Examen de *Mathematica*

Partiel du 6 novembre 2014

Durée : 2 h. Seule l'aide intégrée à *Mathematica* est autorisée.

Out[4]= selectionner votre nom

Ceci est votre carnet d'examen. Soignez la présentation. Enregistrez très régulièrement. Les carnets seront transférés et imprimés par nos soins après l'examen pour être notés.

Exercice 1 : équation différentielle

1) Faire résoudre l'équation différentielle $y'(x) = 2\,y(x) + y(x)^2$, avec la condition initiale *y(0)=1.* Tracer une première fois la solution *sol*(*x*) pour *x* dans [-10,10].

2) On peut remarquer qu'il existe trois asymptotes, deux asymptotes horizontales pour x→-∞ et x→∞, et une asymptote verticale située à une absicsse x_1, que l'on va déterminer.
Déterminer les deux asymptotes horizontales à l'aide de *Limit*. L'une est confondue avec l'axe des abscisses.
Définir *den*(*x*), le dénominateur de *sol*(*x*) et déterminez x_1 à l'aide de *den* et *Solve*. Pour éviter les solutions complexes multiples, vous pouvez utiliser l'option *Reals*.

3) Retracer la courbe de *sol*(*x*) en y incluant l'asymptote horizontale qui est différente de l'axe des abscisses..

4) Calculer le développement en série entière de *sol*(*x*) autour de x_1 au second ordre.

5) Le premier terme de ce développement indique que l'aire définie autour de l'asymptote $x = x_1$ est infinie. Le–vérifier en calculant l'intégrale de sol(x) entre $x_1 - 1$ et x_1.

6) Faire résoudre maintenant l'équation différentielle $y'(x) = 2\,y(x) + y(x)^3$, avec la condition initiale *y(0)=1*. Utiliser *DSolve.* Tracer une première fois la solution *sol2*(*x*) pour *x* dans [-3,3].

7) Vous constatez que *sol2*(*x*) n'est définie que sur un intervalle $]-\infty, x_2[$. Pour calculer x_2, on peut remarquer que *sol2*(*x*) présente une asymptote verticale e n $x = x_2$ justement. Déterminer x_2 de la même façon que vous avez déterminé x_1.

8) Tracer maintenant les parties réelles et imaginaires de *sol2*(*x*), toujours sur [-3,3]. Vous constatez qu'en fait, la solution existe sur $]x_2, \infty[$ mais est imaginaire pure sur cet intervalle. L'asymptote est donc complexe.

9) Déterminer les asymptotes de *sol2*(*x*) en -∞ et ∞ selon la même méthode que pour *sol*(*x*).

10) Calculer l'intégrale de *sol2*(*x*) sur $]-\infty, x_2[$. Vous devez utiliser *Integrate* et trouver une valeur remarquable.

11) Pour l'intégrale sur $]x_2, \infty[$. il faut soustraire à *sol2*(*x*) la valeur de sa limite à l'∞. Avec cette précaution, l'intégrale est également finie et sa valeur également remarquable.

Exercice 2 : matrices & algèbre linéaire

1) Définir la matrice identité 3×3, que vous noterez *i3*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Définir la matrice de permutation, indiquée ci-après, que vous noterez *j3*.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Calculer l'exponentielle de *j3*, que vous noterez *ej3. Attention, il faut utiliser MatrixExp et non Exp.*
Pour avoir une plus belle expression de ej3, vous pouvez utiliser FullSimplify et Factor.

4) Calculer le déterminant de *ej3.*

5) *ej3* n'est pas unitaire, car $ej3^\dagger\ ej3 \neq i3$. Justement, on définit $sj3 = ej3^\dagger\ ej3$. Calculer *sj3.*
Pour avoir une plus belle expression de sj3, vous pouvez utiliser FullSimplify.

6) Calculer les valeurs propres de *sj3.* Montrer proprement qu'il n'y en a que deux de différentes (autrement qu'une est dégénérée deux fois).

7) Calculer les vecteurs propres de *sj3.* Utiliser *FullSimplify*.
Appeler *u* et *v* les vecteurs propres associés à la valeur propre dégénérée. Définir ces vecteurs à partir du résultat du *FullSimplify*.

8) Calculer $up = u - \frac{u.v}{v.v}\, v$ la projection du vecteur *u* orthogonalement à *v*. Vérifier que $up \perp v$.

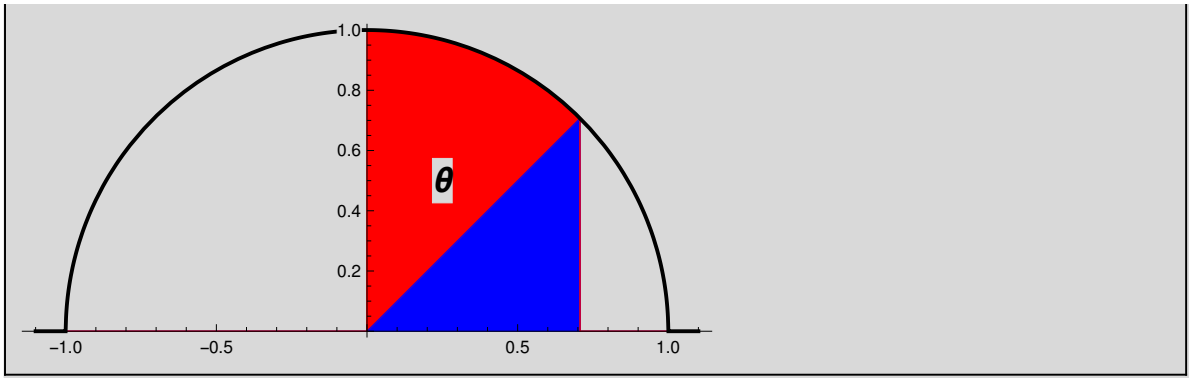
9) Définir finalement *u2*, *v2* et *w2* trois vecteurs propres unitaires et orthogonaux entre eux. La matrice $p = \{u2, v2, w2\}$ est la transposée donc l'adjointe de la matrice de passage entre la base canonique et la base (*u2*,*v2*,*w2*).

10) Vérifier que *p* est unitaire. C'est donc également l'inverse de la matrice de passage entre la base canonique et la base (*u2*,*v2*,*w2*), de sorte que la formule de diagonalisation de *sj3* doit s'écrire ici (en tenant compte de la réalité de *p*) :
$p.sj3.p^t = d$, où m^t désigne la transposée de *m* et *d* est la matrice diagonale constituée des valeurs propres de *sj3* dans l'ordre dans lequel vous avez défini *p*.

11) Vérifier la formule précédente, puis calculer $sj3^{-1}$ l'inverse de *sj3* par la formule $sj3^{-1} = p^t\, d^{-1}\, p$. Vérifier ce résultat directement.

Exercice 3

Le but de l'exercice est de reproduire la figure suivante et de calculer les aires y incluses :



1) Définir la fonction *fcerc(x)*=$\sqrt{1-x^2}$, qui décrit le demi-cercle supérieur.

2) L'**aire** de la surface délimitée par le cercle, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par les points d'abscisse x et x_0 (autrement dit la réunion des aires rouge et bleu), est donné par la primitive de *fcerc*, que l'on notera *pcerc* ; elle vaut *pcerc*(x) – *pcerc*(x_0).
Cette primitive est calculée par la fonction *Integrate*, avec une syntaxe spécifique que vous consulterez avec **Help** (regardez les exemples si les termes anglais vous déconcertent).
Définissez *pcerc*(x) **sans** introduire de paramètre x_0. Au contraire, calculez *pcerc*(0) et *pcerc*$\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et notez que *Mathematica* choisit $x_0 = 0$.

3) Cette aire est constituée de deux termes. L'interprétation géométrique de chaque terme est extrêmement éclairante, puisque l'un est le secteur défini par l'angle *θ=Arcsin(x)* (aire en rouge) tandis que l'autre est le demi-rectangle de hauteur *cos*(*θ*) et de largeur x=*sin*(*θ*), coupé selon le rayon d'angle *θ* (aire en bleu).
Définissez les fonctions correspondants aux frontières de ces surfaces, pour $x = 1\Big/\sqrt{2}$. Calculer l'angle *θ*.
Indication : notez que le rayon est une fonction linéaire de pente tan(θ). Prolongez les fonctions par 0.
Reproduisez le graphe ci-dessus, à l'aide de ces fonctions. Les remplissages sont optionnels et réservés aux étudiants qui en auront le temps, il faut utiliser la commande *Filling* et consulter la page **Help** correspondante. Le symbole *θ* est produit par *Epilog* et *Inset* (consultez le **Help**) et est également optionnel.