Examen d'optique ondulatoire

Durée : 3h

Un aide mémoire de deux feuilles de format A4 ainsi que la calculatrice sont autorisés. Un petit formulaire est à votre disposition à la fin de l'énoncé. Une attention particulière devra être apportée sur la justification des réponses données.
LIRE ENTIEREMENT LE SUJET AVANT DE VOUS LANCER !

PARTIE 1
Propagation dans un milieu biréfringent

Exercice 1-A

Une onde plane polarisée linéairement se propage suivant (Oz). Sa longueur d'onde est λ_0. Elle arrive en incidence normale sur une fine lame taillée dans un cristal biréfringent. L'épaisseur de la lame sera notée L et la face d'entrée de la lame est placée en z = 0. Les axes neutres de cette lame sont orientés suivant (Ox) et (Oy). Si l'onde est polarisée suivant l'un de ces axes, elle se propage dans le milieu sans changement de sa direction de polarisation. L'indice de réfraction du milieu sera alors n_o et n_e suivant que la polarisation de l'onde est suivant (Ox) ou (Oy) respectivement.

1) Calculer le déphasage φ_x de l'onde entre la sortie et l'entrée de la lame pour une onde polarisée suivant (Ox). Déterminer de même φ_y pour une onde polarisée suivant (Oy).

La direction de polarisation de l'onde incidente fait maintenant un angle de 45° par rapport à (Ox).

2) Exprimer les composantes du champ incident suivant (Ox) et (Oy).
3) Que deviennent ces composantes après la lame ?
4) Exprimer les valeurs possibles de l'épaisseur L de la lame pour que l'onde sortante soit une onde circulaire gauche.
5) Ces résultats seront-ils valables pour une autre longueur d'onde $\lambda \neq \lambda_0$?

On suppose que λ et L sont quelconques. On place un polariseur juste après la lame. Sa direction de polarisation fait un angle β par rapport à (Ox).

6) Quelle est la direction de polarisation de la lumière après le polariseur ?

7) Exprimer le champ après le polariseur puis l'intensité lumineuse en sortie en fonction de $\varphi_y - \varphi_x$.

8) Pour quelle(s) valeur(s) de β, un choix judicieux de $\varphi_y - \varphi_x$ permet d'annuler l'intensité ?

Exercice 1-B

Un nuage de gaz ionisé (plasma) traversé par un champ magnétique possède une biréfringence circulaire pour les ondes se propageant suivant la direction du champ magnétique (Oz). Répondre brièvement aux questions suivantes :

9) Que devient la polarisation d'une onde circulaire droite se propageant suivant (Oz) ?

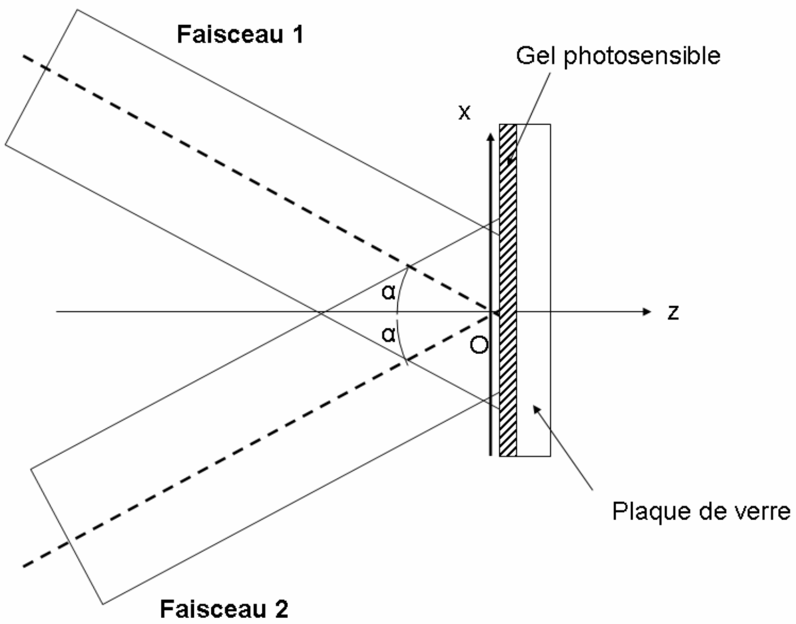
10) Même question pour une onde polarisée linéairement.

PARTIE 2 :
Fabrication d'un diaphragme modulé en transmission

On souhaite réaliser une expérience de diffraction de Fraunhofer avec un diaphragme dont la transmission est de la forme $t(x,y) = A+B\cos(2\pi x/\Lambda)$ où A et B sont des constantes.

1) Donner l'allure de $t(x,y)$. A quoi correspond Λ ?

Pour réaliser un tel diaphragme, une plaque de verre transparente est insérée dans un diaphragme rectangulaire. Elle est recouverte d'une fine couche d'un gel photosensible : lorsque celui-ci est éclairé par une lumière incidente d'intensité I, il s'opacifie d'autant plus que I est grand et le temps d'exposition T est long. Un traitement chimique permet ensuite de « figer » cette opacification (c'est l'opération de « développement »).



La première étape consiste à éclairer pendant un temps T, la plaque à l'aide de deux faisceaux lasers suffisamment larges et collimatés pour être considérés comme des ondes planes de longueur d'onde λ. Ces deux faisceaux sont incidents sur la plaque avec un angle 2α entre eux (la direction des ondes est contenue dans le plan (xOz)) (voir figure ci-dessus).

On génère les deux faisceaux en envoyant un faisceau sortant d'un laser sur une lame semi-réfléchissante. La réflectivité est telle que les deux faisceaux ainsi produits ont la même intensité. ($I_1=I_2=I_0$ sur la plaque).

2) Pourquoi génère t-on les deux faisceaux laser à l'aide d'une lame semi-réfléchissante ?

3) Quel est l'intérêt d'avoir des intensités égales ?

4) Quel est l'intérêt d'utiliser une source spectralement très étroite comme un laser ?

5) Calculer l'amplitude de chaque onde sur la plaque.

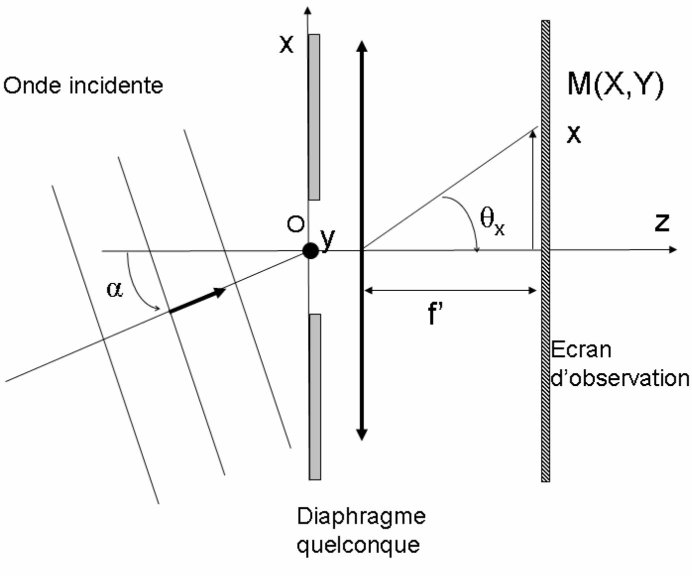
6) Calculer la répartition d'intensité $I(x,y)$ sur la plaque.

La réponse du gel photosensible est la suivante : $t(x,y) = (1-C\ T\ I(x,y))$ où C est une constante, T le temps d'exposition .

7) Montrer que l'on obtient bien une transmission $t(x,y)= A+B\cos(2\pi x/\Lambda)$. De quels paramètres dépend Λ ?

PARTIE 3: Diffraction par un diaphragme

On éclaire un diaphragme (placé dans le plan (xOy)) par une onde plane arrivant en incidence oblique (angle α, la direction de l'onde est contenue dans le plan (xOz)). On place une lentille convergente (focale f') juste après le diaphragme et on observe l'intensité diffractée dans son plan focal. On suppose que l'angle d'incidence α et les angles de diffraction θ_x, θ_y sont petits. On pose $u = \sin\theta_x / \lambda$ et $v = \sin\theta_y / \lambda$



1) Quel lien existe entre θ_x (ou θ_y) et X (ou Y) ? Puis entre u (ou v) et X (ou Y).

On suppose que $t(x,y)$ est de la forme $t(x,y)=\mathrm{rect}(x/a)\mathrm{rect}(y/b)(A+B\cos(2\pi x/\Lambda))$ avec $\Lambda \ll a$.

2) Calculer le champ du laser incident dans le plan du diaphragme.
3) Calculer le champ diffracté dans le plan d'observation en fonction de u et v puis en fonction de X et Y.
4) Montrer que l'on obtient trois taches lumineuses. Sur quelles positions sont-elles centrées? Comment varie leur forme avec a ?

La modulation périodique de t(x,y) n'est plus un cosinus mais une fonction périodique réelle quelconque (un créneau ou une dent de scie) toujours de période Λ.

5) A quoi ressemblera la figure de diffraction ?

On a réalisé avec un dispositif expérimental analogue, une expérience de diffraction de Fraunhofer dans différentes conditions expérimentales (A,B,C,D et E) décrites ci-dessous. On a enregistré les images obtenues (1, 2, 3, 4 et 5).

6) Associer à chaque expérience la figure de diffraction correspondante en justifiant les différences obtenues.

A Le diaphragme est une plaque percée d'une fente de 100 µm de large par 500 µm de hauteur éclairée en incidence oblique par une onde plane (longueur d'onde λ).

B Le diaphragme est une plaque percée d'une fente de 200 µm de large et 500 µm de hauteur éclairée en incidence oblique par une onde plane (longueur d'onde λ)

C Le diaphragme est une plaque percée d'une fente de 200 µm de large par 500 µm de hauteur éclairée en incidence oblique par une onde plane de longueur d'onde $\lambda' = \lambda/2$.

D Le diaphragme est une plaque percée de deux fentes rectangulaires de 100 µm de large par 500 µm de hauteur et séparées de 500µm, éclairée par une onde plane en incidence normale.

E Le diaphragme est une plaque percée de deux fentes rectangulaires de 100 µm de large par 500 µm de hauteur et séparées de 1mm, éclairée par une onde plane en incidence normale.

Image 1)

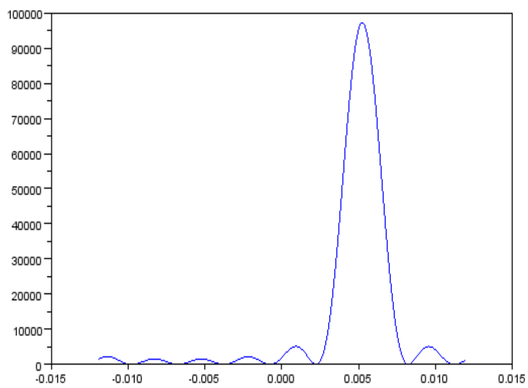


Image 2)

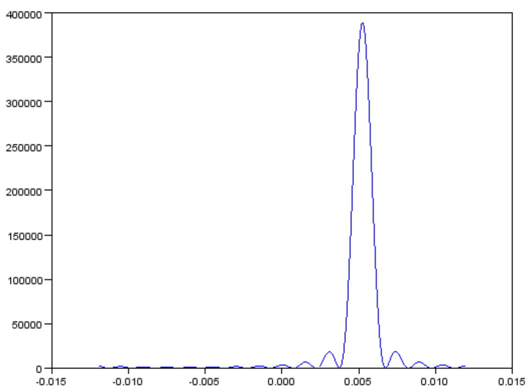


Image 3)

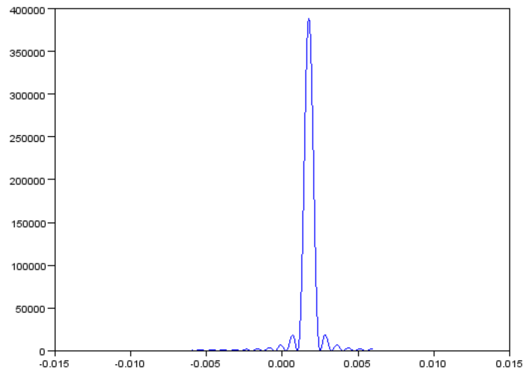


Image 4)

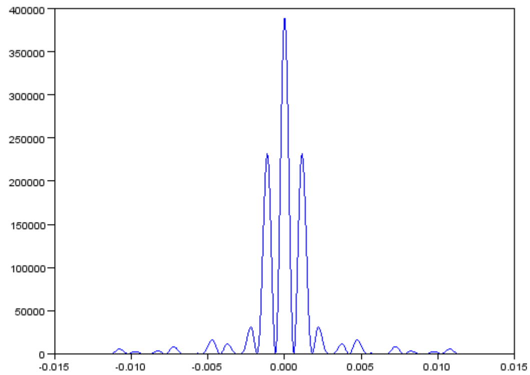
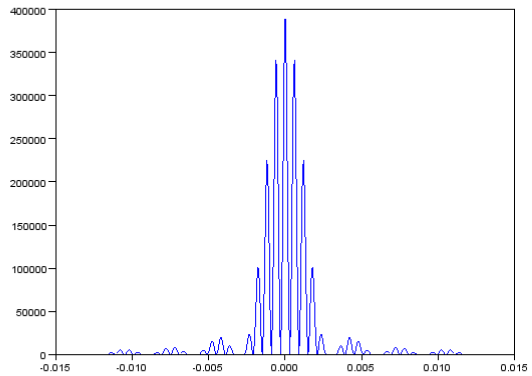


Image 5)



Images expérimentales 1,2,3,4 et 5 (l'axe des abscisses est l'axe X)

FIN

FORMULAIRE

Trigonométrie

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$
$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$
$$\sin b \cos a = \tfrac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$$
$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique

Soit *f(x)* une fonction périodique de période T .

$$f(x+nT) = f(x)$$

La fonction *f* peut être développée en série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} x) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T} x)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i \frac{2\pi n}{T} x)$$

Quelques résultats sur les transformées de Fourier

Définition

$$F(u) = TF(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

$$f(x) = TF^{-1}(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{i2\pi ux} du$$

Propriétés

$$TF^{-1}(TF(f)) = f$$

$$TF(af(x) + bg(x)) = aF(u) + bG(u)$$

$$TF(f(x-a)) = e^{-i2\pi au} F(u)$$

$$TF(e^{i2\pi u_0 x} f(x)) = F(u - u_0)$$

$$TF(f(\frac{x}{a})) = aF(au)$$

$$TF(TF(f(x))) = f(-x)$$

TF de fonctions usuelles

$$TF(rect(x/a)) = a \sin(\pi ua)/\pi ua = a \sin c(\pi ua)$$

$$TF(\exp(-\pi x^2)) = \exp(-\pi u^2)$$

TF à deux dimensions

$$F(u,v) = \iint f(x,y) e^{-i2\pi(xu+yv)} dxdy$$

$$f(x,y) = h(x) g(y)$$

$$F(u,v) = TF(h) TF(g) = H(u) G(v)$$

TF et fonction de Dirac

$$TF(1) = \delta(u)$$

$$TF(e^{i2\pi ax}) = \delta(u - a)$$

$$TF(\delta(x)) = 1$$

$$TF(\delta(x-a)) = e^{-i2\pi ua}$$