Partiel de Mécanique des fluides

Mardi 3 novembre 2015, durée 3h

I. Tube de Venturi

Un tube de Venturi est un tube destiné à mesurer la vitesse d'un fluide en écoulement. Il se compose d'un convergent conique prolongé par un col cylindrique et suivi d'un divergent conique.
Le fluide utilisé dans le Venturi est de l'air de masse volumique $\rho = 1$ kg m^{-3}. On considère l'écoulement d'air comme l'écoulement d'un fluide parfait, incompressible, stationnaire et non pesant. La vitesse est uniforme sur une section donnée, elle est notée U_1 et U_2 respectivement dans les sections S_1 et S_2. La section d'entrée du convergent est $S_1 = 4$ cm^2 et le rapport des sections est $S_1/S_2 = 10$.
Les points 1 et 2 sont branchés sur un tube en U contenant du mercure de masse volumique $\rho_{Hg} = 13.6\,10^3$ kg m^{-3}. La différence de hauteur de mercure est notée Δh. On rappelle que dans la direction transverse à un écoulement parallèle, la pression varie de façon hydrostatique.

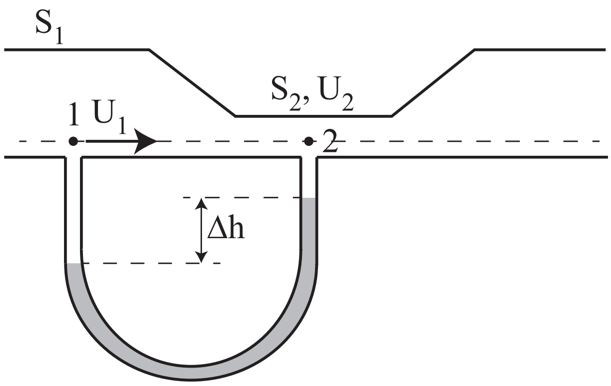

FIGURE 1 – Tube de Venturi.

1. Exprimer la différence de pression $p_1 - p_2$ en fonction de la vitesse U_2 dans le col. Quel est son signe et que cela implique-t-il ?
2. Exprimer U_2 en fonction de la différence de hauteur de mercure Δh. Faire l'application numérique dans le cas où on mesure $\Delta h = 2$ mm. En déduire le débit d'air dans le Venturi que vous exprimerez en L/min.

II. Écoulement sur plan incliné

On souhaite étudier l'écoulement stationnaire d'une rivière le long d'un plan incliné. On note Ox la direction longitudinale à l'écoulement et Oz la direction transverse (voir figure 2). On suppose que la rivière conserve une hauteur d'eau h constante le long de la pente. La largeur de la rivière (normale au plan de la figure selon

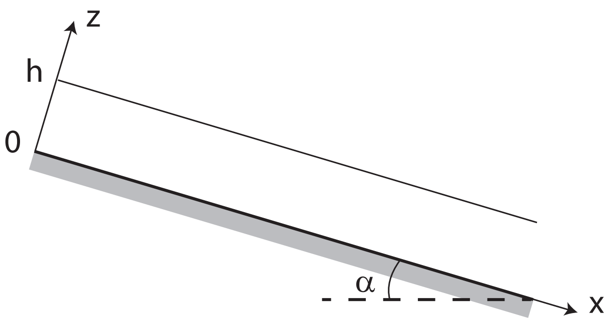

FIGURE 2 – Schématisation de la géométrie de l'écoulement.

Oy) étant très grande devant sa profondeur h, l'écoulement est considéré comme bidimensionnel. Le champ de vitesse de cet écoulement est donné par

$$\overrightarrow{v} = v_0 \left[2\left(\frac{z}{h}\right) - \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right] \overrightarrow{e_x}.$$

1. Déterminer l'allure du champ de vitesse. Faire un schéma. Cet écoulement est-il incompressible ?
2. Déterminer les trajectoires suivies par une particule fluide. Déterminer les lignes de courant. Coïncident-elles ?
3. Calculer le champ de vorticité.
4. Calculer le vecteur accélération $d\overrightarrow{v}/dt$.
5. Calculer le tenseur des gradients de vitesse, le tenseur des déformations, ainsi que le tenseur des rotations pures.
6. Déterminer les directions de compression et de dilatation.
   Comment varie la déformation (compression et dilatation) d'une particule fluide avec l'altitude ? Où est-elle maximale et où est-elle nulle ?

III. Écoulement au-dessus d'un obstacle : régime fluvial et régime torrentiel

Une rivière dont la surface libre est à la pression atmosphérique p_0 s'écoule à la vitesse U_0 sur une profondeur h_0, le sol pouvant être considéré comme horizontal. On suppose que l'écoulement est stationnaire et que le fluide se comporte comme un fluide parfait, incompressible et pesant. La vitesse est uniforme sur toute la hauteur d'eau. On désigne par ρ sa masse volumique et $\overrightarrow{g}$ le champ de pesanteur uniforme. Au voisinage d'une certaine région, le sol présente une bosse de profil $e(x)$. On admet que la pente de/dx de la bosse est faible de sorte que le vecteur vitesse reste horizontal (composante verticale de la vitesse reste nulle). On va chercher, dans cet exercice, à comprendre comment l'écoulement à surface libre va se comporter au franchissement d'un obstacle sous-marin.

1. Trouver une relation reliant la vitesse $U(x)$ de l'eau au-dessus de la bosse à la vitesse initiale U_0 et les hauteurs d'eau h_0 et $h(x)$.
2. Énoncer le théorème de Bernoulli. Quelles sont les hypothèses qui conditionnent son application ?

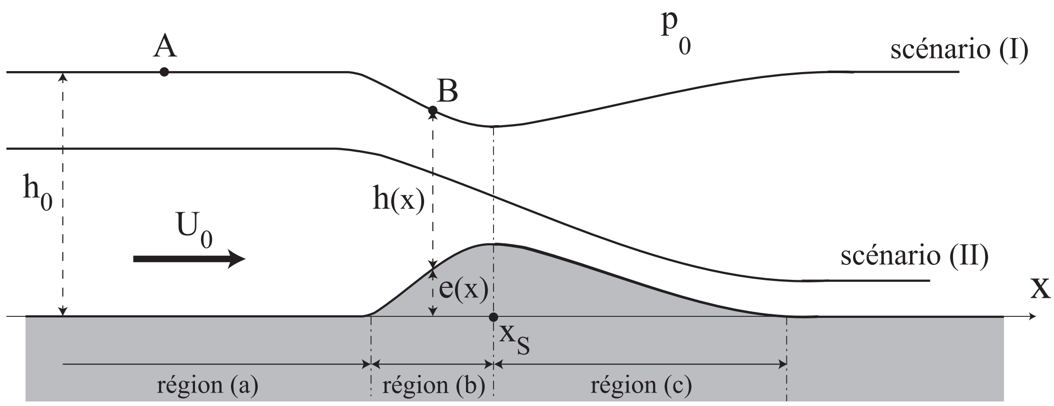

FIGURE 3 – Passage d'un écoulement d'eau au-dessus d'un obstacle. Le comportement de la couche fluide peut se faire selon deux scénarios, selon la valeur du nombre de Froude local Fr(x).

3. En déduire une deuxième équation reliant $U(x)$ à U_0.
4. Déduire des équations établies précédemment que

$$\frac{dU(x)}{dx}\left[U(x)-\frac{gh(x)}{U(x)}\right]+g\frac{de(x)}{dx}=0. \tag{1}$$

5. On souhaite établir les différents comportements de cet écoulement après le passage au sommet de l'obstacle en $x = x_S$.
   Le nombre de Froude est un nombre sans dimension important en mécanique des fluides qui représente le rapport entre l'énergie cinétique du fluide en mouvement et l'énergie potentielle de ce même fluide de hauteur h. Il s'écrit

$$Fr(x)=\frac{U(x)}{\sqrt{gh(x)}}.$$

   Il a un rôle fondamental pour caractériser les écoulements à surface libre : on parle d'écoulement en régime fluvial lorsque $Fr(x) < 1$, tandis qu'on parle d'écoulement en régime torrentiel lorsque $Fr(x) > 1$. On considère que l'écoulement initial est assez lent et la hauteur d'eau assez grande, de sorte que le nombre de Froude initial Fr_0 soit inférieur à l'unité.

   (a) Exprimer les solutions de l'équation (1) au passage du sommet de la bosse.
   (b) Exprimer à quelles situations (I) et (II), voir figure 3, correspondent ces solutions en justifiant la variation de dU/dx, dh/dx et du nombre de Froude dans les régions (a), (b) et (c). Expliquer la nature de l'écoulement, fluvial ou torrentiel, pour les situations (I) et (II).

IV. Le camion-citerne

Un camion-citerne est un véhicule utilisé pour le transport de liquides ou de gaz. On considère le cas où la citerne de hauteur $H = 2$ m est partiellement remplie d'un liquide de masse volumique ρ sur une hauteur $h = 1.5$ m (figure 4). La citerne est à l'air libre de sorte que la pression de l'air à l'interface est égale à la pression atmosphérique p_0. La longueur de la citerne est $\ell = 4$ m et sa largeur dans la direction Oy est L. On

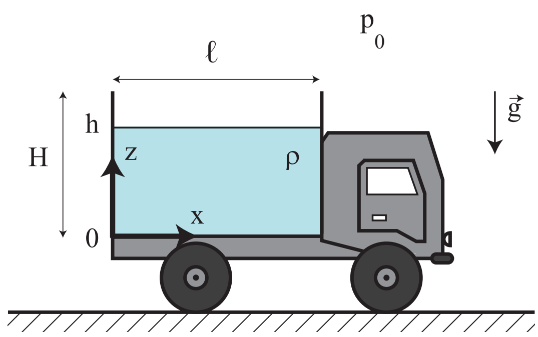

FIGURE 4 – Schématisation du fluide au repos dans la citerne lorsque le camion est immobile.

s'intéresse dans cet exercice à l'équilibre hydrostatique du liquide dans la citerne. Vous devrez faire attention à la nature du référentiel d'étude. On se place dans le référentiel du camion.

1. On considère, dans un premier temps, que le camion citerne avance à vitesse constante le long de l'axe Ox.
   (a) Rappeler la loi de l'hydrostatique d'un fluide à l'équilibre soumis au champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g}$.
   (b) Exprimer la pression $p(x, z)$ du liquide dans la citerne. Tracer l'évolution de la pression entre le fond de la citerne et la surface libre.
   (c) Déterminer la forme de la surface libre du liquide dans la citerne.

2. On considère, cette fois, que le camion est en mouvement uniformément accéléré par rapport au référentiel terrestre, $\overrightarrow{a_c} = a\,\overrightarrow{e_x}$.
   (a) Écrire la loi de l'hydrostatique qui s'applique au volume de liquide contenu dans la citerne.
   (b) Déterminer le champ de pression $p(x, z)$ à une constante d'intégration près, que l'on notera K.
   (c) Exprimer l'altitude $z_L(x)$ de la surface libre du liquide en fonction de p_0, ρ, g, a, K et x.
   (d) Déterminer la constante d'intégration K par conservation du volume d'eau dans la citerne.
   (e) En déduire le champ de pression $p(x, z)$ et l'équation de la surface libre $z_L(x)$. A quoi est proportionnelle la pente de la surface libre ?
   (f) Calculer l'accélération critique a_M du camion au-delà de laquelle le liquide débordera de la citerne.

3. ***Question bonus :*** Le conducteur souhaite faire sa livraison le plus rapidement possible tout en évitant de perdre du liquide en chemin. Il décide alors d'installer un accéléromètre dans sa cabine. Pour cela, il utilise un bocal fermé, partiellement rempli d'eau de masse volumique ρ_e, et un bouchon de liège, de masse m et de volume V tel que $m/V < \rho_e$, qui est maintenu par une ficelle fixée au fond du bocal (voir figure 5). On suppose que le fil est suffisamment court pour que le bouchon de liège soit toujours immergé. On se place toujours dans le cas où le camion-citerne est en mouvement uniformément accéléré.
   (a) L'allure des isobares dans le bocal et dans la citerne est identique. Quelle est la direction de la force de pression résultante que l'eau exerce sur le bouchon de liège ? Faites un schéma pour vous aider. Quelle est la direction du vecteur poussée d'Archimède ?
   Exprimer la poussée d'Archimède $\overrightarrow{A}$ que l'eau exerce sur le bouchon de liège.

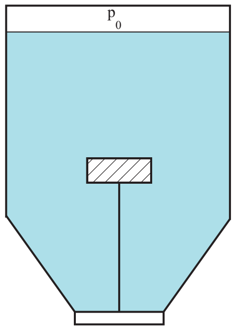

FIGURE 5 – Schématisation de l'accéléromètre.

(b) Archimède élabora dans son ≪ Traité des corps flottants ≫, la célèbre loi : "*tout corps plongé dans un fluide subit une poussée verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du fluide déplacé*".
Que pensez-vous de cette loi en application à cet exercice ?

(c) Faire le bilan des forces sur le bouchon à l'équilibre, en vous aidant de la réponse de la question 3a. Exprimer vectoriellement la tension du fil $\overrightarrow{T}$ en fonction de ρ_e, m, V, $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{a_c}$. Quelle est la direction de $\overrightarrow{T}$ par rapport à $\overrightarrow{A}$?

(d) Exprimer l'angle θ que forme le fil avec la verticale. Quel est alors l'angle maximal θ_M que doit former le fil avec la verticale afin de ne pas excéder l'accélération critique a_M calculée à la question 2f ? Le calculer.