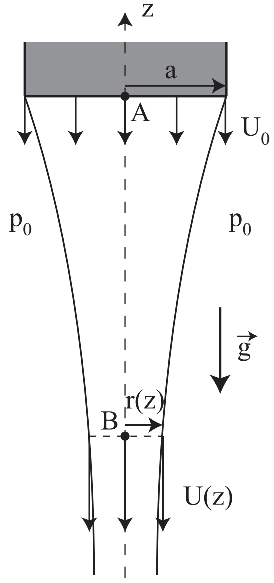
Examen de Mécanique des fluides

Mardi 5 janvier 2016, durée 3h

I. Évolution d'un jet d'eau sous l'action de la pesanteur

On propose dans ce problème d'étudier une situation que l'on expérimente quotidiennement : quelle est la loi d'évolution d'un jet d'eau lorsque l'on ouvre un robinet ? $\bigtriangledown$ $\triangledown$
On considère un robinet de rayon a qui laisse couler de l'eau, de masse volumique ρ, à l'air libre à la pression atmosphérique p_0. Le jet qui en résulte est orienté vers le bas et accélère sous l'effet de la pesanteur. On suppose que l'eau est un fluide parfait en écoulement stationnaire incompressible et que la vitesse du jet est indépendante du rayon et est décrite par $U(z)$. Nous souhaitons déterminer la loi d'évolution du rayon $r(z)$ du jet et sa vitesse $U(z)$ avec la distance à l'orifice. On oriente l'axe Oz vers le haut et l'origine des axes est pris à la sortie de l'orifice.

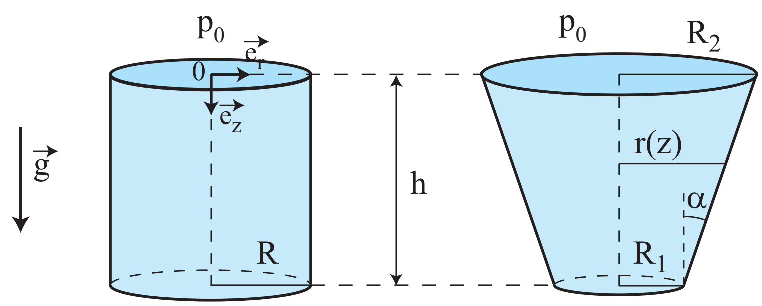


1. On souhaite déterminer les lois d'évolution d'un jet d'eau à l'air libre sous l'action de la pesanteur.
   (a) Déterminer la loi d'évolution du rapport des vitesses $U(z)/U_0$ en fonction de la coordonnée z par application du théorème de Bernoulli.
   (b) En déduire la loi d'évolution du rapport des rayons $r(z)/a$. Commenter vos résultats.
2. On souhaite retrouver ces résultats à partir de l'équation de Navier-Stokes. On utilise le système de coordonnées cartésiennes.
   (a) Rappeler l'expression de l'équation de Navier-Stokes sous forme vectorielle et préciser la signification de chacun de ses termes.
   (b) Projeter l'équation de Navier-Stokes dans la direction du mouvement. Justifier quels sont les termes qui disparaissent.

(c) Intégrer cette équation différentielle et montrer que vous retrouvez bien la même loi d'évolution pour le rapport des vitesses qu'à la question 1a. Pour vous aider à intégrer, rappeler quelle est la dérivée de $f^2(x)$ par rapport à x où $f(x)$ est une fonction quelconque de x.

II. Le paradoxe de Stevin

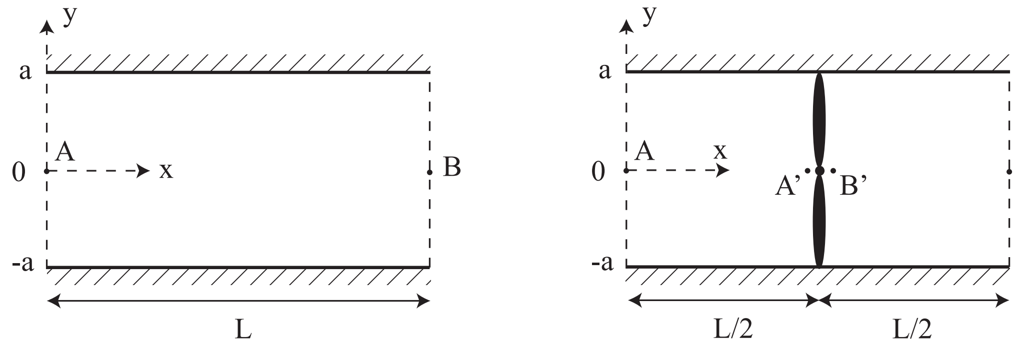
On considère deux récipients (disons deux verres) de même contenance $\mathcal{V}$ et de même hauteur h. Le premier est un cylindre de rayon R, tandis que le deuxième a une forme de tronc de cône de rayons R_1 et R_2 comme schématisé sur la figure ci-dessous et tel que $R_1 < R < R_2$. La génératrice forme un angle α avec la verticale. On remplit ces deux récipients d'eau, de masse volumique ρ, à ras bord. Les parois du fond de ces deux verres est à l'air libre.



1. On souhaite exprimer la résultante des forces de pression (de l'ensemble eau + air) qui s'exerce sur la paroi du fond des deux récipients.
   (a) Rappeler la loi de l'hydrostatique et déterminer la pression de l'eau à une profondeur h.
   (b) Exprimer les forces de pression résultantes que subissent les parois du fond de ces deux récipients. Ces forces de pression correspondent-elles au poids de l'eau contenue dans chacun des deux récipients ?
   (c) Si on place ces deux verres sur une balance. La balance mesurera-t-elle la même masse d'eau dans les deux cas ? Justifier votre réponse.
2. On cherche maintenant à exprimer la composante verticale des forces de pression (de l'ensemble eau + air) qui s'exercent sur la paroi latérale du verre en forme de tronc de cône.
   (a) Soit dS un élément de surface de la surface latérale du récipient. Représenter sur un schéma le vecteur $\overrightarrow{dS}$. Projeter cet élément de surface $\overrightarrow{dS}$, sans chercher à exprimer la norme dS, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ du système de coordonnées cylindriques.
   (b) L'élément de surface de la surface latérale du verre en forme de tronc de cône est donné par $dS = r(z)\, d\theta\, du$, où le rayon est $r(z) = R_2 - z \tan\alpha$ et où l'on a posé $du = dz/\cos\alpha$.
   Exprimer la composante verticale des forces de pression sur la surface latérale du verre.
3. Exprimer la composante verticale des forces de pression que subie la surface totale du verre en forme de tronc de cône. Correspond-elle au poids du volume d'eau contenu dans le verre ? On rappelle que $h \tan\alpha = R_2 - R_1$ et le volume d'un tronc de cône est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2\right)$.

III. Turbine dans une conduite

On considère l'écoulement d'un fluide, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η, dans une conduite de section rectangulaire, de longueur L, de largeur $2a$ et de profondeur ℓ (normale au plan de la figure selon Oz) très grande devant sa largeur, de sorte que l'écoulement puisse être considéré comme bidimensionnel. Le vecteur vitesse est donné par $\overrightarrow{v} = v(y)\overrightarrow{e}_x$. L'écoulement est assuré par un gradient de pression longitudinal constant $dp/dx = G$. Le fluide incompressible s'écoule en régime permanent. On néglige le rôle de la pesanteur.



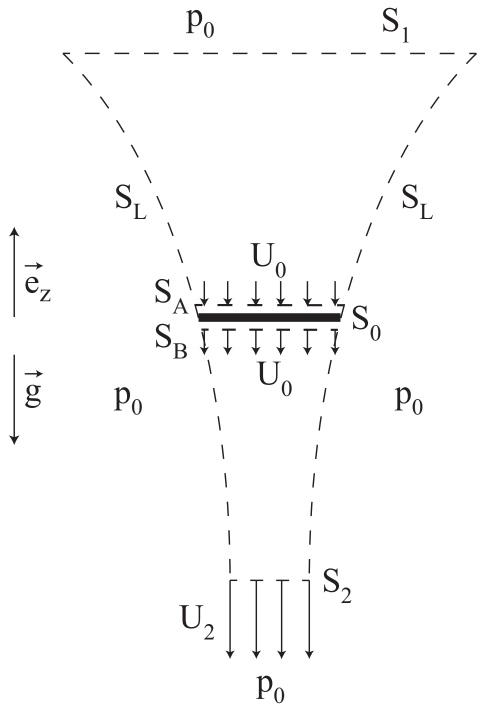
a) b)

1. On étudie l'écoulement dans la conduite en l'absence de turbine dans un premier temps (voir figure a).
   (a) Écrire l'équation de Navier-Stokes et la projeter dans les directions Ox et Oy. En déduire que la pression est constante selon la largeur de la conduite $2a$.
   (b) Déterminer l'expression du champ de vitesse $v(y)$ en fonction du gradient de pression G à l'aide des conditions aux limites. En déduire l'expression de la vitesse maximale v_M. Quel est le signe du gradient de pression G si l'écoulement va du point A au point B ?
   (c) Déterminer le débit volumique Q de cet écoulement. En déduire la vitesse moyenne $\overline{v}$ sur une section de conduite. Quelle est la relation qui relie $\overline{v}$ à v_M ?
   (d) Déterminer le coefficient de pertes de charge Δp par application du théorème de Bernoulli sur toute la longueur de la canalisation entre les points A et B.
   On rappelle la loi de Poiseuille
   $$Q = \frac{2\Delta p\ \ell a^3}{3\eta L}.$$
   En déduire l'expression du débit volumique de l'écoulement dans la conduite en l'absence de turbine Q_{ST}. Comparer son expression au débit de la question 1c.
2. On décide à présent de placer une turbine (voir figure b) au centre de la conduite (entre les points A' et B') dont on négligera l'épaisseur. La différence de presion entre les points A et B est maintenue constante par rapport au cas en l'absence de turbine. On note $\mathcal{P} < 0$ la puissance cédée par le fluide à la turbine et Q_{AT} le nouveau débit dans la conduite avec turbine.
   (a) Exprimer les pressions aux points A' et B' en tenant compte des pertes de charge Δp et de la loi de Poiseuille.
   (b) Comparer $p_{A'}$ et $p_{B'}$ en tenant compte du signe de $\mathcal{P}$. Tracer l'évolution de la pression en fonction de x sur toute la longueur L de la conduite.

(c) Exprimer la différence de pression $p_A - p_B$ entre l'entrée et la sortie de la conduite. En déduire que le débit avec turbine Q_{AT} est inférieur au débit dans cette même conduite sans turbine Q_{ST}.

IV. Loi d'échelle pour les animaux volants

Certains oiseaux ou insectes parviennent à rester immobiles dans l'air en battant des ailes à une fréquence f suffisamment importante pour compenser leurs poids. On va chercher dans cet exercice à caractériser la loi d'échelle reliant la fréquence de battement des ailes à l'envergure de l'animal volant.
Le battement des ailes en vol stationnaire a pour but de mettre l'air immobile situé au-dessus de l'animal en mouvement vers le bas. Il existe alors sous l'animal un jet d'air s'écoulant vers le bas comme schématisé sur la figure ci-dessous. On considère que les particules fluides sur lesquelles l'animal a une action s'écoulent dans un domaine qui s'appuie sur le contour délimité par les surfaces S_1, S_2, la surface latérale S_L et le contour de l'animal constitué de deux surfaces S_A et S_B. L'aire balayée par l'animal est S_0, tel que $S_A \simeq S_B \simeq S_0$.



On considère l'écoulement d'air, de masse volumique ρ et supposé parfait, comme stationnaire, incompressible et non pesant. Le long des frontières du domaine (S_1, S_2 et S_L), la pression est égale à la pression atmosphérique p_0. On note p_A et p_B respectivement la pression au-dessus et en-dessous de l'animal, respectivement en S_A et S_B. Les vitesses sont uniformes dans chacune des sections du domaine. L'air autour de l'animal dans les sections S_A et S_B est animé d'une vitesse U_0, et d'une vitesse U_2 dans la section S_2. Enfin, la section S_1 étant très grande devant S_0, la vitesse U_1 est négligeable. On oriente l'axe vertical vers le haut.

1. On souhaite déterminer les forces de pression que l'air exerce sur l'animal.

   (a) Appliquer le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre les sections S_1 et S_A, ainsi qu'entre les sections S_2 et S_B.

(b) Exprimer l'écart de pression $p_B - p_A$ en fonction de U_2. En déduire l'expression de la force de pression F_p exercée par l'air sur l'animal. Quelle est la direction de $\overrightarrow{F}_p$?

2. On rappelle l'expression du théorème de transport de Reynolds appliqué à la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{VC} \rho \overrightarrow{v}\, d\tau + \iint_{SC} \rho \overrightarrow{v}\,(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n})\, dS = -\iint_{SC} p\overrightarrow{n}\, dS,$$

où VC désigne le volume de contrôle et SC la surface de contrôle.

(a) Exprimer la force $\overrightarrow{F}_p$ exercée par l'air sur l'animal à l'aide du théorème de transport appliqué au domaine délimité par S_1, S_2, S_L et le contour de l'animal S_A et S_B. Les surfaces S_1, S_2 et S_L forment un contour fermé.

(b) En comparant les deux expressions de F_p, écrire une relation reliant S_0 à S_2 et une relation reliant U_0 à U_2. En déduire que la force de pression exercée par l'air sur l'animal prend la forme

$$\overrightarrow{F}_p = 2\rho S_0 U_0^2 \overrightarrow{e}_z.$$

3. On suppose que l'animal a un volume proportionnel à L^3, où L est l'envergure des ailes.

(a) Écrire la condition d'équilibre qui s'applique sur l'animal.

(b) Montrer que la vitesse U_0 de l'air généré par le battement des ailes varie comme une loi de puissance de l'envergure de l'animal $U_0 \propto L^\alpha$. Déterminer α.

(c) Relier, par un argument dimensionnel, la fréquence f de battement des ailes à l'envergure L et à la vitesse U_0. Comment varie f en fonction de L ? Quels sont les animaux qui doivent battre des ailes le plus rapidement : les petits ou les gros ?