LICENCE DE PHYSIQUE 2010-2011 **Université Paris 11**

L3 PAPP **MATHÉMATIQUES II**

PROBLÈME 1 - SINUS CARDINAL

Il s'agit d'un approfondissement de certaines questions de la première séance de travaux dirigés.

1 Convergence altérnee

La convergence des intégrales $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}(x)dx$ et $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ sont de même nature : les aires sont successivement positives et négatives, comme on le voit sur les figures suivantes :

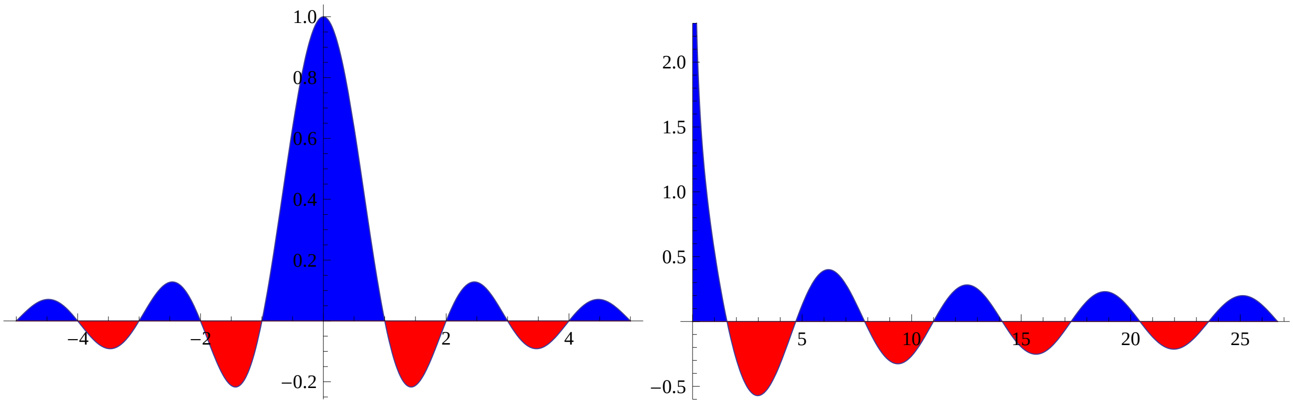

FIGURE 1 – Courbes de sinc (à gauche) et de $\cos/\sqrt{}$ (à droite).

Les zéros des fonctions sinc ou $\cos/\sqrt{}$ sont périodiques, on peut donc facilement interpréter les intégrales de 0 à l'infini comme la somme alternée des aires positives et négatives.

Pour appliquer le théorème sur la convergence des séries alternées, et assurer ainsi l'existence de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}(x)dx = 2\int_0^\infty \mathrm{sinc}(x)dx$ ou $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$, il suffit de vérifier que les aires sont, en valeur absolue, strictement décroissantes.

C'est l'objet de cette première section. Les calculs étant absolument similaires, on se contentera d'étudier $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$. On notera $I_k = \int_{(k+\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{3}{2})\pi} \cos x/\sqrt{x}dx$.

a. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n} < 0$ et $I_{2n+1} > 0$.

b. Montrer que $\forall x \in \left[(2n+\frac{1}{2})\pi, (2n+\frac{3}{2})\pi\right]$

$$0 < -\frac{\cos x}{\sqrt{(2n+\frac{3}{2})\pi}} < -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} < -\frac{\cos x}{\sqrt{(2n+\frac{1}{2})\pi}} .$$

c. Montrer que $\forall x \in \left[(2n+\frac{3}{2})\pi, (2n+\frac{5}{2})\pi\right]$

$$0 < \frac{\cos x}{\sqrt{(2n+\frac{5}{2})\pi}} < \frac{\cos x}{\sqrt{x}} < \frac{\cos x}{\sqrt{(2n+\frac{3}{2})\pi}} .$$

On notera $U_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\sqrt{4n+1}}$ et $V_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\sqrt{4n+3}}$.

d. Montrer, à l'aide des inégalités précédentes, que

$$0 < V_n < -I_{2n} < U_n \qquad \text{et} \qquad 0 < U_{n+1} < I_{2n+1} < V_n \ .$$

e. En déduire finalement que

$$-I_{2n} > I_{2n+1} > -I_{2n+2} > I_{2n+3} \ldots$$

Facultatif : établir le résultat de façon rigoureuse par récurrence ; sinon, vous pouvez vous contenter d'une démarche intuitive.

2 Transformée de Fourier de $\cos(x^2)$

Vous avez montré en travaux dirigés que la convergence de $\int_{\mathbb{R}} \cos(x^2)dx$ découle de celle de $\int_0^\infty \cos x/\sqrt{x}dx$. On admettra ce résultat ainsi que la convergence de $\int_{\mathbb{R}} \sin(x^2)dx$. On veut en déduire celle de $\int_{\mathbb{R}} \cos(x^2)\cos(2\pi kx)dx$, $\forall k \in \mathbb{R}$ (c'est une intégrale de Fourier, qui sera étudiée ultérieurement en cours). Il s'agit ici de simples manipulations trigonométriques.

a. Montrer que la fonction $\cos(x^2)\cos(2\pi kx)$ s'écrit $1/2(\cos(x^2 + 2k\pi x) + \cos(x^2 - 2k\pi x))$.

b. En déduire finalement une expression de $\int_{\mathbb{R}} \cos(x^2)\cos(2\pi kx)dx$ en fonction de $\int_{\mathbb{R}} \cos(x^2)dx$, $\int_{\mathbb{R}} \sin(x^2)dx$ et d'un facteur dépendant de k, dont vous donnerez l'expression explicite.