

## PARTIEL : « COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX »

03 Mars 2014. Les téléphones portables ne sont pas autorisés.

La durée totale de l'épreuve est de 2h. Les deux premiers exercices correspondent à des questions de cours. Ils sont à rendre quand vous les avez terminés (maximum une demi-heure pendant laquelle les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés) en échange du sujet d'examen.

Vous pourrez ensuite résoudre le problème jusqu'à la fin de l'épreuve. Les documents et les calculatrices sont alors autorisées.

### EXERCICE 1 : QUESTIONS DE COURS

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier brièvement votre réponse :

- 1 - Dans un cristal ionique, la cohésion est due à une énergie d'interaction électrostatique qui varie comme l'inverse de la distance entre premiers voisins.
- 2 - La taille des ions dans un cristal ionique n'a aucune influence sur la structure d'un cristal ionique.
- 3 - Une poutre de béton armé, c'est-à-dire renforcée par des tiges métalliques parallèles les unes aux autres, est un matériau isotrope.
- 4 - Les métaux sont les matériaux les plus rigides (module élastique élevé)
- 5 - Essayons de comprendre ce qui se passe dans une perforatrice : un poinçon de diamètre 1 cm est poussé vers le bas avec une force de 100 kN vers un trou percé dans une cale. Entre l'extrémité du poinçon et le trou, on place une pile de papier de hauteur  $e = 1$  mm. Quelle contrainte de cisaillement est appliquée au papier ?

### EXERCICE 2 : COMPRESSIBILITÉ

- 1 - Dans un milieu cubique, combien y a-t-il de modules élastiques indépendants ? Qu'en est-il d'un milieu isotrope ?
- 2 - Écrire les expressions de  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$ ,  $\varepsilon_{xz}$  et  $\varepsilon_{xy}$  en fonction de  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{xy}$  pour un milieu isotrope.
- 3 - En déduire le tenseur de complaisance d'un milieu isotrope.
- 4 - Quelle relation peut-on alors établir entre la Trace( $\varepsilon$ ) et la Trace( $\sigma$ ) en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson  $\nu$  ?

On plonge un ballon de baudruche rempli d'eau au fond de la mer.

- 5 - Quel type de contrainte subit le ballon : cisaillement, compression, traction ? dans quelle(s) direction(s) ? On appelle  $\Delta P$  la contrainte de pression. Donnez le tenseur des contraintes.
- 6 - Que vaut la Trace( $\sigma$ ) ?
- 7 - Que représente physiquement la Trace( $\varepsilon$ ) ? L'exprimer en fonction de E,  $\nu$  et  $\Delta P$ .
- 8 - Sachant que la compressibilité est définie comme :  $\chi = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ , exprimer  $\chi$  en fonction de E et  $\nu$ .
- 9 - De combien est comprimé le ballon lorsqu'il est rempli d'eau ? Que vaut la compressibilité de l'eau ? Que peut-on en conclure sur  $\nu$  ?

**PROBLÈME : BÉTON PRÉ-CONTRAINT**

Données :	Module d'Young	Contrainte de rupture en traction	Contrainte de rupture en compression	Fraction volumique quand on ajoute l'acier	Coefficient de Poisson
acier	$E_a = 200 \text{ GPa}$	$\sigma_{ta} = 250 \text{ MPa}$		$0.2 = f_a$	
béton	$E_b = 10 \text{ GPa}$	$\sigma_{tb} = 10 \text{ MPa}$	$\sigma_{cb} = 30 \text{ MPa}$	$0.8 = f_b$	0.18

**Question préliminaire indépendante :**

- 1 - D'après le tableau ci-dessus, à quelle sollicitation le béton résiste le moins bien ?
- 2 - On veut fabriquer un pont en béton. La pièce principale est une arche en béton armé. Elle est donc en flexion : dessiner le pont en coupe. Représenter sur le schéma la zone du pont en traction et celle en compression ?
- 3 - Proposer la position de l'armature pour un renforcement efficace.

Dans le bâtiment, on utilise souvent du béton armé, et éventuellement pré-contraint. Par exemple, le stade de France a été conçu uniquement à l'aide de blocs de béton pré-contraint.

**Béton armé**

- 4 - Rappeler la définition du module d'Young et du coefficient de Poisson dans le cas d'un matériau isotrope.
- 5 - On considère une poutre en béton de section carrée de côté  $b = 20 \text{ cm}$  et de longueur  $L = 5 \text{ m}$ . Quelle force de traction faut-il exercer (dans le sens de sa longueur) pour atteindre la rupture ? Quel est alors l'allongement de la poutre ? Quelle est sa variation de largeur ?
- 6 - Pour accroître la résistance de cette poutre à la traction, on arme cette poutre avec une âme en acier, c'est-à-dire une tige de même longueur que la poutre et dont la fraction volumique  $f_a$  est indiquée dans le tableau. La section totale de la poutre est la même que précédemment mais une partie du béton est remplacée par l'acier. Quelle est le côté  $a$  de la poutre en acier de section carrée ?
- 7 - On applique, dans la direction parallèle à l'âme, une force de traction  $F$  donc une contrainte de traction  $\sigma$  à cette poutre armée. On appelle  $\sigma_a$  et  $\sigma_b$  les contraintes subies respectivement par l'acier et par le béton. On appelle  $\varepsilon$  l'allongement relatif de la poutre.
  - a) Donnez la déformation de l'acier  $\varepsilon_a$  et du béton  $\varepsilon_b$  en fonction de  $\varepsilon$ .
  - b) Établir la relation entre  $\sigma_a$  et  $\varepsilon_a$  d'une part et  $\sigma_b$  et  $\varepsilon_b$  d'autre part.
  - c) Exprimer  $\sigma$  en fonction de  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$ ,  $f_a$  et  $f_b$  en justifiant votre réponse.
  - d) En déduire la relation entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$  et le module d'Young effectif  $E$  de la poutre armée dans la direction de l'âme.
  - e) Montrer que :

$$\sigma_a = \frac{E_a}{f_a E_a + f_b E_b} \sigma$$

et que

$$\sigma_b = \frac{E_b}{f_a E_a + f_b E_b} \sigma$$

- f) En déduire la contrainte en traction limite que peut supporter la poutre avant que l'un ou l'autre des composants n'atteigne la rupture.

### Béton pré-contraint

- 8 - Pour augmenter encore cette limite, on pré-contraint le béton. On applique une contrainte  $\sigma_1$  à l'acier. On coule le béton autour. Puis, quand le béton est sec, on relâche la contrainte (voir figure 1).

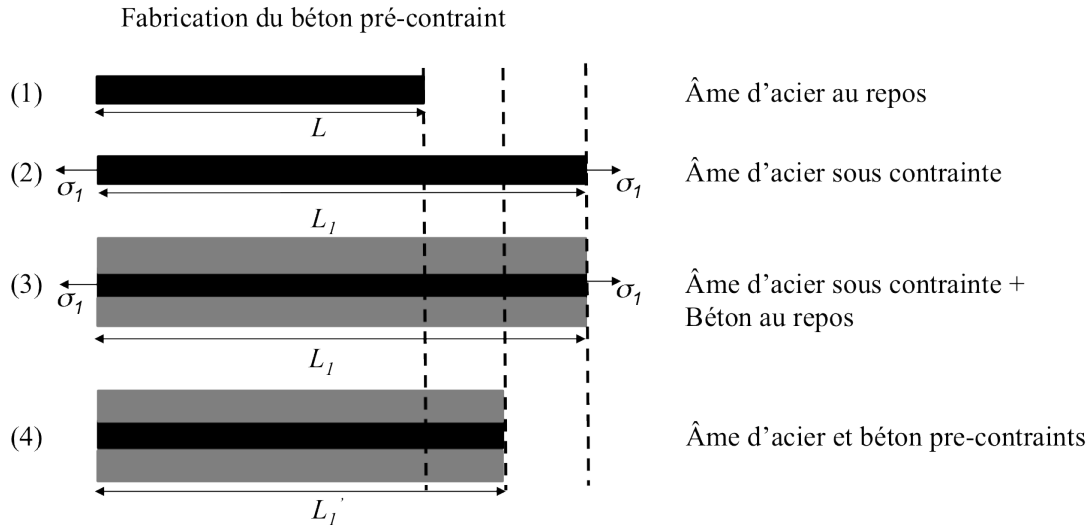


FIGURE 1 – Différentes étapes de fabrication du béton pré-contraint.

- a - On appelle  $\sigma_{ai}$  et  $\sigma_{bi}$  les contraintes internes dans l'acier et dans le béton respectivement. Quels sont les signes respectifs de ces deux contraintes (pour l'instant le matériau ne subit pas de contrainte externe donc la somme des contraintes internes doit être nulle)
- b - Expliquez qualitativement l'intérêt du béton pré-contraint.
- c - On appelle  $L_1$  la longueur de l'âme étirée sous une contrainte de traction  $\sigma_1$ . Exprimer l'allongement relatif de l'âme  $\varepsilon_1$  puis sa longueur  $L_1$  en fonction de  $\sigma_1$ . AN :  $\sigma_1 = 150$  MPa
- d - Cette longueur  $L_1$  est donc la longueur au repos du béton sec. Quand on relâche la contrainte sur l'âme, la longueur de la poutre est  $L'_1$ . Exprimer la déformation relative  $\varepsilon_{ai}$  et  $\varepsilon_{bi}$  de chacune de deux parties du matériau (par rapport à leur longueur respective au repos) en fonction de  $L'_1$ ,  $L$  et  $L_1$ .

Lorsque  $L$  et  $L_1$  sont proches, on pourra admettre que  $\varepsilon_{ai} \sim \varepsilon_{bi} + \varepsilon_1$ .

- e - La somme des contraintes internes étant nulle, exprimer la déformation relative du béton  $\varepsilon_{bi}$  en fonction de  $\varepsilon_1$ . En déduire la contrainte interne dans le béton  $\sigma_{bi}$ . Comparez avec votre réponse à la question a.
- f - On applique une contrainte externe de traction  $\sigma_e$  sur cette poutre précontrainte. Jusqu'à quelle contrainte appliquée, le béton reste-t-il en compression ?

On veut maintenant déterminer la contrainte de rupture de cette poutre en béton pré-contraint.

- g - Si on applique une contrainte externe  $\sigma_e$  à la poutre, quelle sont les contraintes  $\sigma_{be}$  et  $\sigma_{ae}$  appliquées au béton et à l'acier respectivement (On utilisera le résultat de la question 4e) ?
- h - Quelle est la contrainte totale  $\sigma_{b_{tot}}$  dans le béton et  $\sigma_{a_{tot}}$  dans l'acier ?
- i - En déduire pour quelle contrainte externe de traction  $\sigma_{cb}$  ou  $\sigma_{ca}$  il y a rupture du béton ou de l'âme. Conclure.