Université Paris-Sud **Année 2015-16**
L3 PAPP-PMEC **Mathématiques I**

TD : Equations différentielles ordinaires

- **Exercice 1**

Nous considérons l'EDO linéaire

$$y' = -a\,y + \cos x \quad , \quad CI \ : \ y(0) = 1$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Trouver la solution qui satisfait la condition initiale
2. Dessiner la courbe y en fonction de x.

- **Exercice 2**

Trouver la solution du problème aux conditions initiales

$$y''' - 6y'' + 9y' - 4y = 0 \quad , \quad CI \ : \ y(0) = 2 \ , \ y'(0) = 1 \ , \ y''(0) = 0$$

On remarque que la somme des coefficients est égale à 0 ici.

- **Exercice 3**

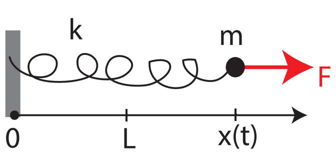
Identifier les valeurs de k pour lesquelles le problème suivant a des solutions non-nulles :

$$y'' + k^2 y = 0 \quad , \quad CL \ : \ y'(0) = 0 \ , \ y(L) = 0$$

Ici $L > 0$ est un paramètre. Faire un graphique qui montre les solutions en fonction $x \in [0, L]$, pour les trois plus petits k_1, k_2, k_3 identifiés.

- **Exercice 4**

On cherche à suivre la position d'une masse m attachée par un ressort sur une paroi.



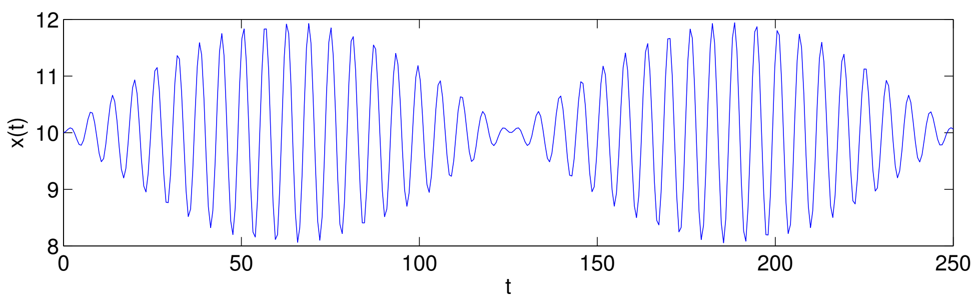
La position de la masse est paramétrisée par la coordonnée $x(t)$. Le ressort a une constante de raideur k et une longueur d'équilibre L. La masse subit une force de rappel vers la position $x = L$ et une force extérieure de caractère oscillante. La force totale est alors

$$F(t) = -k(x(t) - L) + A\cos(\omega_f t)$$

Ici A est l'amplitude de la force oscillante et ω_f la fréquence du forçage. On suppose qu'à l'instant initial la masse est a la position d'équilibre du ressort et qu'elle est au repos.

1. Ecrire le PFD et réorganiser l'équation afin d'arriver sur une EDO de la forme
   $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = \omega^2 L + a\cos(\omega_f t)$$
   Spécifier ω, a en fonction de m, k, A. On supposera dans toute la suite que $\omega \neq \omega_f$.
2. Ecrire les deux conditions initiales
3. Trouver la solution homogène $x_h(t)$
4. Trouver deux solutions particulières $x_{p,1}(t)$ et $x_{p,2}(t)$, une qui répond au terme $\omega^2 L$, une qui répond au terme $A\cos(\omega_f t)$.
5. Ecrire la solution générale de l'EDO (sans CI)
6. Trouver la solution qui satisfait les conditions initiales.

Ci-dessous, on montre la solution, pour un choix des paramètres $a = 0.1$, $L = 10$, $\omega = 1$, $\omega_f = 1.05$ et $t \in [0, 250]$. Le comportement qu'on voit ici, est celui d'un oscillateur forcé proche de sa fréquence naturelle. On voit des oscillations rapides, dont l'amplitude grandit/diminue progressivement en faisant des battements :



7. Partant de la solution trouvée, montrer que la fréquence de battement est $(\omega - \omega_f)/2$.

- **Exercice 5**

Les polynômes de Hermite $H_n(x), n \in \mathbb{N}$ sont des solutions de l'EDO

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 2n\right) H_n(x) = 0$$

Le polynôme $H_n(x)$ est d'ordre n. Ainsi on sait directement que

$$H_0(x) = 1$$

Trouver les polynômes d'ordre n=1, 2, 3 en injectant directement

$$H_1(x) = x + A \quad , \quad H_2(x) = x^2 + Ax + B \quad , \quad H_3(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

dans l'EDO. Ces polynômes seront à un facteur multiplicatif près, identiques aux expressions que vous pouvez trouver dans les livres ou sur le web.

- **Exercice 6**

Montrer que l'équation différentielle ordinaire

$$(3x^3 + 4xy)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4x^2y + 2y^2 = 0$$

n'est pas une EDO exacte. Montrer qu'il existe un facteur intégrant du type

$$M(x, y) = x^\alpha y^\beta$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ des entiers à déterminer. Trouver ensuite la solution du problème et spécifier s'il s'agit d'une solution explicite ou implicite.

- **Exercice 7**

Nous considérons l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y + ty^5 \quad , \quad CI \ : \ y(0) = y_0$$

1. De quel type d'équation s'agit-il ?
2. Trouver la solution. S'agit-il d'une solution explicite ou implicite ?
3. Représenter graphiquement la solution $y(t)$ en fonction de t.

- **Exercice 8**

On cherche à identifier pour quelles valeurs du paramètre α, il existe des solutions non-nulles de

$$-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x^2 y = \alpha y \quad , \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

A l'infinie, nous voulons que $y(x)$ satisfait des conditions de régularité

$$CL \ : \ \lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 0$$

Ce problème aux conditions aux limites apparait en mécanique quantique lors de l'étude de l'oscillateur harmonique.

1. Montrer que $y(x) = \psi_0(x) = \exp(-x^2/2)$ est une solution de l'équation, pour un α_0 associée à identifier.
2. On cherche d'autres solutions sous la forme

$$y(x) = z(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

   Montrer que $z(x)$ satisfait l'EDO de Hermite, moyennant que α vaut ....
3. Proposer une infinité de solutions $\psi_n(x)$ du problème de départ ensemble avec les valeurs α_n.
4. Faire un dessin approximatif des solutions $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)$ en fonction de x.

- **Exercices SUP**

Trouver la solution des EDO's

1. $y' = a\,y + x \quad , \quad CI : \ y(0) = 1$
2. $x^2\,y\,y' + x\,y^2 + x = 0 \quad , \quad CI : \ y(1) = 1$
3. $y''' + y = 0 \quad , \quad CL \ : \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \ , \ y(1) = 0$
4. $(y^2 - x\,\sin y)\,y' + \cos y = 0$
5. $y' = \frac{y}{x^2} + \sin t$
6. $y'' - y = e^{-4x} + x$
7. $y' = y - y^4 \quad , \quad CI : \ y(0) = 1$
8. $y' = y \sin x$
9. $2x\,y\,y' + \cos x - x \sin x + y^2 = 0$
10. $y' = y + xy^3 \quad , \quad CI \ : \ y(0) = 0.01$
11. $y''' - y = x + 1 \quad , \quad CI : \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \ , \quad y''(0) = 0$

TD : Systèmes d'équations différentielles ordinaires

- **Exercice 1**

L'EDO d'ordre 2 de l'oscillateur de Van der Pol peut s'écrire comme un système d'EDO's d'ordre 1 à l'aide du processus de réduction d'ordre :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \mu(1-y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$$

Identifier la fonction $\mathbf{F}$, pour un vecteur d'état $\mathbf{Y} = [y_1 \ y_2]^T$ avec $y_1 = y$ et $y_2 = \mathrm{d}y_1/\mathrm{d}x$.

- **Exercice 2**

Nous considérons le système linéaire suivant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad CI \ : \ \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le but de l'exercice est de trouver la solution du problème qui satisfait la condition initiale. Procédez selon les étapes suivantes

1. Trouver la solution homogène
2. Trouver une solution particulière associée au terme exponentiel e^{-2t}
   Trouver une solution particulière associée au terme constant 1
3. Imposer la condition initiale pour fixer les constantes arbitraires.

- **Exercice 3**

Considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x + y - x(x^2+y^2) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -x + y - y(x^2+y^2) \end{aligned}$$

munis d'une condition initiale : $x(0) = R_0$, $y(0) = 0$. où $R_0 \ll 1$. Il s'agit d'un problème non-linéaire qui à priori semble difficile à résoudre. Pour cette raison, nous souhaitons d'abord trouver une solution approchée, au voisinage de l'origine $x = y = 0$, pour $x \ll 1, y \ll 1$. Dans cette limite, on peut ignorer les termes non-linéaires et on parle du problème linéarisé

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} &= \tilde{x} + \tilde{y} \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t} &= -\tilde{x} + \tilde{y} \end{aligned}$$

avec la même condition initiale $\tilde{x}(0) = R_0$, $\tilde{y}(0) = 0$

1. Trouver la solution $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ du problème linéarisée et la écrire sous forme réelle.
   Dessiner la courbe $\vec{r}(t) = \tilde{x}(t)\vec{e}_x + \tilde{y}(t)\vec{e}_x$ dans le plan.

2. Pour résoudre le problème non-linéaire, on propose le changement de variables suivant

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t) \quad , \quad y(t) = r(t)\sin\theta(t)$$

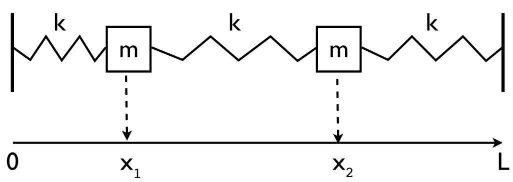
Substituer ces relations dans le système non-linéaire et isoler un système d'EDO's pour $r(t)$ et $\theta(t)$ qui sera de la forme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= f(r)\\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= C\end{aligned}$$

Identifier la fonction $f(r)$ et la constante C. Spécifier les conditions initiales sur $r(0)$ et $\theta(0)$. Trouver la solution du problème. Dessiner la courbe $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_x$ dans le plan pour $t \in [0, 2\pi]$. Expliquer pourquoi on parle d'un **cycle limite** dans la limite $t \to +\infty$.

- **Exercice 4**

Nous souhaitons étudier le système masse-ressort du diagramme du dessous :



Deux masses identiques m sont tenues par trois ressorts à la constante de raideur k entre deux deux parois placées en $x = 0$ et $x = L$. Les positions des deux masses sont suivies par les variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$ qui peuvent varier au cours du temps t. Un peu de mécanique élémentaire (PFD) nous permet de trouver les deux équations du mouvement :

$$\begin{aligned}m\,\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1)\\ m\,\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) + k(L - x_2)\end{aligned}$$

Nous choisissons $m = 1$, $k = 1$ et $L = 1$ pour fixer un cas d'étude.

1. Ecrire ce système d'EDO's d'ordre 2, comme un système d'EDO's d'ordre 1 de la forme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{AY} + \mathbf{B}$$

Le vecteur d'état $\mathbf{Y}$ sera choisi la forme

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

avec $v_1 = \dot{x}_1, v_2 = \dot{x}_2$ les vitesses des deux masses. Identifier la matrice $\mathbf{A}$ et le vecteur colonne $\mathbf{B}$
2. Physiquement, on s'attend à trouver quel genre de solutions ? Pouvez-vous déjà donner une idée sur la variation temporelle de la solution à laquelle on s'attend.
3. Obtenir la solution homogène du problème à l'aide de la méthode des valeurs/vecteurs propres.
Astuce : cette solution peut se mettre sous la forme

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{4} C_k \begin{bmatrix} 1 \\ (2+\lambda_k^2) \\ \lambda_k \\ \lambda_k(2+\lambda_k^2) \end{bmatrix} e^{\lambda_k t}$$

4. Trouver une solution particulière. Expliquer sa signification physique dans ce problème.
5. Proposer une forme équivalente de la solution dans laquelle n'apparaissent que des constantes arbitraires réelles et des fonctions trigonométriques. Interprétez physiquement les deux types de solutions

- **Exercices SUP**

1. Trouver la solution générale de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta - 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   avec $\delta > 0$ un paramètre.

2. Trouver la solution unique du problème

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad CI \; : \; \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Nous souhaitons résoudre le système linéaire d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & \delta \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

   Choisir δ pour que la solution comporte un terme qui croit exponentiellement comme e^t. Déterminer ensuite la solution du problème. Spécifier pour quel genre de conditions initiales, la solution ne croitra pas plus vite que e^t aux temps longs.

Université Paris-Sud — **Année 2015-16**

L3 PAPP-PMEC — **Mathématiques I**

TD : Equations différentielles partielles

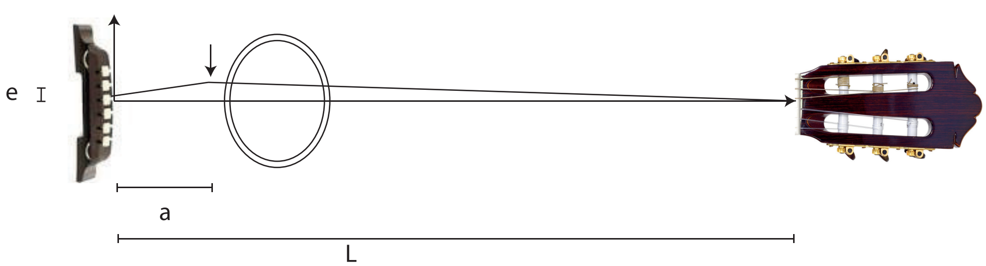
- **Exercice 1**

On s'intéresse à la modélisation des vibrations d'une corde de guitare de longueur L. On modélise les déformations $h(x,t)$ de la corde par une équation d'onde :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{1}$$

pour $x \in [0, L]$ et tout temps t. Ici $c = \sqrt{T/\mu}$ est la vitesse de l'onde, avec T (en N) la tension et μ la masse par unité de longueur (en kg/m).

1. Trouver une solution séparable de la forme $h(x,t) = X(x)T(t)$ et choisir la constante de séparation de manière à retrouver un caractère oscillant en temps et en espace. Faire apparaitre un nombre d'onde k et une pulsation $\omega = ck$.
2. Proposez deux conditions aux limites adéquates au problème et montrer que la solution générale qui satisfait ces conditions aux limites, se laisse écrire comme
$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\omega_n t + \chi_n\right)\sin(k_n x) \tag{2}$$
où les valeurs ω_n et les nombres d'ondes k_n avec $n \in \mathbb{N}_0$ sont à spécifier. Faire un graphe qui montre les ondes $n = 1, 2, 3$ ayant les plus grandes structures spatiales.
3. Dans la partie spatiale, on retrouve une fonction propre du Laplacien en 1D. Verifier la relation d'orthogonalité
$$\int_0^L \sin(k_n x)\,\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq m \\ N & , \quad n = m \end{cases} \tag{3}$$
et calculer la norme N.
4. A l'instant initial $t = 0$, on lâche la corde de guitare brusquement de la position marquée dans la figure de ci-dessous, pour simuler l'effet d'un médiateur



Quelles sont les deux conditions initiales compatibles avec cette situation.
5. Exprimer ces deux conditions initiales à l'aide de la solution (2). Montrer que $\chi_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Ecrire à l'aide de la relation d'orthogonalité l'intégrale qui permet de calculer tous les coefficients A_n.
6. <u>BONUS :</u> Calculer les intégrales définissant les coefficients A_n.
7. <u>BONUS :</u> Que devient la solution pour une équation d'onde amortie
$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + 2\alpha\frac{\partial h}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{4}$$
avec α un taux d'amortissement (en s^{-1}).

- **Exercice 2**

Un aquarium rectangulaire de dimensions latérales L_x, L_y est rempli d'une couche de fluide de hauteur H au repos. On s'intéresse à caractériser les ondes de gravité dans cet aquarium. On note $h(x, y, t)$ l'élévation de la surface d'eau par rapport à la hauteur de repos H. Si on suppose $H \ll L_x, L_y$ et $h \ll H$, alors on montre à partir des équations de la mécanique des fluides que $h(x, y, t)$ satisfait :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \tag{5}$$

pour tout $\vec{r} \in D : (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y]$. Ici $c = \sqrt{gH}$ est la vitesse de propagation des ondes de gravité avec g l'accélération gravitationnelle. On suppose cette équation satisfaite sur le rectangle D. Les bords de l'aquarium sont imperméables : ceci requiert que

$$CL \ : \ \vec{n} \cdot \nabla h\Big|_{\vec{r} \in \delta D} = 0 \tag{6}$$

avec $\vec{n}$ la normale à la paroi. On cherche à identifier la solution générale de ce problème en fonction d'une infinité de constantes arbitraires.

1. Trouver une solution séparable ondulatoire, qui fait apparaitre deux nombres d'ondes k, l et une pulsation ω, toutes reliées par une relation $\omega^2 = k^2 + l^2$.
2. Imposer les conditions aux limites, afin d'identifier les ondes stationnaires qui peuvent exister dans l'aquarium. Montrer que les nombres d'ondes k, l et les pulsations ω sont discrétisés et spécifier leur valeurs.

- **Exercice 3**

Le "handdrum" est un instrument de percussion qui ressemble à

Un membrane est tendu sur un coté d'un anneau rigide de rayon R. Des ondes peuvent se propager sur ce membrane et on peut les modéliser comme des déformations $h(\rho, \phi, t)$ transverses qui satisferont l'équation d'onde

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial(\rho h)}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} \tag{7}$$

ici exprimées en coordonnées cylindriques. On note $c = \sqrt{\gamma/\delta}$ la vitesse d'onde, où γ est la tension de surface (en N/m) de la membrane et δ la masse par unité de surface (en kg/m^2).

1. Exprimer la condition aux limites en $r = R$ et la condition de régularité en $r = 0$.
2. Trouver la famille des fonctions propres $\Psi_{nm}(\rho, \phi)$ du Laplacien en 2D, solution de

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial(\rho h)}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} + \lambda h = 0 \tag{8}$$

   et qui satisfont les conditions aux limites spécifiées. Les nombres $n \in \mathbb{N}_0$ et $m \in \mathbb{Z}$ sont entiers et on appelle m nombre d'onde azimutal.
3. Montrer qu'une solution générale de l'équation d'onde qui satisfait ces conditions aux limites peut s'écrire sous la forme

$$h(\rho, \phi, t) = \sum_{nm} T_{nm}(t)\Psi_{nm}(\rho, \phi) \tag{9}$$

   Spécifier la fonction $T_{nm}(t)$ et le spectre des fréquences admises en fonction de ζ_{mn}, les zéros de la fonction de Bessel : $J_m(\zeta_{mn}) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ et $\forall m \in \mathbb{Z}$.

4. <u>BONUS :</u> Utilisant la propriété d'orthogonalité des fonction propres Ψ_{nm}, spécifier la solution $h(\rho, \phi, t)$ qui donne la réponse à une impulsion élémentaire sur la vitesse à l'instant $t = 0$:

$$CI : h|_{t=0} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(r-a)\delta(\phi) \tag{10}$$

Ceci imite l'effet d'une frappe sèche à un endroit très localisé $(r, \phi) = (a, 0)$. Les fonctions $\delta(r-a)$ et $\delta(\phi)$ sont des delta-dirac qui ont la propriété

$$f(a) = \int_0^L f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x \tag{11}$$

si $a \in [0, L]$.

- **Exercice 4**

Le champ magnétique terrestre est en bonne approximation irotationnel et solénoidal en dehors du noyau où il est généré. Ceci permet de le représenter à l'aide d'un potentiel magnétique Ψ, qui satisfait un problème de Laplace :

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\Psi \quad \text{avec} \quad \Delta\Psi = 0 \quad , \quad r \in [R_{noyau}, +\infty[\tag{12}$$

Ici le rayon extérieur du noyau est $r = R_n = 3480km$. Le champ magnétique et donc ce potentiel sont mesurés dans des stations de mesure implantés un peu partout dans le monde et également à l'aide des satellites mises en orbite. Ces mesures fixent les coefficients dite de Gauss g_n^m et h_n^m du potentiel magnétique à la surface de la terre :

$$\Psi(R_{terre}, \theta, \phi) = R_{terre} \sum_{n=1}^{+\infty} P_n^m(\cos\theta)[g_n^m \cos(m\phi) + h_n^m \sin(m\phi)] \tag{13}$$

Ici on note $R_{terre} = 6370\,km$ le rayon de la terre. Quelques coefficients de Gauss du champ terrestre en 2005 sont

n	m	$g_n^m(nT)$	$h_n^m(nT)$
1	0	-29556.8	0
1	1	-1671.8	5080
2	0	-2340.5	0
2	2	1656.9	-516.7

n	m	$g_n^m(nT)$	$h_n^m(nT)$
3	0	1335.7	0
3	1	-2305.3	-200.4
3	2	1246.8	269.3
3	3	674.4	-524.5

On voit que la composante g_1^0 domine fortement, ce qui explique le caractère plutôt dipolaire du champ à la surface (figure 1 à gauche).

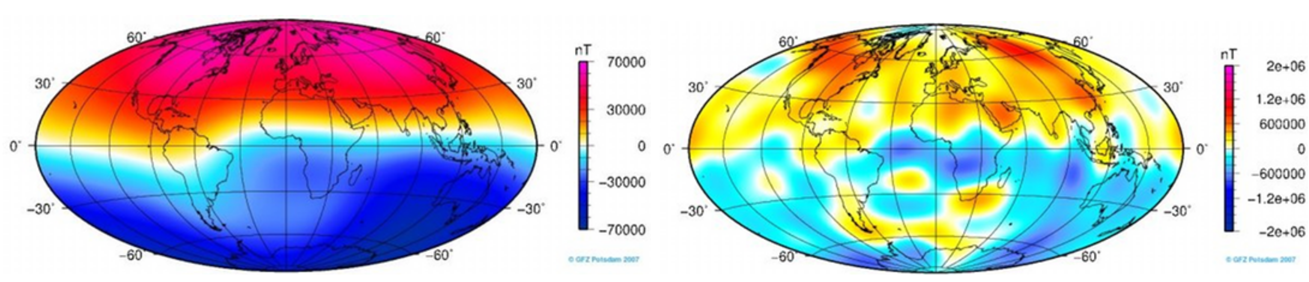


FIGURE 1 – (gauche) Champ magnétique radial B_r sur la surface de la terre en $r = R_{terre}$ et (droite) sur l'interface noyau-manteau $r = R_{noyau}$. Figures provenantes du site web de GFZ Potsdam.

Questions :

1. Expliquer comment on peu reconstituer le champ à l'interface noyau-manteau (CMB core mantle boundary) en $r = R_{noyau}$ à partir des coefficients de Gauss donnés.
2. Expliquer ensuite pourquoi le champ à la surface du noyau semble beaucoup plus finement structuré, comme me montre la figure de droite de ci-dessus.

- **Exercice SUP**

On s'intéresse aux déformations d'un volume d'eau lâchée par des astronautes dans le ISS. En absence de gravité, l'eau tient ensemble à cause de la tension de surface de l'interface eau-air. Au repos, le blob d'eau sera de forme sphérique de rayon R (voir figure 2-gauche) et il règne une pression d'équilibre P_{eau} qui est légèrement au dessus de la pression atmosphérique P_{atm} :

$$P_{eau} = P_{atm} + \frac{2\gamma}{R} \tag{14}$$

Ici on note P_{atm} la pression atmosphérique du gaz entourant la goutte et γ est la tension de surface de l'interface eau-air.

Si on perturbe la goutte, elle se mettra à osciller (voir figure 2-droite) et on peut calculer comment dans la limite des petites déformations. On positionne la surface de la goutte déformée en

$$r = R + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_n^m(t) Y_n^m(\theta, \phi)}_{\xi(\theta,\phi,t)} \tag{15}$$

La déformation ξ est ici décomposée sur la famille des harmoniques sphériques $Y_n^m(\theta, \phi)$. Les amplitudes $A_n^m(t)$ devant chaque "mode" de déformation, peuvent varier au cours du temps. La normale sortante $\vec{n}$ de la goutte déformée est en bonne approximation

$$\vec{n} \simeq \vec{e}_r - \vec{\nabla}\xi + ... \tag{16}$$

pour des petites déformations. A ces déformations de la surface sont associées des écoulements de fluide $\vec{u}(r, \theta, \phi, t)$ à l'intérieur de la goutte. En bonne approximation, cet écoulement est potentiel et incompressible,

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi = 0 \tag{17}$$

ce qui implique donc que le potentiel hydrodynamique $\Phi(r, \theta, \phi, t)$ est Laplacien pour tout temps t. L'écoulement $\vec{u}$ génère une pression $p(r, \theta, \phi, t)$, selon la loi

$$\rho \partial_t \Phi + p = 0 \tag{18}$$

Afin de caractériser les oscillations de la goutte, on doit imposer deux conditions aux limites : la condition cinématique et la condition dynamique, qui ici deviennent

$$\begin{aligned} \partial_t \xi &= u_r|_{r=R} \\ P_{eq} + p|_{r=R} &= P_{atm} + \gamma \nabla \cdot \vec{n} \end{aligned} \tag{19}$$

Questions :

1. Proposer une solution pour le potentiel hydrodynamique Φ, qui est régulier à l'origine $r = 0$ et qui fait apparaitre des coefficients $B_n^m(t)$ qui dépendent du temps.
2. Calculer la pression p associée.
3. Exprimer les deux conditions aux limites et montrer que ceci mène à des systèmes linéaires de la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} A_n^m \\ B_n^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n^m \\ B_n^m \end{bmatrix} \tag{20}$$

   quelque-soient les valeurs de n et m.
4. Trouver les solutions de ce système linéaire et identifier les fréquences d'oscillation de la goutte

FIGURE 2 – (gauche) Volume d'eau sphérique en équilibre en microgravité (droite) déformation du blob (Source NASA)