction du pic d'intensité dépend de la longueur d'onde →  
Un réseau disperse la lumière**

- Ce phénomène est à l'origine de l'irisation des disques CD**
- Spectroscopes à réseaux**
- manipulation d'impulsions lasers courtes**

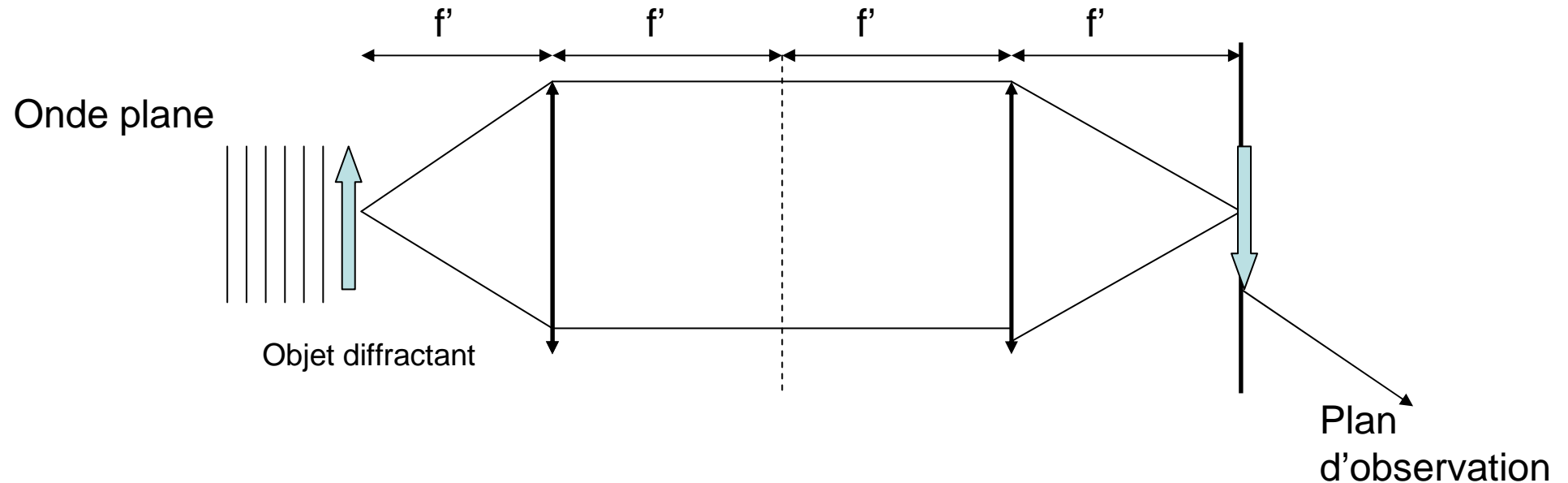
**Les spectroscopes à réseau sont utilisés pour détecter les exoplanètes par effet Doppler.**

# Filtrage spatial en lumière cohérente

# Montage conceptuel



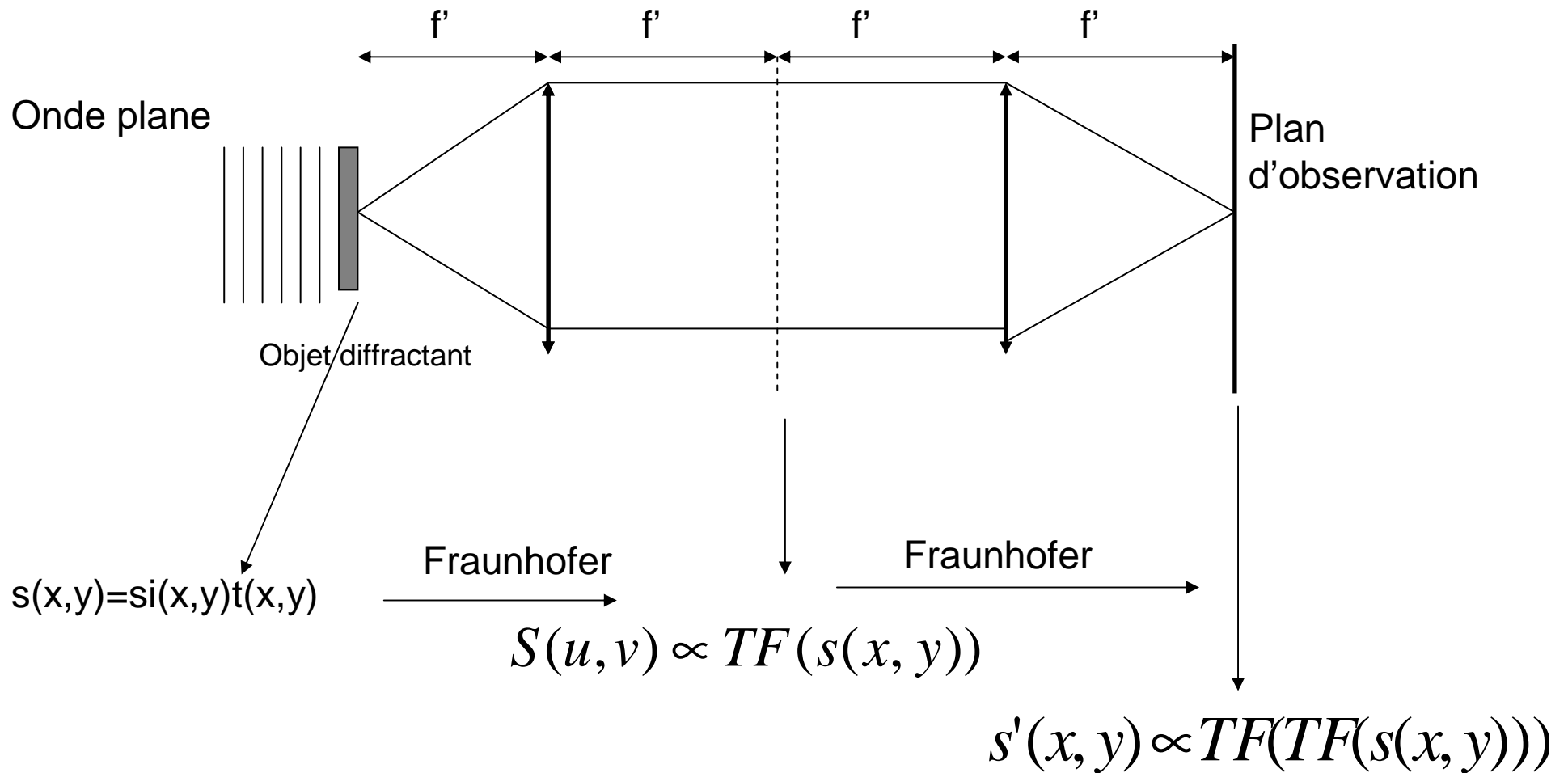
# Point de vue géométrique



**L'optique géométrique prévoit que le plan d'observation est le plan image du plan de sortie de l'objet diffractant.**

L'image à la même taille que l'objet, mais apparaîtra renversée.

# Point de vue ondulatoire



Le champ dans le plan d'observation est bien similaire à celui du plan objet et renversé!

$$\leftarrow s'(x,y) \propto s(-x,-y)$$

# Illustration sur un exemple simple

**Objet diffractant de transmission sinusoidale et limité par une fente**

**Transmission de l'objet modulée par une fréquence spatiale  $1/\Lambda$**

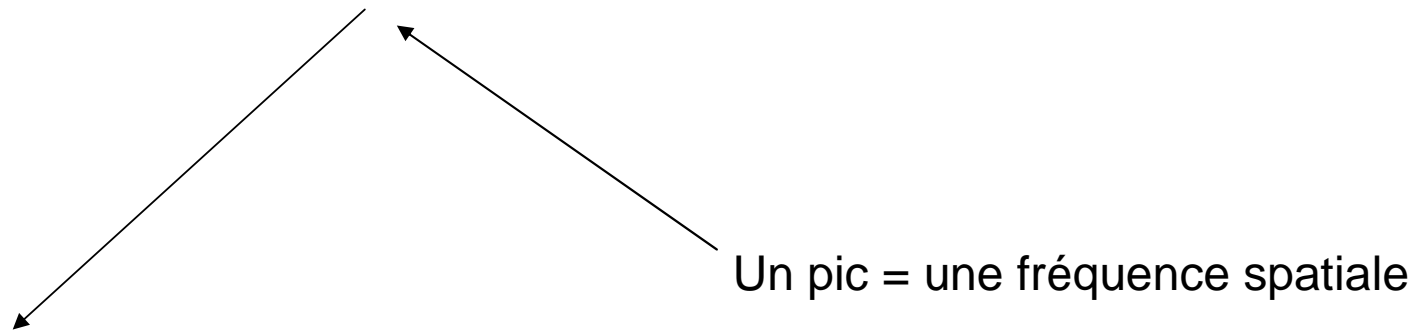
$$t(x) = \frac{1}{2} \text{rect}(x/a) (1 + \cos(2\pi x/\Lambda))$$

$$t(x) = \frac{1}{2} \text{rect}(x/a) + \frac{1}{2} \text{rect}(x/a) \exp(i 2\pi x/\Lambda) + \frac{1}{2} \text{rect}(x/a) \exp(-i 2\pi x/\Lambda)$$

Amplitude du champ diffracté dans le plan de Fourier (diffraction de Fraunhofer)

$$S(u) = TF(s_i t(x))$$

$$S(u) = \frac{1}{2} s_0 (\sin c(\pi a u) + \sin c(\pi a (u - 1/\Lambda)) + \sin c(\pi a (u + 1/\Lambda)))$$

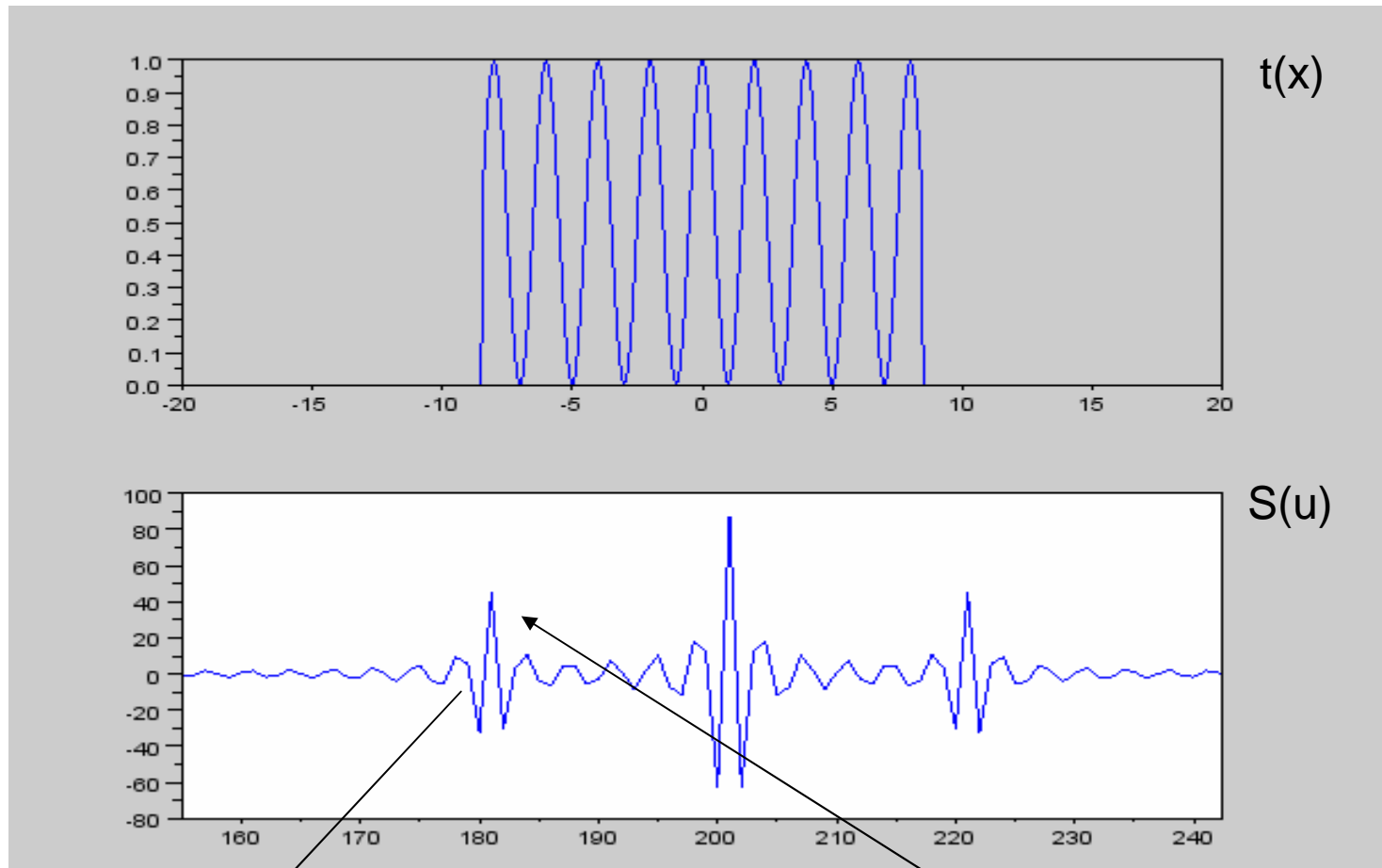


Chaque pic est convolué par un sinus cardinal (effet de  $\text{rect}(x/a)$ )



# Illustration sur un exemple simple

*Objet diffractant de transmission sinusoidale et limité par une fente*



Un pic = une fréquence spatiale  $q_1$

Chaque pic est convolué par un sinus cardinal (dimension finie de l'objet)

# Généralisation: signification du signal dans le plan de Fourier

$$S(u, v) \propto \iint s(x, y) e^{-i2\pi(xu + yv)} dx dy$$

Dans cette intégrale de Fourier, u et v ont le caractère de fréquences spatiales

**S(u,v) donne le contenu en fréquences spatiales du « signal » s(x,y).**

**Plus s(x,y) contient de détails à petite échelle, plus il est composé de signaux hautes fréquences.**

**→ S(u,v) aura alors une valeur importantes pour u et v loin de zéro.**

# Principe du filtrage spatial

$S(u,v)$  donne le contenu en fréquences spatiales du « signal »  $s(x,y)$ .

→ On va modifier le signal dans le plan de Fourier afin de modifier l'image

→ Il suffit pour cela de placer un diaphragme  $t_F(u,v)$  dans le plan de Fourier

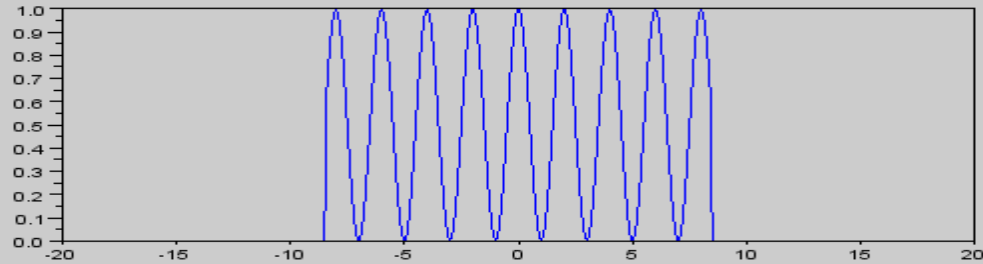
→  $S'(u,v) = t_F(u,v) S(u,v)$

→ Comme dans un filtre en électronique, on peut ainsi sélectionner/éliminer certaines fréquences.

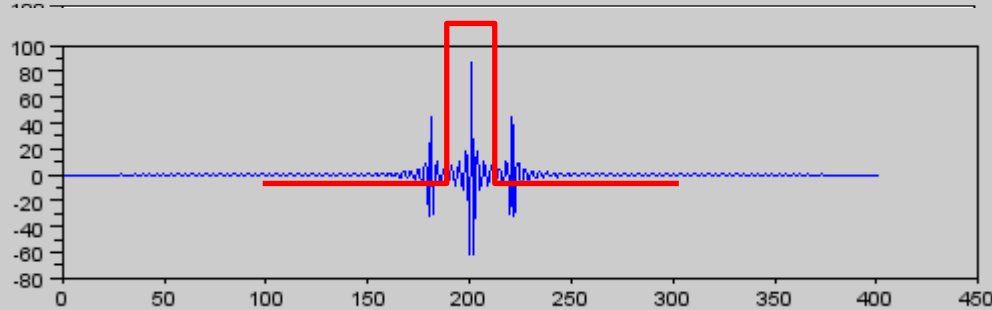
→ Si  $t_F(u,v)$  est faible pour les valeurs de  $u$  et  $v$  grandes, on parle de filtre passe bas...etc..;

→ On peut alors éliminer ou renforcer certains détails de l'image

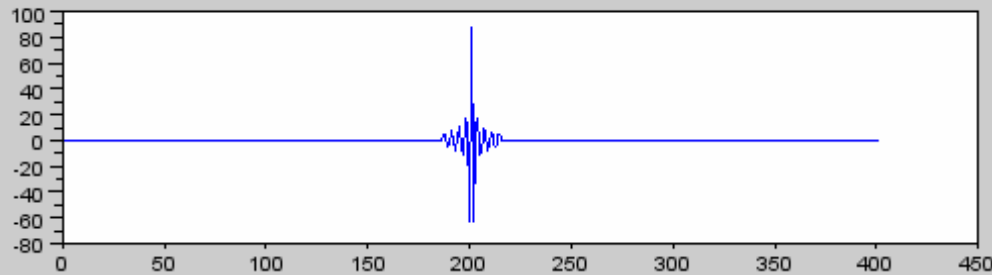
# Exemple 1D



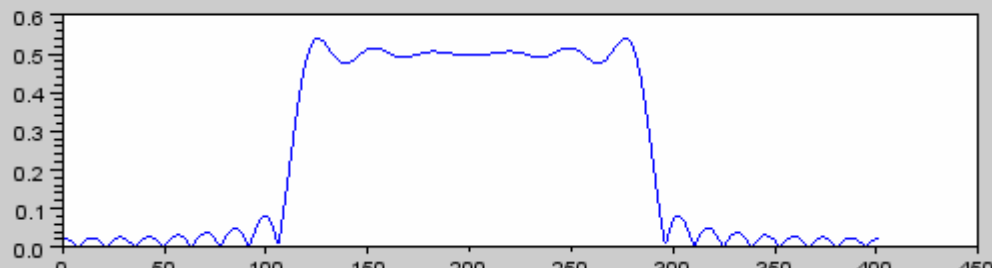
Amplitude du champ au niveau de l'objet



Diffraction de Fraunhofer sans filtrage



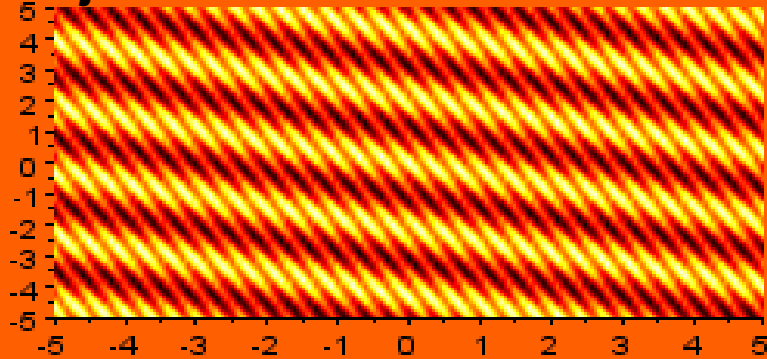
Diffraction de Fraunhofer après filtrage par une fente



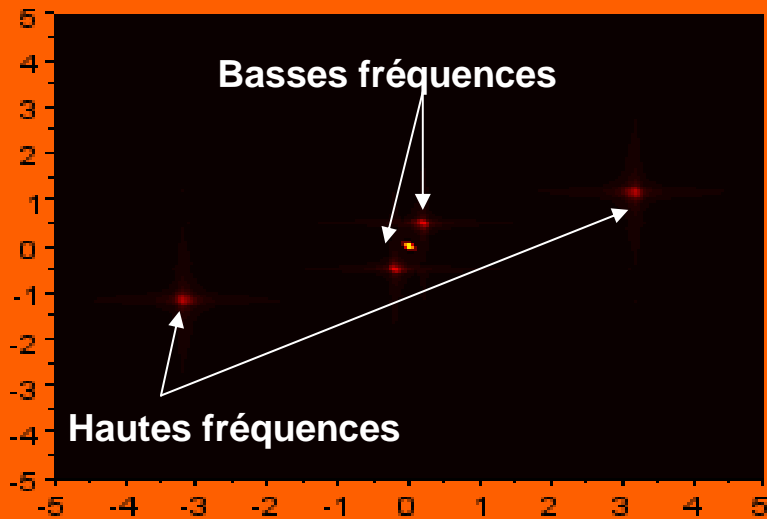
Intensité dans le plan image  
=> La modulation sinusoidale a disparue !!! Il reste les fréquences spatiales basses

# Exemple 2D

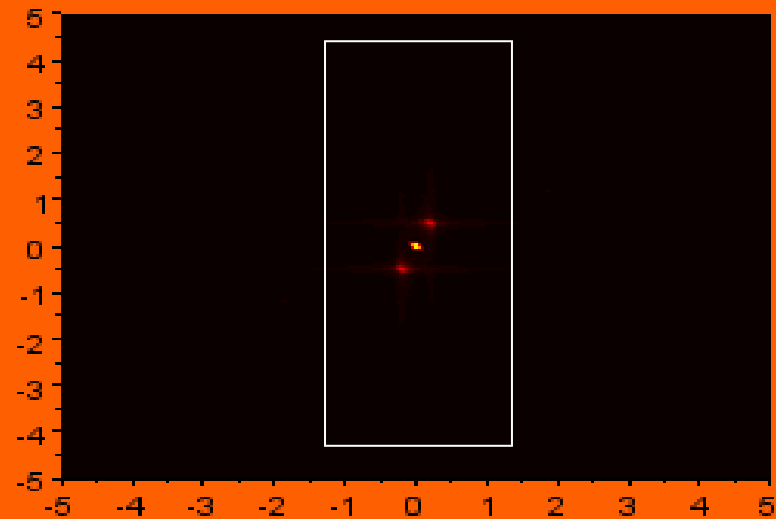
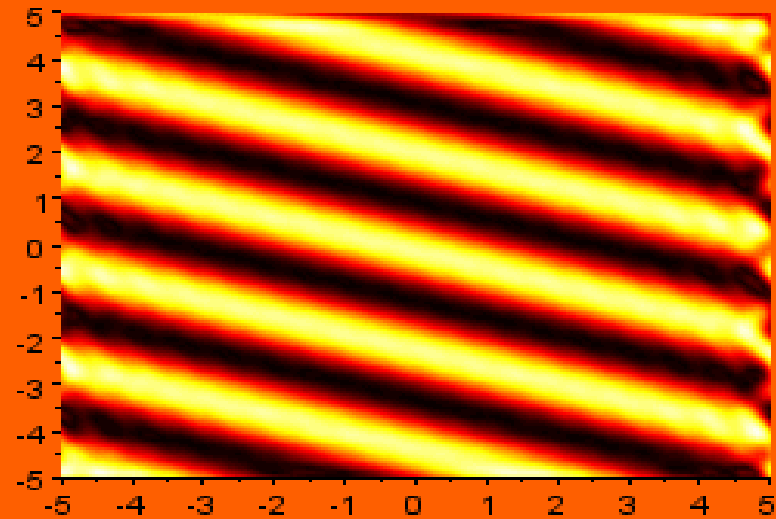
1) Objet initial



2) Diffraction dans le plan de Fourier



4) Image finale



# Strioscopie

Certains objets sont transparents et se contentent de déphaser la lumière (cellules...)

$$t(x, y) = e^{i\phi(x, y)}$$

L'intensité de l'image d'un tel objet est uniforme → on ne voit aucun détail !

Supposons que  $\phi(x, y) \ll 1$  alors:  $t(x, y) = e^{i\phi(x, y)} \approx 1 + i\phi(x, y)$

Et dans le plan de Fourier on a:  $TF(t) \approx \delta(u, v) + i\tilde{\phi}(u, v)$

Si on place un petit diaphragme près du centre, on élimine la fonction  $\delta$  !

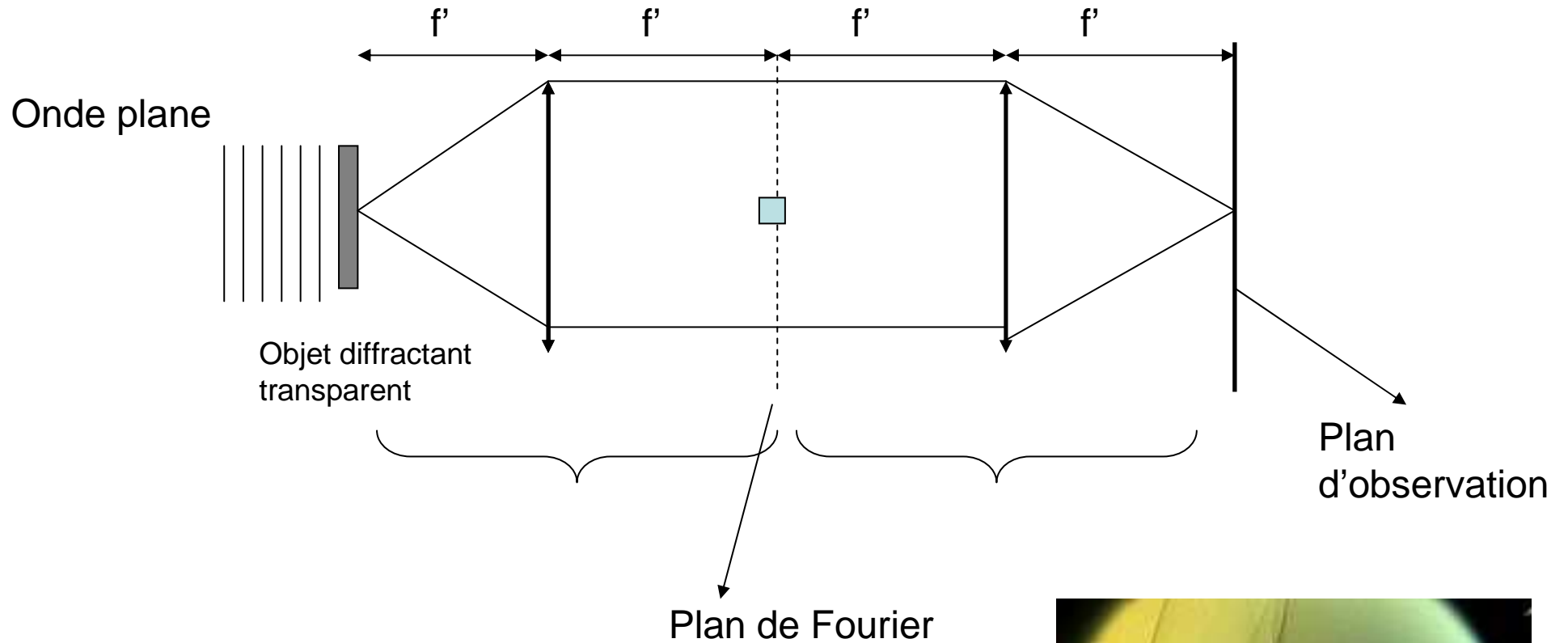
Le champ dans le plan image est alors :  $S(x, y) \approx i\phi(x, y)$

Et l'intensité dans le plan image:  $I(x, y) \approx \phi^2(x, y)$

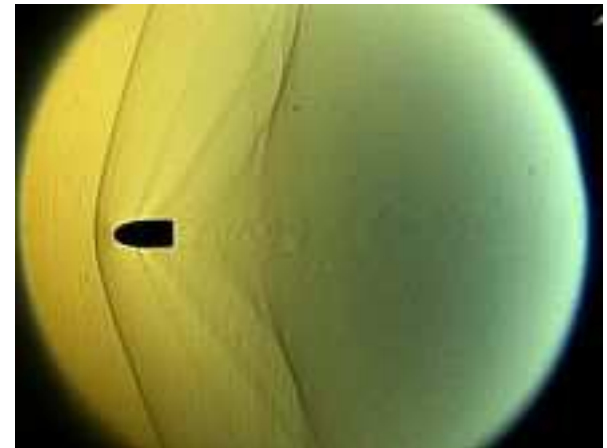
Les variations de phase (épaisseur, indice...) deviennent visibles !!!

Mais on ne « voit » pas le signe de  $\phi(x, y)$ ...

# Strioscopie



Ondes de choc produites par une balle de fusil se déplaçant dans l'air observées par strioscopie




# Contraste de phase

Analogue à la strioscopie mais cette fois, on déphase de  $\pi/2$  la fonction  $\delta$  au lieu de la supprimer

$$t(x, y) = e^{i\phi(x, y)} \approx 1 + i\phi(x, y)$$

Contraste  
de phase


$$TF(t) \approx \delta(u, v) + i\tilde{\phi}(u, v)$$

$$c(u, v)TF(t) \approx i\delta(u, v) + i\tilde{\phi}(u, v)$$

Champ dans le  
plan image

$$S(x, y) \approx i(1 + \phi(x, y))$$

Intensité dans le  
plan image

$$I(x, y) \approx 1 + 2\phi(x, y) + \phi^2(x, y) \approx 1 + 2\phi(x, y)$$

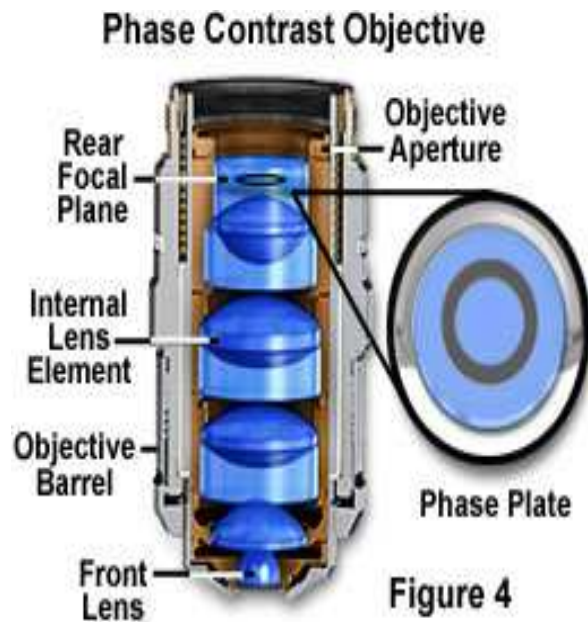
On est cette fois sensible au signe de la phase





# Concrètement...

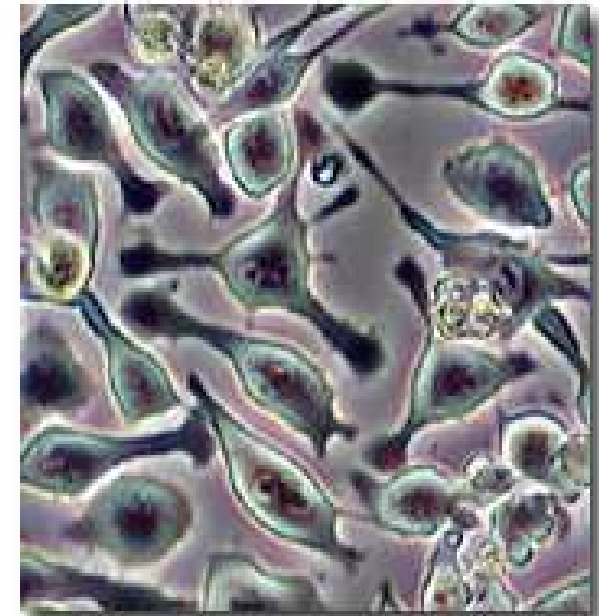
## microscopie à contraste de phase



Living Cells in Brightfield and Phase Contrast



(a)



(b)

Figure 2

L'opération de filtrage spatial se fait dans l'objectif de microscope

Microscopie classique

Microscopie à contraste de phase

# Formation des images et diffraction

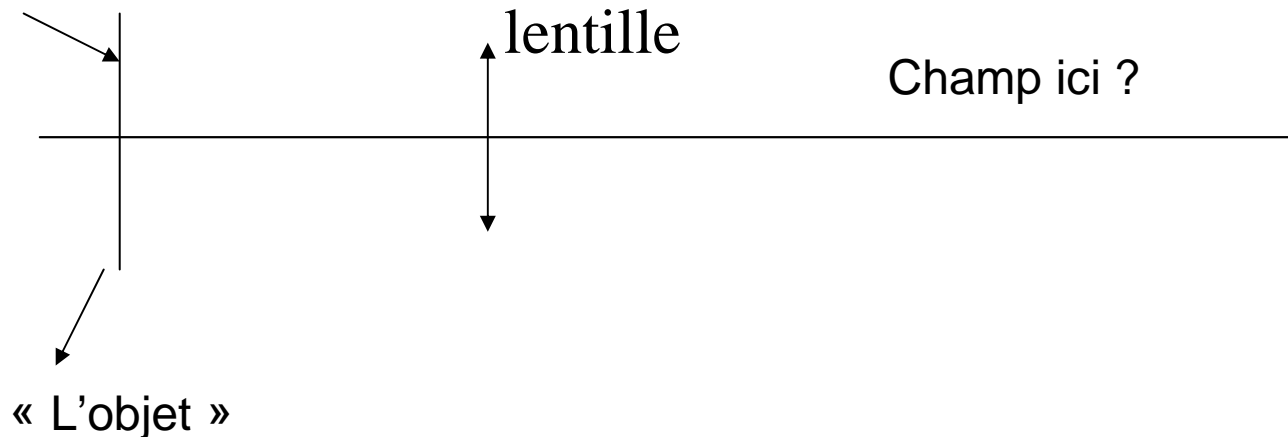
# Notre objectif

Peut-on généraliser la notion de diffraction à des situation où la lumière passe par un système optique ? (lentilles...)

Peut-on reformuler la notion d'image de l'optique géométrique dans le contexte des ondes?

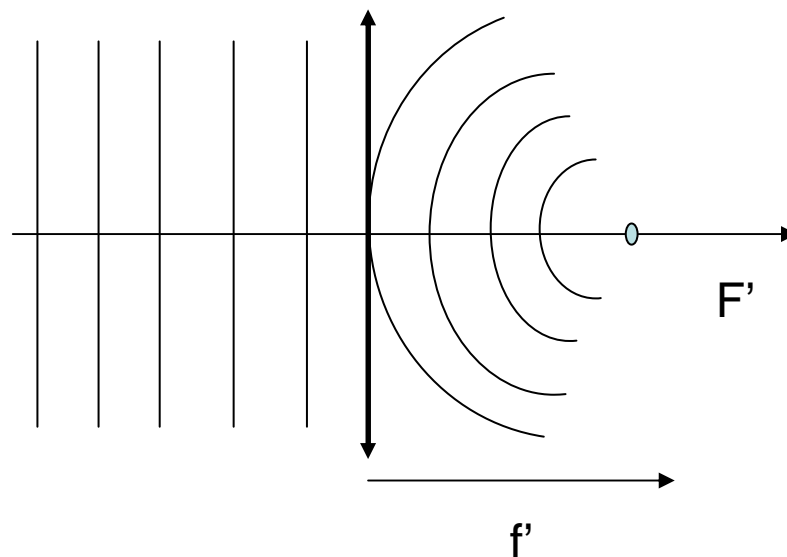
Intérêt pratique: les optiques doivent se comporter comme des diaphragmes à cause de leur taille finie. Conséquences sur les performances d'un système d'imagerie ?

Champ connu dans ce plan



# Lentille « parfaite »

Lentille infiniment grande et fonctionnant dans les conditions de Gauss.  
Elle transforme une onde incidente plane en une onde sphérique convergent vers le foyer  $F'$

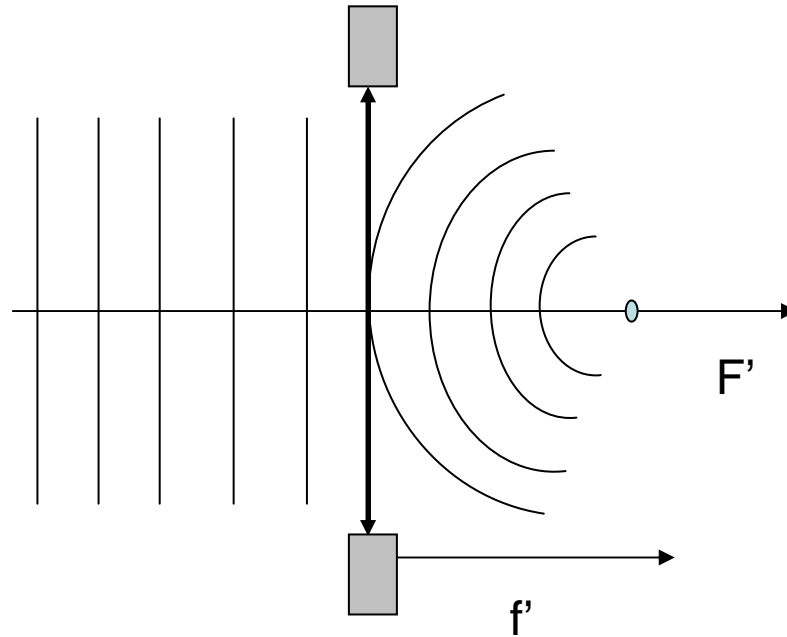


La lentille est équivalente à un « diaphragme » purement déphasant qui transforme une onde plane en une onde sphérique convergent en  $f'$ . La transmission de la lentille est formellement égale à:

$$t_L(x, y) = e^{-ik(x^2 + y^2)/2f'}$$

# Lentille de diamètre fini

En réalité, la lentille a un certain diamètre d'entrée (une certaine pupille)

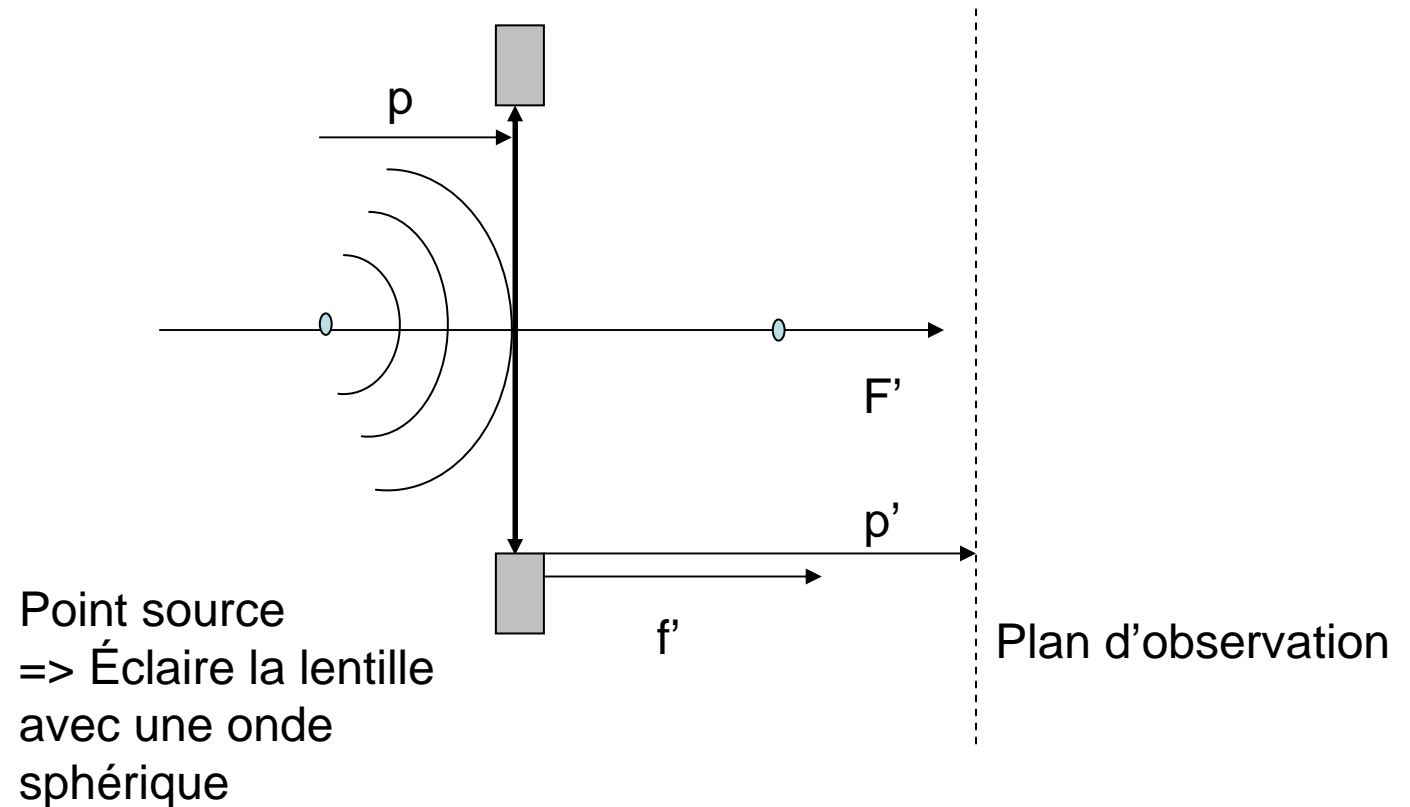


On peut modéliser cette pupille par un diaphragme de transmission  $t_o(x,y)$

Exemple:

$$t_o(x,y) = \text{circ}(r,a)$$

# Champ produit par un point source image



Pour calculer le champ dans le plan d'observation, on va utiliser le principe de Huygens Fresnel:

- 1) on calcule le champ juste après la lentille
  - 2) on intègre l'intégrale de Fresnel pour obtenir le champ dans le plan d'observation.
- Ici, fraunhofer n'est a priori pas valable ! (diffraction à distance finie)

## Champ produit par un point source objet

Intégrale de Fresnel  $S(X, Y) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR}}{z} \iint s(x, y) e^{i \frac{k(x^2+y^2)}{2z}} e^{-i \frac{k(Xx+Yy)}{R}} dx dy$

Ici  $z=p'$   $S(X, Y) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR}}{p'} \iint s(x, y) e^{i \frac{k(x^2+y^2)}{2p'}} e^{-i(2\pi ux+2\pi vy)} dx dy$

On fait par ailleurs apparaître la partie « Fraunhofer »

On calcule  $s(x, y)$   $\left\{ \begin{array}{l} s(x, y) = t(x, y) s_i(x, y) \\ s_i(x, y) = \frac{s_0}{p} e^{ikr} \approx \frac{s_0}{p} e^{ikp + ik \frac{(x^2+y^2)}{2p}} \\ t(x, y) = t_o(x, y) t_L(x, y) \\ t(x, y) = t_o(x, y) e^{-ik \frac{(x^2+y^2)}{2f'}} \end{array} \right.$  Onde sphérique incidente

On obtient...  $S(X, Y) = \frac{i}{\lambda} \frac{s_0 e^{ik(p+p')}}{p' p} \iint t_o(x, y) e^{i \frac{k(x^2+y^2)}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} - \frac{1}{f'} \right)} e^{-i(2\pi ux+2\pi vy)} dx dy$

**Très compliqué...sauf si...**

## Champ produit par un point source objet

Très compliqué...sauf si...  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} - \frac{1}{f'} = 0$

$$S(X, Y) = \frac{i}{\lambda} \frac{s_0 e^{ik(p+p')}}{p' p} \iint t_o(x, y) e^{-i(2\pi ux + 2\pi vy)} dx dy$$

$$S(X, Y) \propto \iint t_o(x, y) e^{-i(2\pi ux + 2\pi vy)} dx dy$$

**→ Dans ces conditions: la figure de diffraction produite dans le plan d'observation est alors simplement la figure de diffraction de Fraunhofer de la pupille de la lentille  $t_o(x,y)$**



# Champ produit par un point source objet

A quoi correspond le plan d'observation tel que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} - \frac{1}{f'} = 0$$

Ou encore avec des notations algébriques:

$$\frac{1}{\bar{p}'} - \frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{f'}$$

**C'est la relation de conjugaison de l'optique géométrique!!!**

**Le plan d'observation est dans ces conditions le plan image!**

- A cause de la diffraction , l'image d'un point est une tache lumineuse
- Dans le plan image, la figure de diffraction d'un point objet est la figure de diffraction de Fraunhofer de la pupille de la lentille  $t_o(x,y)$ .
- Plus la pupille est petite, plus la tache sera grande!

## Conclusion: limite de diffraction

La résolution d'un système d'imagerie est liée à la taille de la tache de diffraction produite par un point source.

Si deux points objets sont trop proches, leurs taches de diffraction peuvent se chevaucher → on ne peut pas les discerner sur l'image.

La taille de la tache lumineuse produite par un point est :

$$\delta' \propto \frac{\lambda p'}{a}$$

Où  $a$  est le diamètre de l'optique

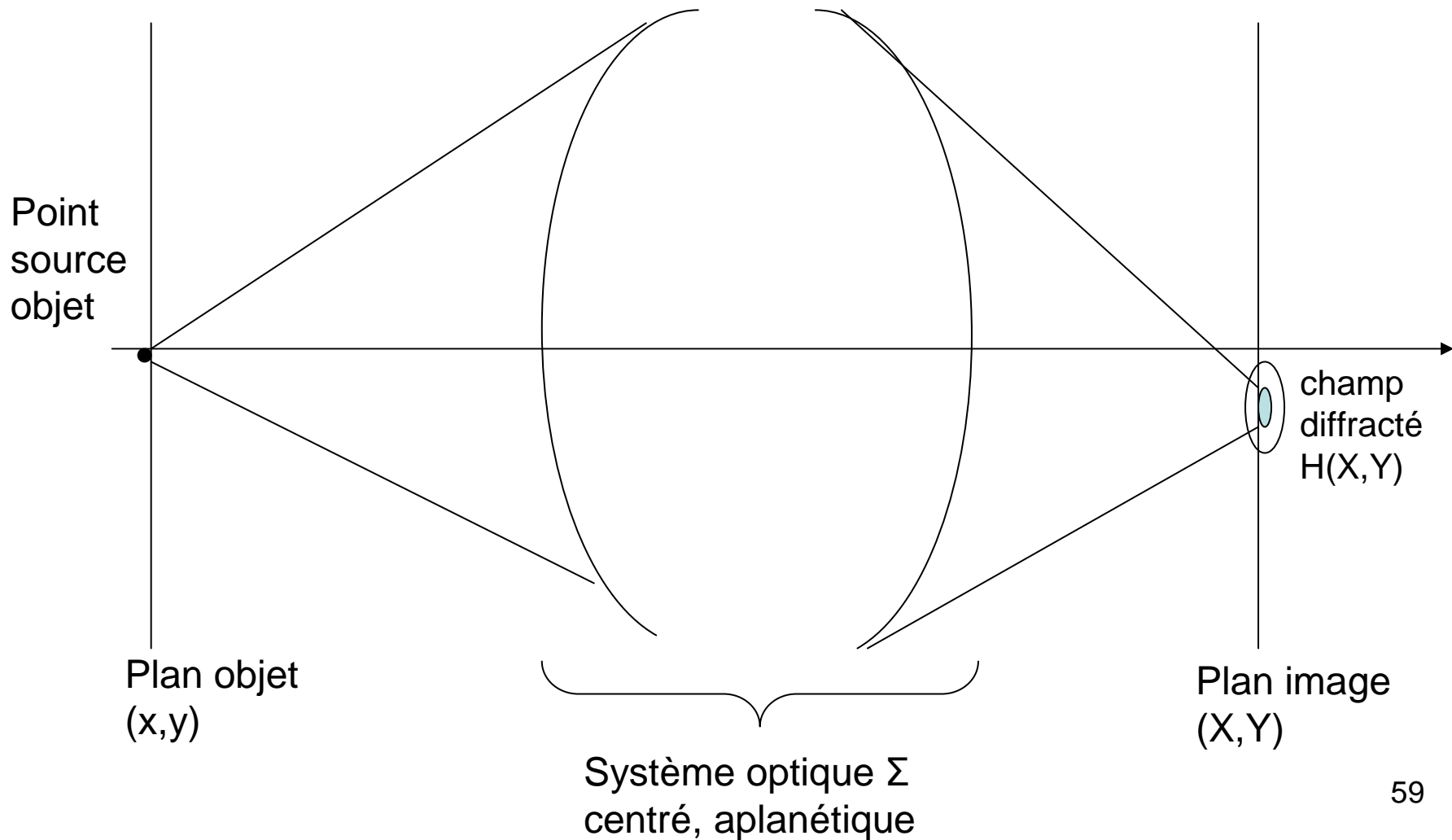
**Pour pouvoir résoudre deux points objets, il faut que la distance entre eux soit supérieure à**

$$\delta = \frac{p}{p'} \delta' \propto \frac{\lambda p}{a} \propto \frac{\lambda}{N.A.}$$

→ Ouverture numérique du système d'imagerie

# Généralisation à toute une image: Notion de réponse impulsionnelle

En anglais: *PSF* ou *Point Spread Function*



# Rappel mathématique I: Distribution de Dirac

**Propriétés**

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \text{rect}(x/\varepsilon)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-x) dt$$

**Transformée de Fourier**

$$TF(1) = \delta(u)$$

$$TF(e^{i2\pi ax}) = \delta(u-a)$$

$$TF(\delta(x)) = 1$$

$$TF(\delta(x-a)) = e^{-i2\pi ua}$$

# Rappel mathématique 2: Le produit de convolution

**Définition** 
$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')g(x-x')dx' = f * g = g * f$$

**Propriété** 
$$TF(h) = TF(f)TF(g)$$

**Remarque utile:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\delta(x-x')dx' = f(x) = f * \delta$$

# Notion de réponse impulsionnelle

Quel est le champ dans le plan image généré par un point source objet ?

Point objet en  $(x=0,y=0)$   $\xrightarrow{\text{Système } \Sigma}$  Tache de diffraction  
dont le champ est  $H(X,Y)$

*Si le système est aplanétique:*

Point objet en  $(x=x_0,y=y_0)$   $\xrightarrow{\text{Système } \Sigma}$  Tache de diffraction  
dont le champ est  $H(X-\gamma x_0, Y-\gamma y_0)$   
avec  $\gamma$  le grandissement

## **Modélisation du champ du point objet:**

Champ de taille infiniment petite et donc d'intensité infiniment grande (sa puissance reste finie)

→ fonction de Dirac :  $\delta(x-x_0,y-y_0)$

# Intérêt de la réponse impulsionnelle

**Si on connaît le champ dans le plan image (« la tache de diffraction ») produit par un point source, on peut le connaître pour un objet plus complexe formé par une grande quantité de points sources.**

Formellement on a:

$$G(X, Y) = \iint s(x, y) H(X - \gamma x, Y - \gamma y) dx dy$$

Produit de convolution

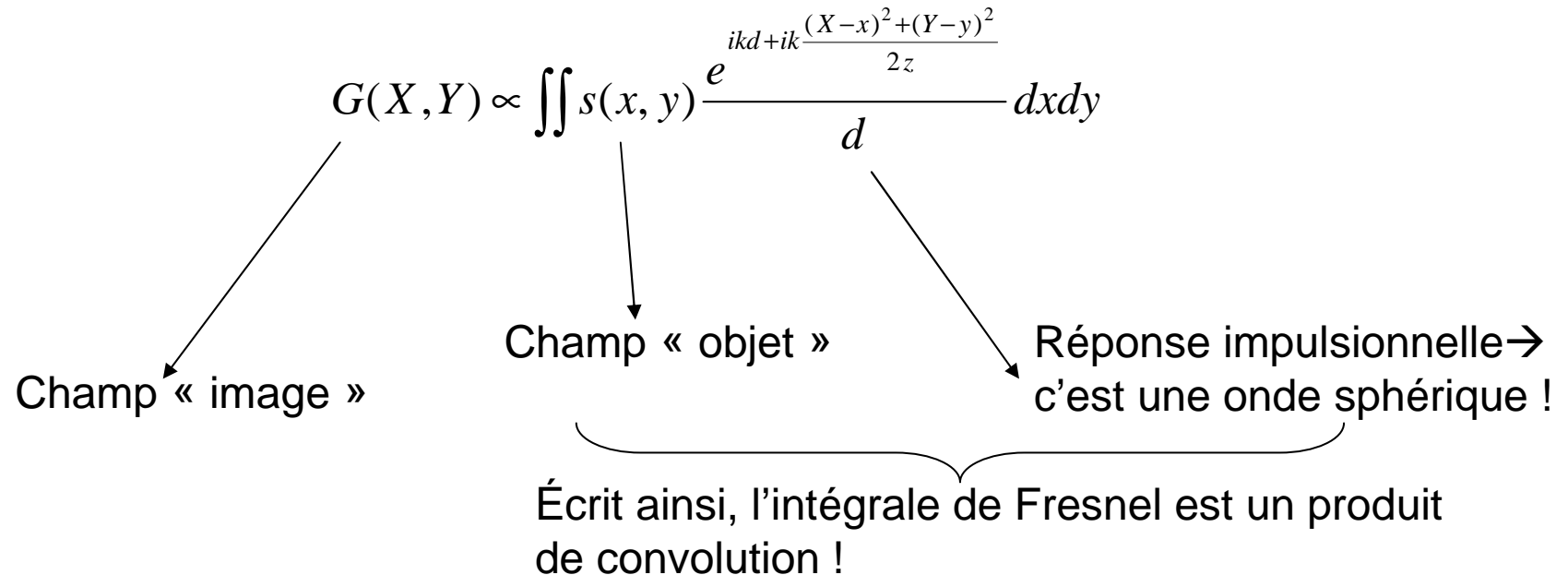
Champ dans le plan image

Champ dans le plan objet

Réponse impulsionnelle du système optique

# Quelques exemples (I)

Propagation libre sur une distance  $d$   
*C'est Fresnel !!!*



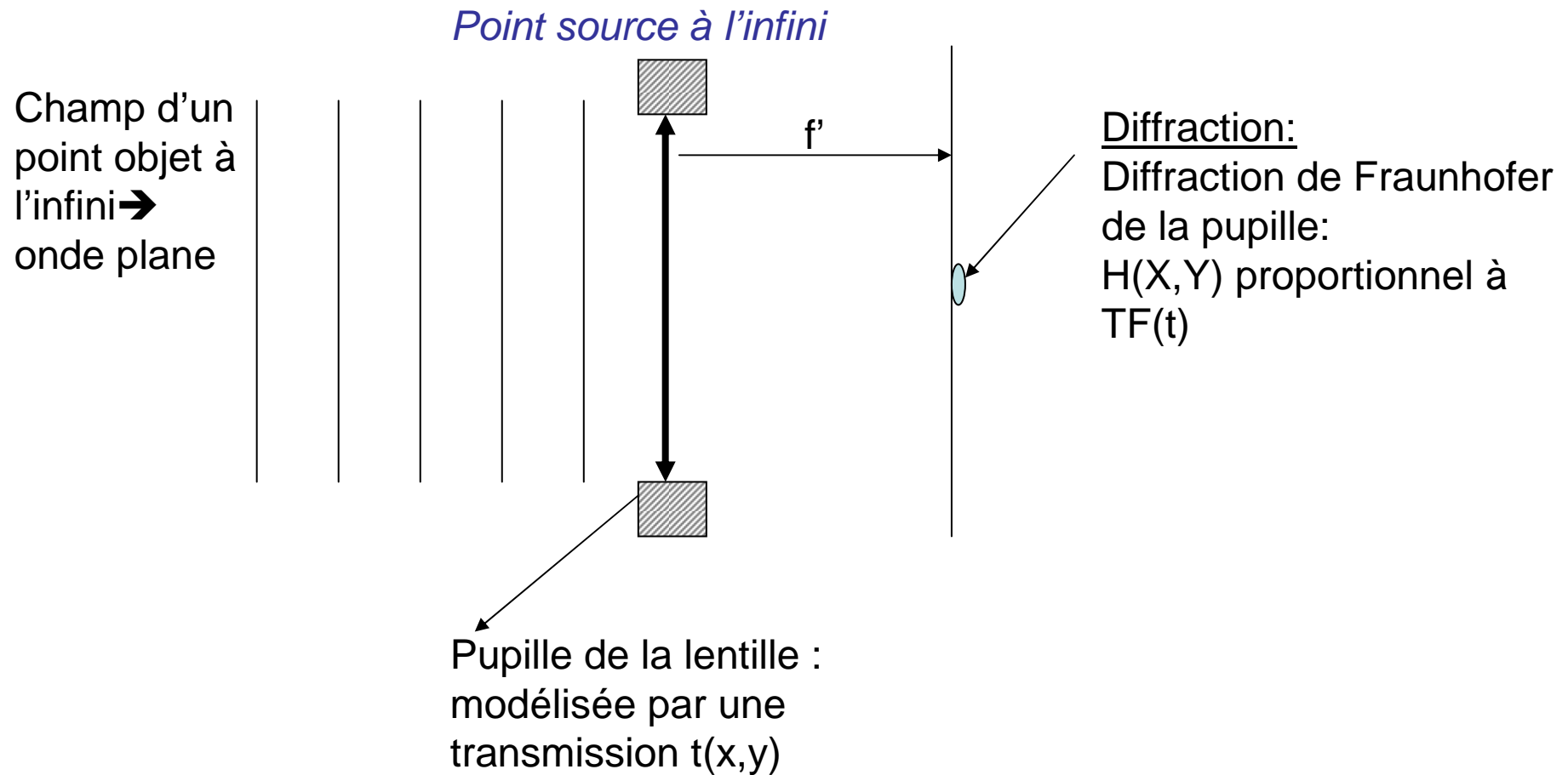
Remarque:

$$\iint \delta(x, y) \frac{e^{ikd + ik \frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{2z}}}{d} dx dy = \frac{e^{ikd + ik \frac{X^2 + Y^2}{2z}}}{d}$$

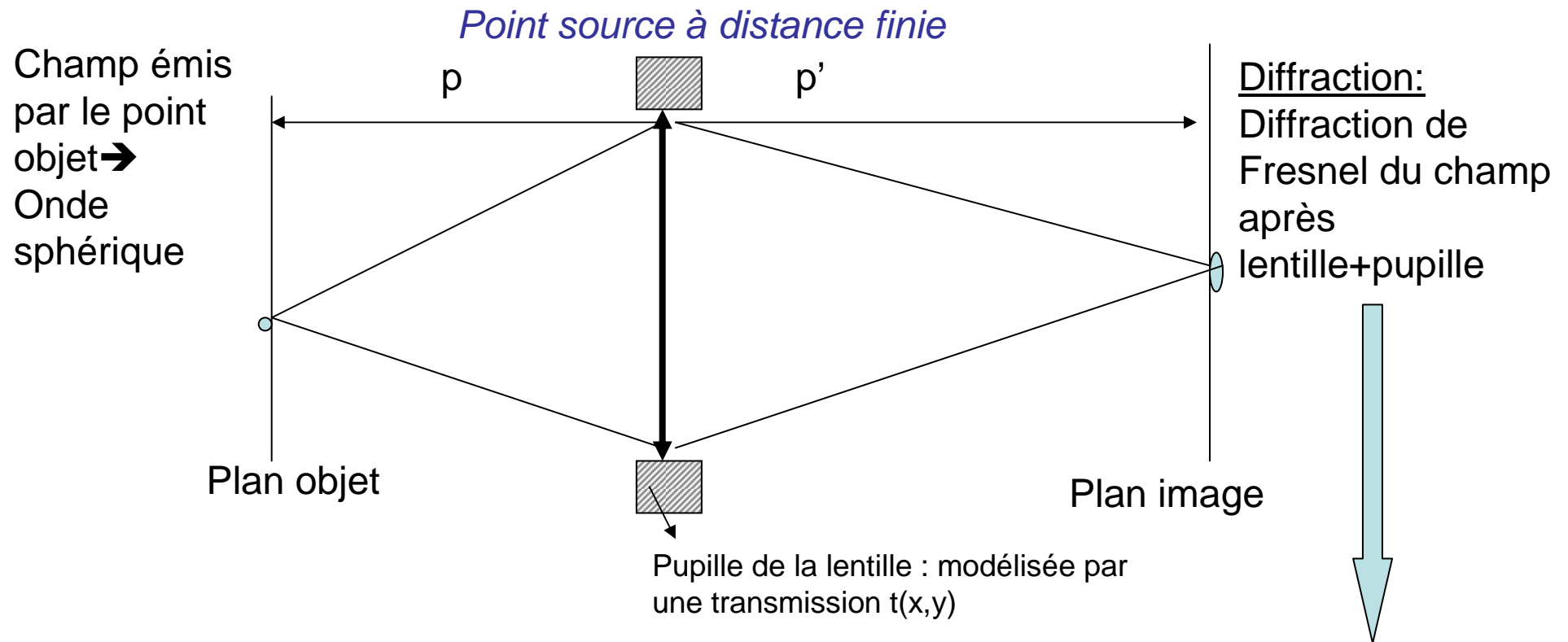
Le champ émis par nos points sources se comporte bien comme une onde sphérique dans un autre plan!!!



# Quelques exemples (II)



# Quelques exemples (III)



Champ après lentille =  $t(x,y)$  \* champ d'une onde convergente au point image  
Ce dernier compense le terme de Fresnel !

A nouveau  $H(X,Y)$  proportionnel à  $TF(t)$  (diffraction de Fraunhofer)

# Fonction de transfert du système

(En anglais : Modulation Transfer Function)

On peut réécrire le formalisme précédent en utilisant la transformée de Fourier et le fait que la TF d'un produit de convolution de deux fonctions est le produit des leurs TF. Ainsi:

$$G(X, Y) = s * H$$

$$TF(G) = TF(s)TF(H)$$

Contenu en fréquences spatiales de l'image

Contenu en fréquences spatiales de l'objet

« Réponse fréquentielle de l'optique » → fonction de transfert du système

# Fonction de transfert du système

**Plus la PSF d'un système optique est « fine »...**

**→ plus le système est résolvant (on peut distinguer deux points objets très proches)**

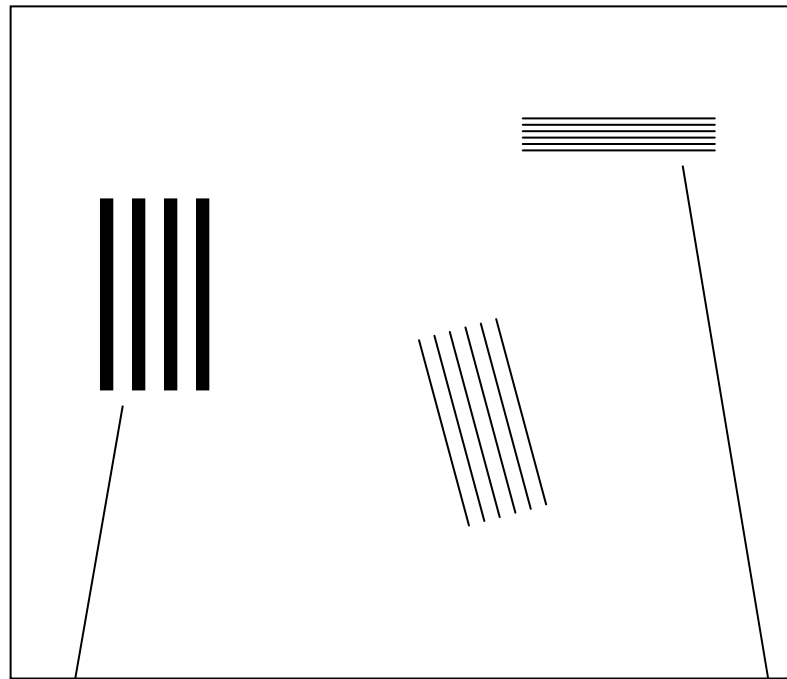
**→ Plus la MTF est large**

**→ Plus on peut distinguer des fréquences spatiales élevées dans l'image**

**Si on connaît la PSF on connaît la MTF et vice-versa...**

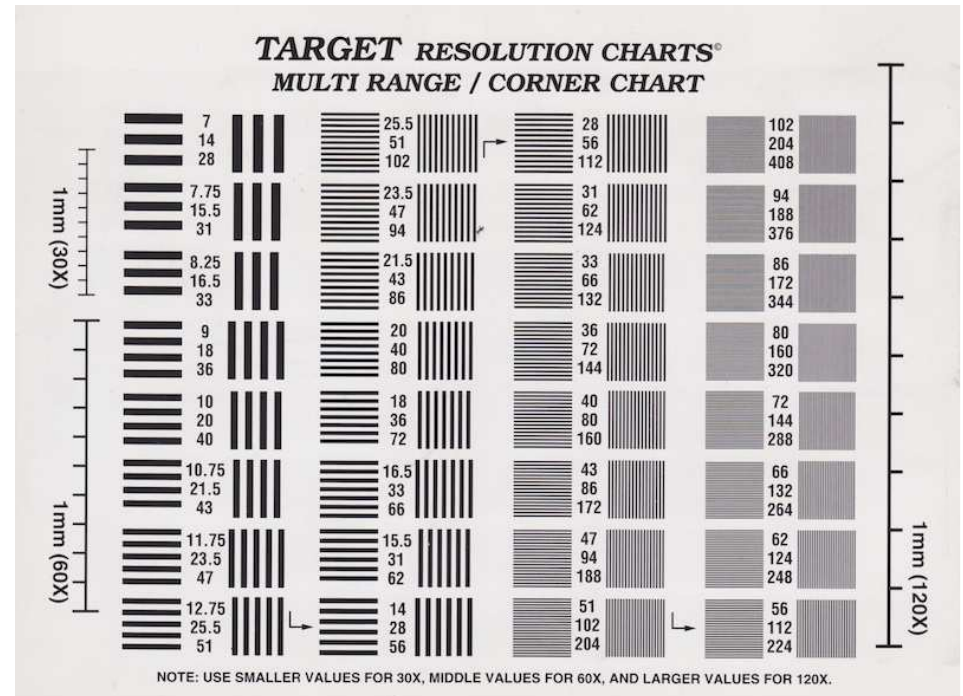
# Fréquences spatiales ? Rappel...

Voici un objet dont on veut faire l'image...



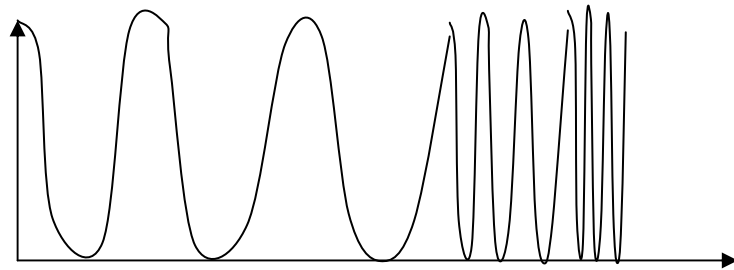
Modulation de fréquence spatiale élevée, dans la direction y

Modulation dont la fréquence spatiale est basse, dans la direction x

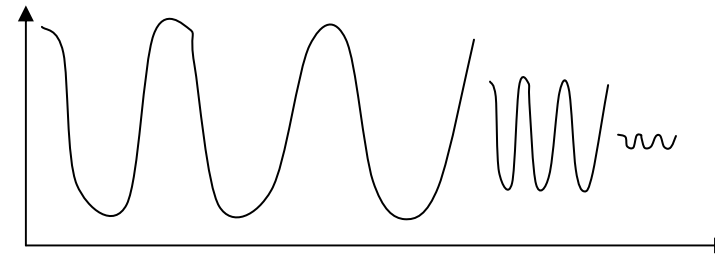


# Fonction de transfert: interprétation

Indique quelles modulations seront discernables ou pas (« floutées »)  
Critère objectif: perte de contraste de la modulation



Plan objet



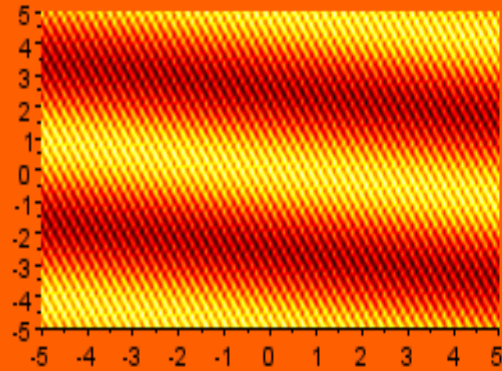
Plan image

**Fonction de transfert : équivalent 2D du diagramme de Bode des filtres électroniques !**

# Exemple numérique

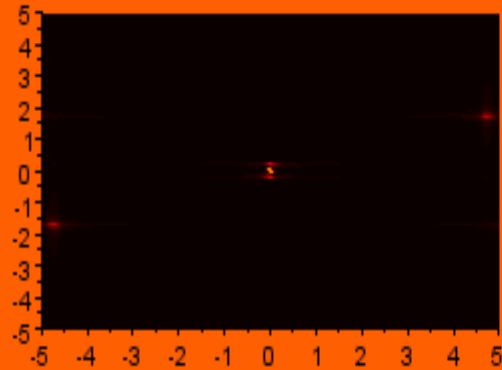
## 1) Objet

Sa transmission est modulée par deux fréquences spatiales (une basse et une haute)



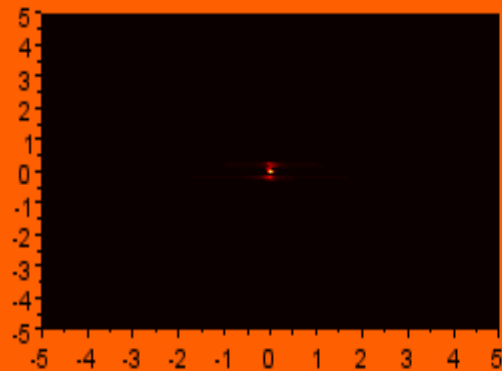
## 2) TF (Objet)

-> pics éloignés du centre = fréquence spatiale haute  
-> pic proche du centre = fréquences spatiales basses

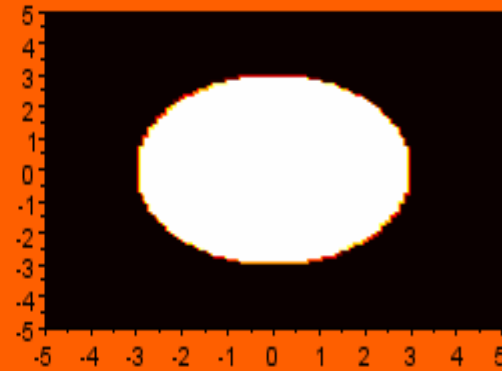


## 5) Produit de TF(Objet) et de la MTF de l'optique

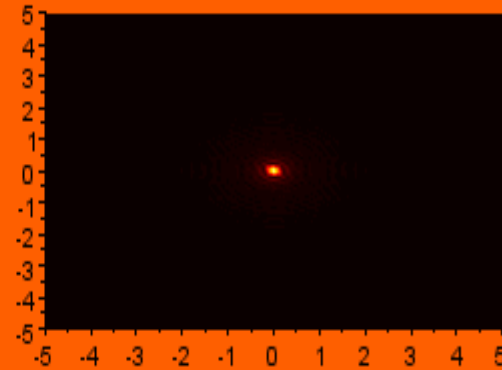
Les fréquences hautes sont atténuées



## 3) Pupille de l'optique formant l'image

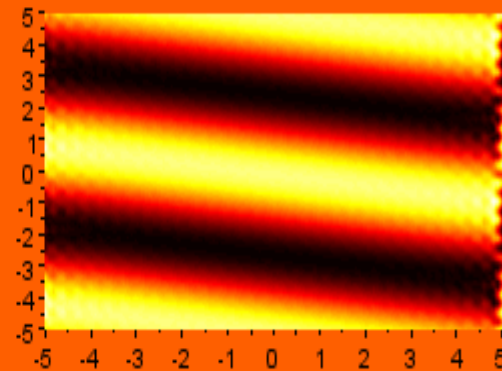


## 4) PSF de l'optique = TF(pupille) = fonction d'Airy



## 6) Intensité dans le plan image

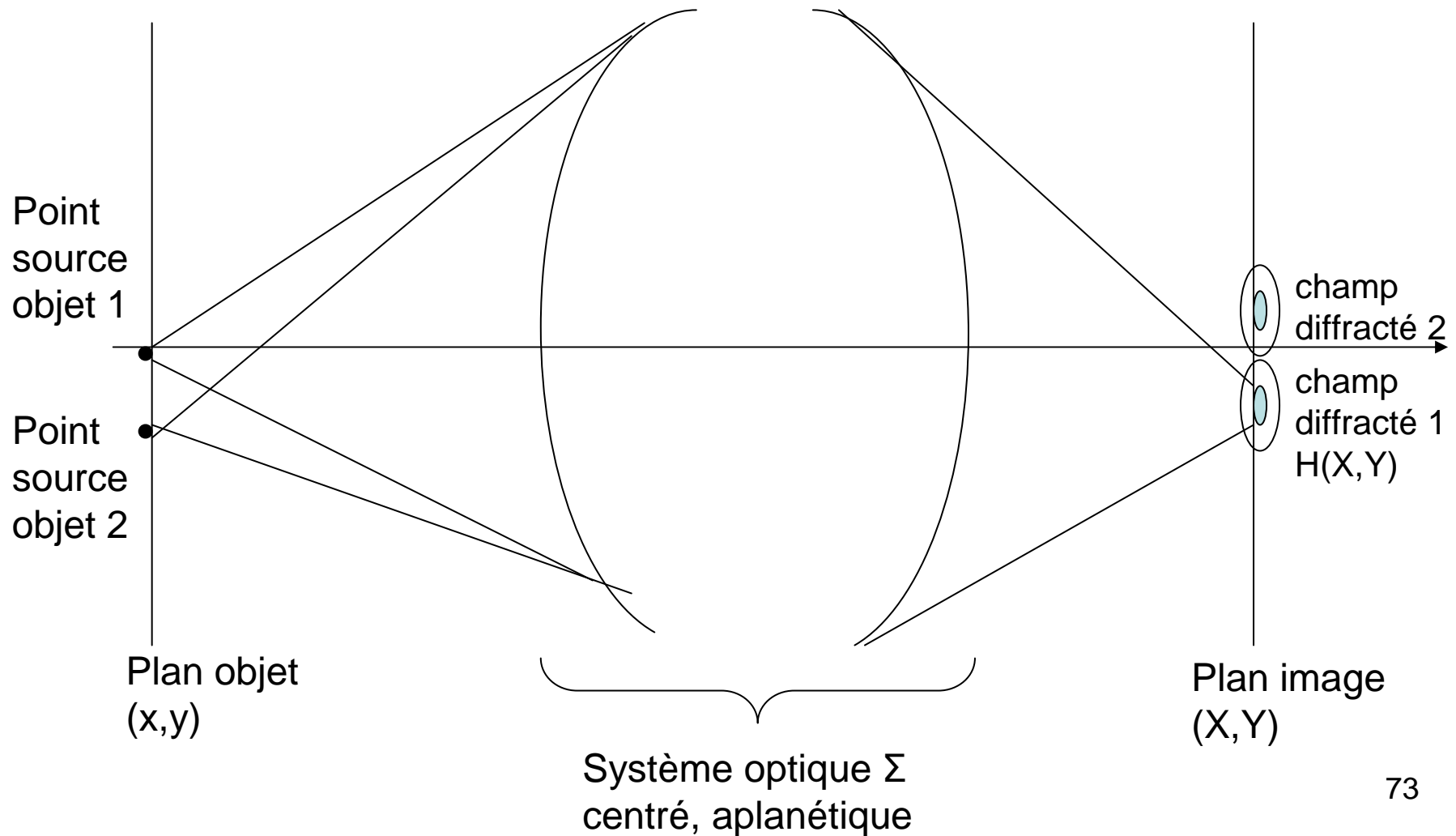
La modulation haute fréquence n'est plus visible => résolution dégradée par la pupille



# Formation des images en lumière incohérente



# Notion de réponse impulsionnelle en lumière incohérente



# Notion de réponse impulsionnelle en lumière incohérente

Les champs générés par 2 objets mutuellement incohérents se superposent EN INTENSITE !!!

Soit  $K(X, Y) = |H(X, Y)|^2$   $\longrightarrow$  Réponse impulsionnelle incohérente

$$I'(X, Y) = \iint I(x, y) K(X - \gamma x, Y - \gamma y) dx dy$$

Intensité dans le plan image

Intensité dans le plan objet