

---

# Examen de *Mathematica*

Partiel du 6 novembre 2014

Durée : 2 h. Seule l'aide intégrée à *Mathematica* est autorisée.

---

Out[4]=

selectionner votre nom

Ceci est votre carnet d'examen. Soignez la présentation. Enregistrez très régulièrement. Les carnets seront transférés et imprimés par nos soins après l'examen pour être notés.

---

## Exercice 1 : équation différentielle

- 1) Faire résoudre l'équation différentielle  $y'(x) = y(x) + y(x)^2$ , avec la condition initiale  $y(0)=1$ . Tracer une première fois la solution  $sol(x)$  pour  $x$  dans  $[-10,10]$ .
- 2) On peut remarquer qu'il existe trois asymptotes, deux asymptotes horizontales pour  $x \rightarrow -\infty$  et  $x \rightarrow \infty$ , et une asymptote verticale située à une abscisse  $x_1$ , que l'on va déterminer. Déterminer les deux asymptotes horizontales à l'aide de *Limit*. L'une est confondue avec l'axe des abscisses. Définir  $den(x)$ , le dénominateur de  $sol(x)$  et déterminez  $x_1$  à l'aide de  $den$  et *Solve*. Pour éviter les solutions complexes multiples, vous pouvez utiliser l'option *Reals*.
- 3) Retracer la courbe de  $sol(x)$  en y incluant l'asymptote horizontale qui est différente de l'axe des abscisses..
- 4) Calculer le développement en série entière de  $sol(x)$  autour de  $x_1$  au second ordre.
- 5) Le premier terme de ce développement indique que l'aire définie autour de l'asymptote  $x = x_1$  est infinie. Le vérifier en calculant l'intégrale de  $sol(x)$  entre  $x_1 - 1$  et  $x_1$ .
- 6) Faire résoudre maintenant l'équation différentielle  $y'(x) = y(x) + y(x)^3$ , avec la condition initiale  $y(0)=1$ . Utiliser *DSolve*. Tracer une première fois la solution  $sol2(x)$  pour  $x$  dans  $[-3,3]$ .
- 7) Vous constatez que  $sol2(x)$  n'est définie que sur un intervalle  $] -\infty, x_2[$ . Pour calculer  $x_2$ , on peut remarquer que  $sol2(x)$  présente une asymptote verticale  $x = x_2$  justement. Déterminer  $x_2$  de la même façon que vous avez déterminé  $x_1$ .
- 8) Tracer maintenant les parties réelles et imaginaires de  $sol2(x)$ , toujours sur  $[-3,3]$ . Vous constatez qu'en fait, la solution existe sur  $] x_2, \infty[$  mais est imaginaire pure sur cet intervalle. L'asymptote est donc complexe.
- 9) Déterminer les asymptotes de  $sol2(x)$  en  $-\infty$  et  $\infty$  selon la même méthode que pour  $sol(x)$ .
- 10) Calculer l'intégrale de  $sol2(x)$  sur  $] -\infty, x_2[$ . Vous devez utiliser *Integrate* et trouver une valeur remarquable.
- 11) Pour l'intégrale sur  $] x_2, \infty[$ , il faut soustraire à  $sol2(x)$  la valeur de sa limite à l' $\infty$ . Avec cette précaution, l'intégrale est également finie et sa valeur également remarquable.

## Exercice 2 : matrices & algèbre linéaire

1) Définir la matrice identité  $3 \times 3$ , que vous noterez  $i3$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Définir la matrice de permutation, indiquée ci-après, que vous noterez  $j3$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Calculer l'exponentielle de  $j3$ , que vous noterez  $ej3$ . *Attention, il faut utiliser MatrixExp et non Exp.*

*Pour avoir une plus belle expression de  $ej3$ , vous pouvez utiliser FullSimplify et Factor.*

4) Calculer le déterminant de  $ej3$ .

5)  $ej3$  n'est pas unitaire, car  $ej3^\dagger ej3 \neq i3$ . Justement, on définit  $sj3 = ej3^\dagger ej3$ . Calculer  $sj3$ .

*Pour avoir une plus belle expression de  $sj3$ , vous pouvez utiliser FullSimplify.*

6) Calculer les valeurs propres de  $sj3$ . Montrer proprement qu'il n'y en a que deux de différentes (autrement qu'une est dégénérée deux fois).

7) Calculer les vecteurs propres de  $sj3$ . Utiliser FullSimplify.

Appeler  $u$  et  $v$  les vecteurs propres associés à la valeur propre dégénérée. Définir ces vecteurs à partir du résultat du FullSimplify.

8) Calculer  $up = u - \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$  la projection du vecteur  $u$  orthogonalement à  $v$ . Vérifier que  $up \perp v$ .

9) Définir finalement  $u2$ ,  $v2$  et  $w2$  trois vecteurs propres unitaires et orthogonaux entre eux. La matrice  $p = \{u2, v2, w2\}$  est la transposée donc l'adjointe de la matrice de passage entre la base canonique et la base  $(u2, v2, w2)$ .

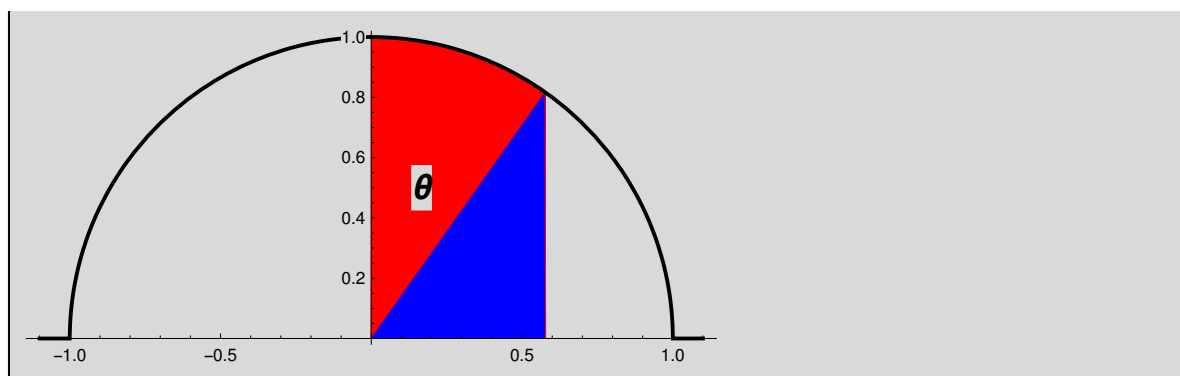
10) Vérifier que  $p$  est unitaire. C'est donc également l'inverse de la matrice de passage entre la base canonique et la base  $(u2, v2, w2)$ , de sorte que la formule de diagonalisation de  $sj3$  doit s'écrire ici (en tenant compte de la réalité de  $p$ ) :

$p \cdot sj3 \cdot p^t = d$ , où  $m^t$  désigne la transposée de  $m$  et  $d$  est la matrice diagonale constituée des valeurs propres de  $sj3$  dans l'ordre dans lequel vous avez défini  $p$ .

11) Vérifier la formule précédente, puis calculer  $sj3^{-1}$  l'inverse de  $sj3$  par la formule  $sj3^{-1} = p^t d^{-1} p$ . Vérifier ce résultat directement.

## Exercice 3

Le but de l'exercice est de reproduire la figure suivante et de calculer les aires y incluses :



1) Définir la fonction  $fcerc(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , qui décrit le demi-cercle supérieur.

2) L'aire de la surface délimitée par le cercle, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par les points d'abscisse  $x$  et  $x_0$  (autrement dit la réunion des aires rouge et bleu), est donné par la primitive de  $fcerc$ , que l'on notera  $pcerc$  ; elle vaut  $pcerc(x) - pcerc(x_0)$ .

Cette primitive est calculée par la fonction *Integrate*, avec une syntaxe spécifique que vous consulterez avec **Help** (regardez les exemples si les termes anglais vous déconcertent).

Définissez  $pcerc(x)$  sans introduire de paramètre  $x_0$ . Au contraire, calculez  $pcerc(0)$  et  $pcerc(\frac{\pi}{2})$  et notez que *Mathematica* choisit  $x_0 = 0$ .

3) Cette aire est constituée de deux termes. L'interprétation géométrique de chaque terme est extrêmement éclairante, puisque l'un est le secteur défini par l'angle  $\theta = \text{Arcsin}(x)$  (aire en rouge) tandis que l'autre est le demi-rectangle de hauteur  $\cos(\theta)$  et de largeur  $x = \sin(\theta)$ , coupé selon le rayon d'angle  $\theta$  (aire en bleu).

Définissez les fonctions correspondants aux frontières de ces surfaces, pour  $x = 1 / \sqrt{3}$ .

*Indication : notez que le rayon est une fonction linéaire de pente  $\tan(\theta)$ . Prolongez les fonctions par 0.*

Reproduisez le graphe ci-dessus, à l'aide de ces fonctions. Les remplissages sont optionnels et réservés aux étudiants qui en auront le temps, il faut utiliser la commande *Filling* et consulter la page **Help** correspondante. Le symbole  $\theta$  est produit par *Epilog* et *Inset* (consultez le **Help**) et est également optionnel.