Université Paris-Sud
Licences L3 de Physique et Applications et de Mécanique
Année 2016-2017 - S5

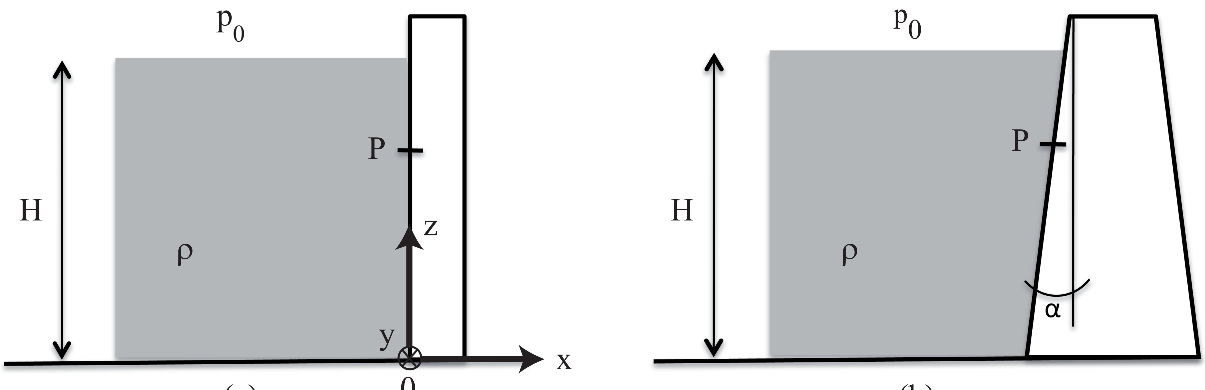
Énoncés de TD de Mécanique des Fluides
Phys-M335

Cyprien Morize
Jean-Luc Raimbault
Emmanuelle Rio

TD 1 - Hydrostatique

I – Le barrage

On étudie ici la force s'exerçant sur un barrage qui retient une hauteur $H = 100$ m d'eau. On supposera que le barrage a une largeur $L = 500$ m et que la pression au sommet du barrage est la pression atmosphérique p_0. On néglige les variations de pression de l'air due à l'altitude. On utilise le système de coordonnées cartésiennes. Dans ce système le barrage est parallèle au plan yOz et l'eau retenue par le barrage est à $x < 0$ (fig. a). La base du barrage se trouve dans le plan $z = 0$.



(a) (b)

1. (a) Rappeler la loi de l'hydrostatique dans un fluide à l'équilibre de densité ρ soumis à la pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$. Ecrire cette loi sous la forme d'une équation différentielle permettant de calculer la pression p dans le fluide.
   (b) Intégrer cette équation pour exprimer la pression p en tout point du fluide à l'équilibre. On supposera que $p = p_0$ en $z = H$.
   (c) En appliquant le résultat précédent, tracer l'évolution de la pression dans l'eau entre la base et le sommet du barrage.
2. On cherche maintenant à exprimer la force de pression résultante qui s'exerce sur le barrage.
   (a) Soit dS un élément de surface du barrage autour du point P et $d\vec{S} = dS\,\vec{e}_x$ le vecteur associé. Exprimer alors la force de pression résultante $d\vec{F}$ qui s'exerce sur le barrage au travers de dS.
   (b) En déduire l'expression de la force de pression totale $\vec{F}$ qui s'exerce sur le barrage. Calculer numériquement la norme de cette force.
   (c) En déduire la force $\overrightarrow{R}$ qu'il faut appliquer sur le barrage pour le maintenir immobile. Déterminer la hauteur OP du point d'application de cette force pour que la configuration soit stable.
3. On désire optimiser la forme du barrage qui a, en réalité, une section trapézoidale symétrique d'angle $\alpha = 20^o$ (fig. b).
   (a) Soit P un point en surface du barrage en contact avec l'eau. Représenter sur un schéma le vecteur surface $d\vec{S}$ au point P.

(b) Exprimer puis calculer numériquement les composantes de la force de pression sur le barrage $\vec{F}_t$.

(c) Quel peut être l'intérêt de cette forme de barrage ?

II – L'expérience de Magdebourg

Soit un cube métallique d'arête a qu'on scinde en 2 morceaux égaux. Après avoir reconstitué le cube, on y fait le vide. La pression extérieure est $p_0 = 10^5$ Pa.

1. Quel est l'effet du vide ? Représenter les forces de pression.
2. Calculer la force nécessaire pour séparer le cube en 2 moitiés suivant un plan vertical ($a = 10$ cm).
3. Mêmes questions avec une sphère métallique de même surface que le cube.
4. Mêmes questions lorsque la sphère est immergée dans l'eau à 10 m de profondeur.

III – L'atmosphère terrestre

On s'intéresse ici aux propriétés de la basse atmosphère terrestre, d'altitude inférieure à 10 km (la troposphère). Le gaz atmosphérique est supposé parfait et en équilibre hydrostatique. La masse molaire de l'aire est $M = 29$ g. Pour décrire l'atmosphère on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen muni d'un repère cartésien $Oxyz$ où Oz est l'axe vertical orienté vers le haut de l'atmosphère. La pression au niveau du sol est $p_0 = 1$ atm et l'altitude correspondante est $z = 0$.

On suppose dans un premier temps que l'atmosphère est isotherme de température $T = T_0$.

1. A partir du principe hydrostatique, déterminer le profil vertical de pression $p(z)$. On définit $h = RT_0/Mg$. Quelle est la dimension de h ? Quelle est sa signification ? Calculer h pour $T_0 = 300$ K.

On suppose à présent que l'atmosphère est adiabatique et que $p = K\rho^\gamma$ avec $\gamma = c_p/c_v$ et K une constante.

2. Etablir une relation entre p et T.
3. De même qu'au 1), établir l'expression de $p(z)$. En déduire l'expression de $T(z)$.
4. Quelle est alors l'expression du gradient de température $a_s = dT/dz$? Exprimez-la en fonction de h. Calculer sa valeur numérique sachant que $\gamma = 1,4$.
5. En basse atmosphère, le gradient de température dT/dz est à peu près constant égal à -7 K/km. Dans ces conditions des mouvements de convection peuvent-ils se développer ?

TD 2 - Hydrostatique : Archimède et référentiel non-galiléen

I – Principe d'Archimède

On considère un glaçon de forme cubique de côté $h = 4$ cm et flottant en équilibre dans un verre d'eau rempli à ras bord. On notera ρ_g la densité du glaçon, ρ_e celle de l'eau et ρ_a celle de l'air. On a $\rho_g/\rho_e \simeq 0{,}92$.

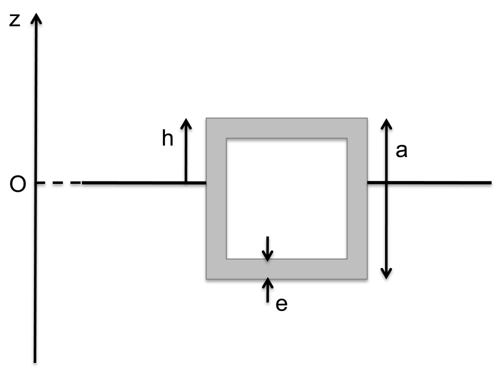
1. Retrouver le principe d'Archimède (dans l'air et dans l'eau) en exprimant la condition d'équilibre du glaçon.
2. Quelle est la hauteur immergée a du glaçon ?
3. Lorsque le glaçon fond, le verre déborde-t-il ?

II – Submersible

On s'intéresse à l'immersion d'une boîte cubique de côté a dans de l'eau. Le cube, rigide et creux, est rempli d'air à la pression atmosphérique p_0. Chaque face du cube a une épaisseur fixe e et on notera ρ_s la densité du matériau constituant le cube et M sa masse. Sauf mention contraire, la densité de l'eau ρ est supposée constante et on fait l'hypothèse que l'eau est un fluide parfait. L'axe Oz est pris vertical et orienté vers le haut.

1. Enoncer le théorème d'Archimède.

En déposant le cube dans l'eau, une face parallèle à la surface de l'eau, on constate qu'à l'équilibre sa face supérieure se trouve à une distance h au-dessus de la surface de l'eau de cote $z = 0$.



2. (a) Exprimer la poussée d'Archimède que subit le cube.
   (b) A l'équilibre, exprimer la hauteur émergée h en fonction de M, ρ et a. A quelle condition le cube flottera-t-il ?
   (c) Sachant que $e << a$, exprimer la masse M du cube en fonction de a, e et ρ_s. Quelle est alors la condition sur a pour que le cube flotte ? Exprimer numériquement cette condition pour $\rho_s/\rho = 10$ et $e = 5$ cm.

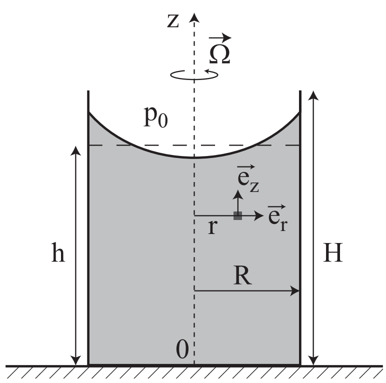
3. On suppose que le cube flotte à l'équilibre avec une hauteur émergée $h = 0$. On lui rajoute une masse m qui n'augmente pas son volume (par exemple en le remplissant d'eau). Que va-t-il alors se passer ? Le mouvement du cube pourra-t-il s'arrêter ?
4. Au cours du mouvement du cube, on prend maintenant en compte la variation de la densité de l'eau avec la profondeur, $\rho(z) = \rho_0(1 + \alpha z)$ avec $\rho_0 = 10^3$ kg/m^3.

   (a) Quel doit être le signe de α pour que le cube s'arrête ? Quelle est sa dimension ? Sachant que $m + M = (1 + k)\rho_0 a^3$ (k nombre sans dimension) exprimer la cote z_e où les forces sur le cube s'équilibreront. Faire l'application numérique pour $|\alpha| = 10^{-6}$ SI et $k = 10^{-3}$.

   (b) Cet équilibre est-il stable ?

III – Déformation de la surface libre d'un liquide en rotation

On cherche à déterminer la forme de la surface libre d'un liquide contenu dans un verre de hauteur $H = 15$ cm en rotation à vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\overrightarrow{e_z}$ constante. On note $R = 5$ cm le rayon du verre et $h = 10$ cm la hauteur de liquide lorsque $\Omega = 0$. On suppose que le fluide est au repos dans le référentiel tournant : on parle d'écoulement en rotation solide.



1. On repère une particule fluide par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z). Quelle est sa trajectoire dans le référentiel du laboratoire ?
2. Compte tenu des symétries du problème, justifier que la pression p dans le liquide ne dépend pas de θ.
3. Écrire l'équation de l'hydrostatique dans le référentiel tournant. Quelle est la force volumique d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_e}$ qui s'applique ici ?
4. Déterminer le champ de pression $p(r, z)$ au sein du liquide. On note z_0 l'altitude de la surface de l'eau en $r = 0$.
5. Déterminer l'équation de la surface libre de l'eau. Tracer la courbe de $z - z_0$ en fonction de r : quel est le nom de cette courbe ?
6. Déterminer la hauteur de liquide z_0 en $r = 0$ en fonction de h, R et Ω. En déduire la vitesse angulaire maximale Ω au-delà de laquelle il n'y a plus de hauteur d'eau non nulle au centre en $r = 0$.
7. Calculer la vitesse angulaire Ω au-delà de laquelle l'eau déborde du verre.

TD 3 - Cinématique

I – Écoulement de Poiseuille

L'écoulement stationnaire d'un fluide soumis à une différence de pression et situé entre deux plans parallèles à xOz, situés en $\pm d/2$, est caractérisé par le champ de vitesse

$$\overrightarrow{u} = u_0 \left(1 - 4\frac{y^2}{d^2}\right) \overrightarrow{e_x}.$$

1. Déterminer l'allure du champ de vitesse.
2. Cet écoulement est-il incompressible ?
3. Quelles sont les trajectoires suivies par une particule fluide ?
4. Déterminer les lignes de courant. Coïncident-elles avec les trajectoires ?
5. Calculer le champ de vorticité.
6. Déterminer le vecteur accélération.

II – Rotation

On considère un écoulement permanent dont le champ de vitesse admet comme composantes en coordonnées cylindriques et pour $r \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_r & = & 0 \\ u_\theta & = & Ar + \frac{B}{r} \\ u_z & = & 0 \end{array} \right.$$

où A et B sont deux constantes. Le mouvement se fait-il de façon isovolume ? Calculer les composantes du rotationnel et du tenseur taux de déformation. Après avoir identifié les lignes de courant, discuter les cas particuliers $A = 0$ et $B = 0$ et interpréter physiquement les résultats.

III – Déformation dans les écoulements

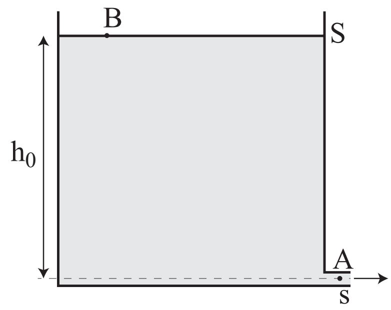
Soit l'écoulement de cisaillement bidimensionnel $\overrightarrow{u} = ay\,\overrightarrow{e_x}$ avec $a > 0$.

1. Calculer le champ de vorticité de cet écoulement.
2. Calculer le tenseur des gradients de vitesse. En déduire l'expression du tenseur des rotations pures et du tenseur des déformations pures.
3. Montrer que la déformation d'un élément de fluide se traduit par
   (a) aucune variation de volume.
   (b) un allongement que l'on précisera suivant la direction $(\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y})$.
   (c) une compression selon $(-\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y})$.

TD 4 - Dynamique du fluide parfait : théorème de Bernoulli

I – La clepsydre

Dans l'Antiquité, les grecs mesuraient le temps en observant la hauteur h d'eau dans un récipient (clepsydre) en train de se vider et cet exercice a pour but d'étudier ce phénomène.
On suppose dans un premier temps que la clepsydre est un récipient cylindrique de section S constante avec à sa base un orifice de section s par lequel l'eau peut s'échapper à l'air libre. Cet orifice est d'abord bouché pour remplir la clepsydre jusqu'à la hauteur h_0. A $t = 0$ on libère l'orifice et le vidage commence. Les valeurs numériques sont : $h_0 = 1$ m, $s = 1$ cm^2 et $S = 0,5$ m^2.
On suppose que l'eau est un fluide parfait, incompressible et en écoulement permanent. On négligera les variations de pression dans l'air. La pression atmosphérique est $p_0 = 10^5$ Pa.



1. Soient v_B et v_A les vitesses de l'eau au sommet de la clepsydre et dans l'orifice de sortie. Que vaut v_A/v_B ?
2. Exprimer v_A à $t = 0$ et faites l'application numérique.
3. Exprimer v_B au cours du vidage et déduisez-en $h(t)$.

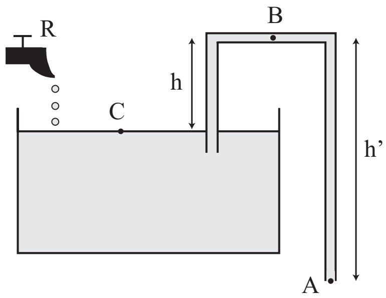
Les mesures de temps seront simples si la hauteur est une fonction affine du temps, soit $h = at + b$ (les différences de hauteur sont alors proportionnelles au temps écoulé) et on recherche la forme de clepsydre correspondante.

4. Soit D le diamètre de la clepsydre : comment doit varier D en fonction de h pour que h varie comme $at + b$? Calculer alors numériquement le temps de vidage de la clepsydre.

II – Le siphon

Un liquide ($\rho = 10^3$ kg/m^3) s'écoule par un siphon formé d'un tube en U de section constante. Le haut du tube est à une hauteur h au dessus du niveau de la surface libre dans le récipient et à une hauteur h' de l'orifice de sortie A. Le niveau du liquide (C) dans le réservoir de large section est maintenu constant grâce à l'apport de liquide par le robinet R. On suppose que $v(C) = 0$ et que le liquide est un fluide parfait.

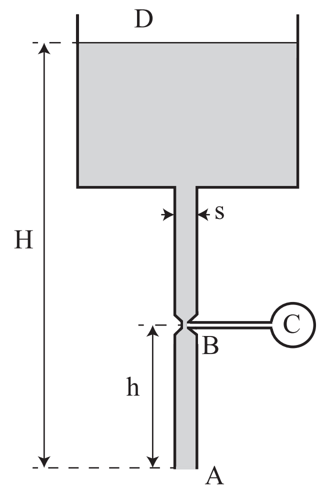
1. Exprimer la vitesse v_A de l'écoulement du liquide en A.



2. Déduire du résultat une condition nécessaire au fonctrionnement du siphon. Calculer v_A pour $h'-h=1$ m. On prendra $g=10$ m/s^2.
3. Calculer la pression en B pour h' =1,5 m et h' =15 m.
4. Commenter le signe de la pression en B.
5. A partir de quelle valeur limite de h' le siphon cessera-t-il de fonctionner ?

III - Trompe à eau

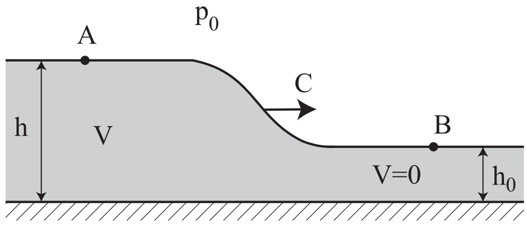
Une trompe à eau est un dispositif servant à faire le vide. Elle est en général constituée d'un réservoir ouvert de grande section dont le niveau en D est maintenu constant. L'eau s'écoule par un tube de section constante s sauf en un point B où il présente un rétrécissement et où la section est $s_1 = s/4$. En B, le tube est mis en communication avec un récipient C initialement rempli d'air à la pression atmosphérique. En fonctionnement l'eau ne pénètre pas dans C. On étudie maintenant ce dispositif lorsque le régime permanent est établi. On suppose que l'eau est un fluide parfait incompressible. On note p_0 la pression atmosphérique et on prend $p_0 = 10^5$ Pa. On supposera que la pression en D et A est p_0.



1. Calculer les vitesses v_A et v_B de l'eau aux points A et B. On donne $H = 50$ cm, $h = 10$ cm, $s = 1$ cm^2 et $g = 10$ m/s^2.
2. Evaluer la pression en C.

IV - Vague

On considère une vague d'amplitude $h - h_0$ se propageant à la vitesse C à la surface d'une couche horizontale de fluide au repos d'épaisseur uniforme h_0.



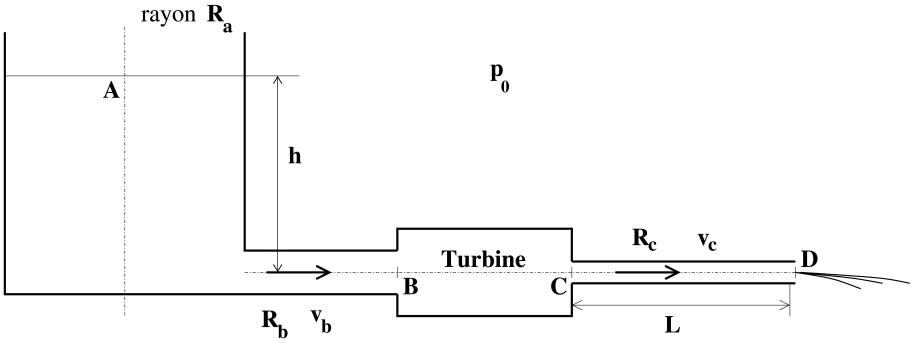
On se place dans le référentiel de la vague pour que l'écoulement soit stationnaire.

1. Déterminer une équation reliant les vitesses V et C par l'application du théorème de Bernoulli entre les points A et B.
2. Trouver une deuxième équation reliant V et C à l'aide de la conservation du débit.
3. Exprimer la vitesse de propagation C de la vague et la vitesse V du fluide en fonction de h, h_0 et l'accélération de la pesanteur g.

TD 5 - Théorème de Bernoulli généralisé

I – Vidage d'un réservoir au travers d'une turbine

Un réservoir cylindrique de rayon R_a contient de l'eau de masse volumique ρ. Sa base est reliée par une canalisation de rayon R_b à une turbine dont l'entrée est située à une hauteur h au dessous du niveau du réservoir. L'eau s'écoule en régime permanent dans le tuyau et au travers de la turbine. On notera p_b et p_c les pressions à l'entrée et à la sortie de la turbine. **Tant que $p_b > p_c$, la turbine maintient le débit constant**. A la sortie C de la turbine, le liquide s'écoule dans un tuyau horizontal de rayon R_c et de longueur L puis sort en D. La pression dans l'air est la pression atmosphérique p_0. Données numériques : $Q = 1$ litre/s, $R_a = 80$ cm, R_b=8 cm, R_c=4 cm, $h_0 = 1,50$ m, L=10 m.



1. Dans toute cette première question on considére que le fluide est parfait.
   (a) Expliquer pourquoi on peut faire l'hypothèse $v_A = 0$.
   (b) Exprimer les pressions p_b et p_c.
   (c) Exprimer la puissance $\mathcal{P}$ absorbée par la turbine.
   (d) Calculer numériquement les vitesses v_b et v_c puis p_b et $\mathcal{P}$ pour $h = h_0$
2. On remplace l'eau par un liquide de forte viscosité $\eta = 1$ Pa$\times$ s mais de même masse volumique. On suppose que les forces de viscosité interviennent uniquement dans le tronçon CD et que le débit reste le même qu'à la question précédente.
   (a) On rappelle la loi de Poiseuille :

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta l}\,\Delta p$$

   Dans le système présent, que représentent a, η, l et Δp ? Précisez les dimensions de chacune de ces grandeurs.
   (b) Définissez la vitesse moyenne d'écoulement v_m dans le tuyau CD. Est-elle modifiée par la prise en compte des forces de viscosité ?
   (c) L'écoulement dans CD est-il turbulent ? (on rappelle le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e = \frac{\rho v d}{\eta}$)

(d) Exprimer alors p_c et $\mathcal{P}$ et faîtes l'application numérique pour $h = h_0$. Comparer $\mathcal{P}$ au résultat obtenu en 1)d) et interpréter.

3. On considère à présent que le niveau du réservoir baisse ($v_a \neq 0$) et on cherche à déterminer comment évoluent en fonction du temps la hauteur h, les pressions p_b et p_c ainsi que la puissance $\mathcal{P}$ absorbée par la turbine.

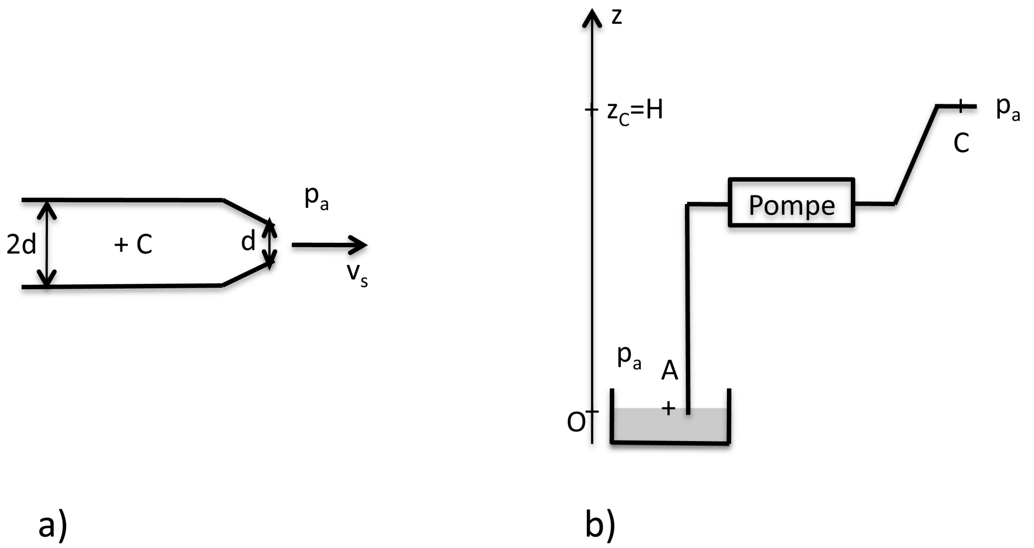
   (a) Comment s'exprime la vitesse v_a ?

   (b) En supposant que $h = h_0$ à $t = 0$ et que le débit reste constant, exprimer $h(t)$ et $\mathcal{P}(t)$.

   (c) Quelle est la relation entre p_b et p_c lorsque le débit ne peut plus être maintenu par la turbine ? En déduire la hauteur h_1 et le temps t_1 à partir desquels le débit n'est plus régulé. Calculer les valeurs numériques de h_1 et t_1.

II – Jacuzzi

On s'intéresse ici au fonctionnement d'un jacuzzi alimenté par un réservoir en sous-sol à une profondeur $H = 20$ m. On suppose que l'eau est prélevée à la pression atmosphérique p_a et que le jet final débouche à l'air libre où règne également p_a. On suppose que le débit Q_V est de 3,6 m^3/h. Le réservoir où l'eau est prélevée est suffisamment grand pour que l'on puisse négliger la vitesse à sa surface. On se place en régime permanent et on considère que l'eau est un fluide incompressible et parfait. On néglige toutes les pertes de charge dues à la forme de l'écoulement.



1. On commence par définir le tube délivrant le jet d'eau (fig. a). Pour des questions de confort, on souhaite maintenir l'énergie cinétique du jet à 0.1 Joule pour un volume d'eau de 30 cm^3.

   (a) Quelle doit alors être la valeur de la vitesse du jet en sortie v_s ?

   Dans toute la suite de l'exercice, on prendra $v_s = 2$ m/s.

   (b) Exprimer et calculer le diamètre de sortie d du jet.

(c) Sachant que le diamètre du tube qui amène l'eau de la pompe au point C vaut $2d$, donner la relation entre v_C et v_s.

(d) En appliquant le théorème de Bernoulli, exprimer la pression au point C, p_C, en fonction de p_a, ρ et v_s. Calculer p_C.

2. On cherche maintenant à caractériser la pompe qui permet au jacuzzi de fonctionner. On note $\mathcal{P}$ la puissance mécanique fournie par la pompe au fluide. Le diamètre du tube qui amène l'eau jusqu'au jacuzzi est partout $2d$ sauf dans la partie finale décrite précédemment.

   (a) Quelle est la dimension de $\mathcal{P}/Q_V$?

   (b) En utilisant le théorème de Bernoulli généralisé aux écoulements incluant des machines, exprimer $\mathcal{P}$ en fonction de Q_V, v_s et H. Calculer $\mathcal{P}$.

   (c) En déduire l'expression de la différence de pression Δp entre l'entrée et la sortie de la pompe en fonction de H et v_s. Comment peut-on interpréter cette expression d'un point de vue énergétique (on pourra multiplier les deux membres par le volume d'une particule fluide τ) ?

   (d) Sachant que Δp est une constante caractérisant la pompe indépendamment de Q_V, tracer la courbe de H en fonction de Q_V pour la valeur de Δp calculée précédemment. Pour quelle valeur de Q_V, H est-elle maximale ? Quelle est la valeur maximale de Q_V possible ?

   Pour un type de pompe donné, cette courbe permet de déterminer le débit possible pour H donné.

TD 6 - Théorème de transport

On rappelle l'expression du théorème de transport de Reynolds appliqué à la quantité de mouvement

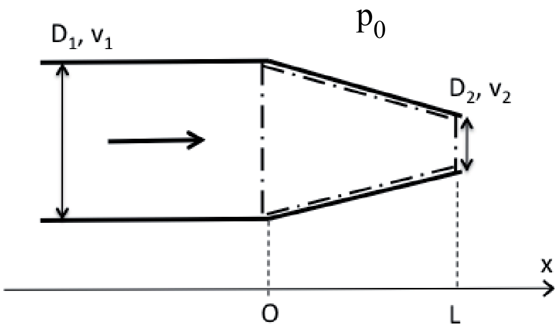
$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{VC}\rho\overrightarrow{v}\,d\tau+\oiint_{SC}\rho\overrightarrow{v}\,(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n})\,dS=-\oiint_{SC}p\overrightarrow{n}\,dS+\oiint_{SC}\sigma'\overrightarrow{n}\,dS+\iiint_{VC}\rho\overrightarrow{g}\,d\tau,$$

où σ' désigne le tenseur des contraintes visqueuses et où VC désigne le volume de contrôle et SC la surface de contrôle. Par convention pour les surfaces fermées, le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est un vecteur de norme unité orienté vers l'extérieur. Pour l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait et non pesant, ce théorème se réduit à

$$\oiint_{SC}\rho\overrightarrow{v}\,(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n})\,dS+\oiint_{SC}p\overrightarrow{n}\,dS=0.$$

I – Lance à incendie

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide parfait dans un convergent cylindrique. Un exemple classique est celui de la lance à incendie représentée sur la figure ci-dessous. L'eau passe d'abord par un tuyau de diamètre D_1 avec la vitesse moyenne v_1 puis par un manchon conique de longueur L et de diamètre de sortie D_2. A la sortie du manchon, l'eau débouche dans l'air à la pression atmosphérique p_0 avec la vitesse moyenne v_2. On notera Q_V le débit volumique de cet écoulement.
On suppose que l'eau a une masse volumique ρ constante et que l'écoulement est en régime permanent. On négligera les variations de pression de l'air dues aux différences de hauteur. La surface de contrôle est représentée sur le schéma par des tirêts.

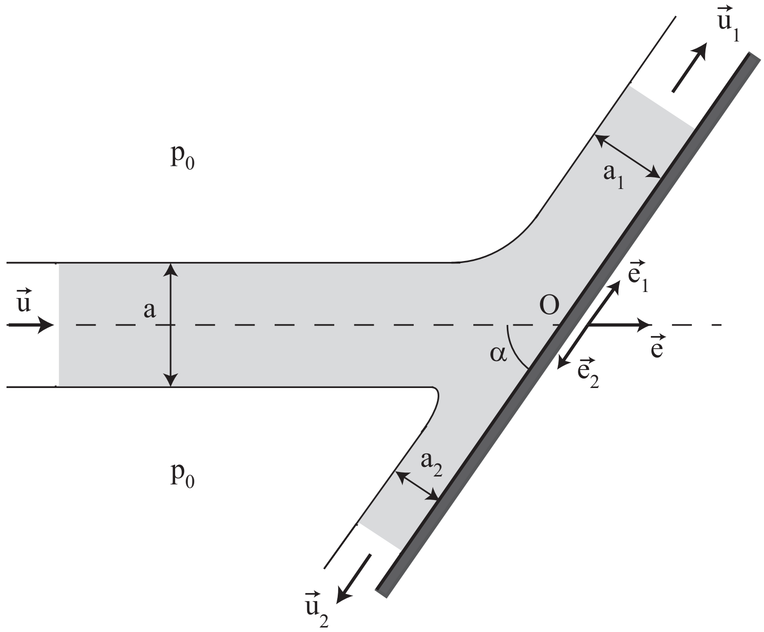


1. Exprimer et calculer v_2 en fonction des données du problème. En déduire v_1.
   Données numériques : $D_1 = 6,5$ cm, $D_2 = 2,2$ cm, $L = 50$ cm, $Q_V = 5$ L/s.
2. Exprimer et calculer la pression moyenne p_1 dans le tuyau de diamètre D_1.
3. On cherche à estimer la force de recul ressentie par un pompier tenant la lance. En s'appuyant sur le théorème de transport, déterminer la force $\overrightarrow{F}$ subie par la lance. S'agit-il d'une force de recul ? Commentez ce résultat.

4. Lorsqu'un pompier tient la lance à incendie, cette dernière a une forme en S depuis le sol jusqu'aux mains du pompier. Expliquer et justifier pourquoi le pompier prétend subir une force de recul ?

II – Impact d'un jet sur une plaque plane

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ. Le schéma représente une coupe horizontale d'un jet plan qui arrive obliquement sur une plaque plane (P) en faisant un angle d'incidence α avec la direction du jet et qui, après l'impact, se sépare en deux lames de fluide.
Loin de la région de l'impact, le jet incident à une épaisseur a et une vitesse uniforme u. Après l'impact, les deux lames de fluide d'épaisseurs a_1 et a_2 s'écoulent respectivement avec des vitesses uniformes u_1 et u_2. L'ensemble (jet + plaque) se trouve dans l'air à la pression atmosphérique p_0.
On se propose d'évaluer la force $\overrightarrow{R}$ qu'il faut exercer sur la plaque (P) soumise à l'impact du jet pour la maintenir immobile, ainsi que la position du point d'application de $\overrightarrow{R}$ sur cette plaque.

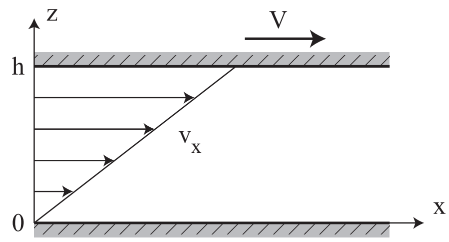


1. Déduire de l'équation de Bernoulli et de la condition d'incompressibilité, les relations entre u, u_1 et u_2 ainsi qu'entre a, a_1 et a_2.
2. En s'appuyant sur le théorème de transport de Reynolds, déterminer la résultante $\overrightarrow{F}$ des forces de pression subies par la plaque.
   On exprimera le résultat en fonction de ρ, a, a_1, a_2, u, u_1, u_2 et des vecteurs unitaires $\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ des directions associées respectivement aux trois lames de fluide.
3. Expliciter les composantes de $\overrightarrow{F}$ le long de la plaque $\overrightarrow{e_\parallel}$ et sur la normale $\overrightarrow{e_\perp}$ à la plaque. En déduire l'expression du module de la force $\overrightarrow{R}$.
4. Justifier que la composante de la force le long de la plaque est nulle, et en déduire une relation permettant de calculer a_1 et a_2 en fonction de a et α.
5. L'angle α définit l'orientation d'équilibre prise par la plaque sous l'action du jet. Écrire cette condition d'équilibre en fonction des forces et quantités de mouvement associées au jet. En déduire la distance OP entre le point d'intersection O de la plaque avec l'axe du jet et le point P d'application de $\overrightarrow{R}$.

TD 7 - Fluides visqueux et équations de Navier-Stokes

I – Ecoulement de Couette

On considère l'écoulement laminaire et stationnaire d'un fluide visqueux newtonien, incompressible, entre deux plaques parallèles horizontales espacées d'une distance h. La plaque supérieure est en mouvement à la vitesse V, alors que la plaque inférieure est statique. Les deux plaques sont considérées de dimensions infinies dans la directions x. L'écoulement est unidimensionnel, parallèle à la direction x. On note η le coefficient de viscosité dynamique du fluide et ρ sa masse volumique. On admettra que la pression ne varie pas selon x (plaques infinies).

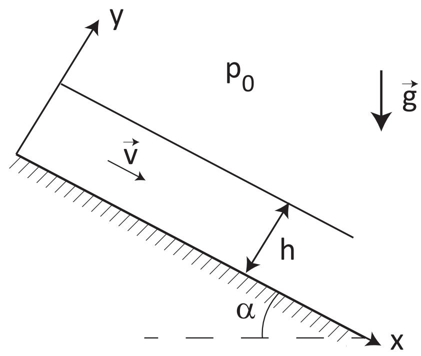


1. Écrire la condition d'incompressibilité compte tenu des hypothèses.
2. Écrire les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites satisfaites par le champ de vitesse. Trouver l'expression de v_x.
3. Cet écoulement est-il irrotationnel ?
4. Calculer le débit volumique de cet écoulement par unité de profondeur dans la direction Oy.
5. On considère que le fluide est de l'huile pour moteur et h = 3 mm. La vitesse de la plaque en mouvement est V = 10 m/s. On suppose que les propriétés de l'huile sont constantes. On donne : ρ = 888,2 kg/m3 $\nu = \eta/\rho$ = 900 10^{-6} m^2/s.
   Calculer les forces de frottement visqueux du plan $z = 0$ et du plan $z = h$ sur un élément de fluide d'épaisseur dx.

II – Écoulement sur plan incliné

Nous nous proposons d'étudier l'écoulement stationnaire d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. On choisira le système de coordonnées défini par le plan incliné. Sous l'effet de l'attraction terrestre, le fluide s'écoule à l'air libre (à la pression atmosphérique p_0) le long du plan (Ox,Oy) sur une épaisseur uniforme h, avec un champ de vitesse que l'on supposera de la forme $\vec{v} = v(y)\,\vec{u_x}$.

1. Montrer que cet écoulement est incompressible.
2. (a) Montrer que l'équation de Navier-Stokes se réduit à une équation linéaire dont la projection sur les axes Ox et Oy fournit deux équations différentielles permettant de déterminer la pression $p(x, y)$ et le champ de vitesse partout dans le fluide.
   Peut-on négliger les termes $g \sin\alpha$ et $g \cos\alpha$ dans ces équations ?



(b) Quelle est la condition de pression sur la surface libre (en $y = h$) du fluide en écoulement ? En déduire le champ de pression en tout point du fluide.

(c) En considérant que la contrainte tangentielle de friction exercée par l'air sur le fluide est négligeable, quelle est la condition de vitesse sur la surface libre (en $y = h$) ?

Déterminer l'allure de la contrainte visqueuse σ'_{xy}. Exprimer la contrainte pariétale σ_0.

(d) Quelle est la condition de vitesse sur le plan incliné (en $y = 0$) ? Déterminer l'expression du champ de vitesse $v(y)$, et préciser la forme de son profil.

3. Calculer le débit volumique de cet écoulement par unité de longueur dans la direction Oz.

III – Viscosimètre de Couette

Le viscosimètre de Couette est constitué de 2 cylindres coaxiaux pouvant tourner. Le liquide dont on veut mesurer la viscosité est placé entre les cylindres. Le cylindre intérieur $\mathcal{C}_1$ de rayon R_1 est entraîné avec une vitesse angulaire Ω_1 alors que le cylindre extérieur $\mathcal{C}_2$ de rayon intérieur R_2 est maintenu fixe. On supposera le liquide incompressible et newtonien et on ne s'intéressera qu'au régime permanent. On négligera les effets de la pesanteur.

On cherche à établir l'expression du couple qui va s'exercer sur $\mathcal{C}_2$. Pour ce faire, on va d'abord établir l'expression du champ de vitesse en utilisant l'équation de Navier-Stokes. On utilisera les coordonnées cylindriques pour décrire l'écoulement.

1. On commence par exploiter les propriétés de symétrie de l'écoulement :

   Lorsqu'on met $\mathcal{C}_1$ en rotation, que se passe-t-il dans le fluide ? En déduire la direction de la vitesse $\vec{v}$ dans le fluide. Représenter quelques lignes de courant. De quelle(s) variable(s) dépend $\vec{v}$?

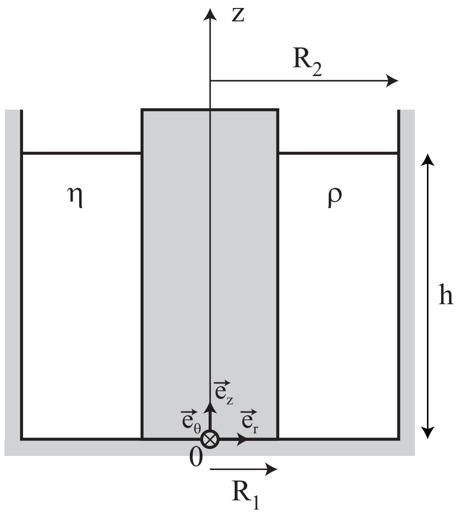
2. En projetant l'équation de Navier-Stokes :

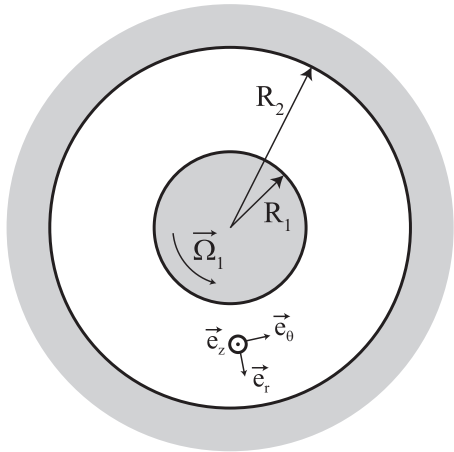
   (a) Établir une équation différentielle sur v valeur algébrique du vecteur vitesse. Intégrez-la et utilisez les conditions aux limites pour déterminer complètement v en fonction des données du problème. On pourra noter $\alpha = R_2^2/R_1^2$.

   (b) Tracer la courbe de v.

   (c) En déduire l'expression de la vitesse angulaire ω.

3. (a) Exprimer la force par unité de surface (ou contrainte) σ_2 qui s'exerce sur $\mathcal{C}_2$. En déduire le couple Γ_2 que ressent le cylindre $\mathcal{C}_2$.





(b) Comment peut-on alors mesurer le coefficient de viscosité η du fluide ? Comment faut-il choisir α R_1 et h étant fixés) pour que cette mesure soit sensible ?

(c) Sachant que $\Omega_1 = 3$ tours/s, $R_1 = 10$ cm, $\alpha = 2$, $\eta = 10^{-3}$ Pa.s et $h = 0,5$ m, calculer Γ_2.

4. En utilisant une autre projection de l'équation de Navier-Stokes et l'expression de la vitesse, déterminer la pression en tout point du fluide.

Annexes

• Produits vectoriel et mixte :

$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}, \qquad \overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})$

$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}).\overrightarrow{c}$

$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}]$ et permutation circulaire

$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = -[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}]$ pour les échanges 2 à 2

Vecteur surface d'un losange de côtés (a, b) : $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$

Volume d'un parallèlépipède de côtés (a, b, c) : $V = \overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})$

• Opérateurs différentiels :

Relations locales :

$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\nabla}U = \Delta U$
$\overrightarrow{\nabla}.(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}) = 0$
$\overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla}U) = \overrightarrow{0}$
$\overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A}) - \Delta\overrightarrow{A}$
$\overrightarrow{\nabla}(UW) = U(\overrightarrow{\nabla}W) + W(\overrightarrow{\nabla}U)$
$\overrightarrow{\nabla}.(U\overrightarrow{A}) = (\overrightarrow{\nabla}U).\overrightarrow{A} + U(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A})$
$\overrightarrow{\nabla} \wedge (U\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\nabla}U \wedge \overrightarrow{A} + U\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}$
$\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{A} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B}) + \overrightarrow{B} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}) + (\overrightarrow{B}.\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{A} + (\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{B}$
$\overrightarrow{\nabla}.(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} - \overrightarrow{A}.\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B}$
$\overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}) = (\overrightarrow{B}.\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{A} - (\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{B} + (\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{B})\overrightarrow{A} - (\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A})\overrightarrow{B}$

En coordonnées cylindriques et sphériques la divergence, le rotationnel et les opérations déduites ne s'obtiennent pas simplement en manipulant $\overrightarrow{\nabla}$ comme un vecteur (contrairement au gradient) (voir plus loin).

Relations intégrales :

Théorème de Stokes : soit $\mathcal{S}$ une surface s'appuyant sur le contour fermé $\mathcal{C}$

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dS} \qquad \text{et} \qquad \oint_{\mathcal{C}} U.\overrightarrow{dl} = -\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\nabla}U \wedge \overrightarrow{dS}$$

Théorème de Green-Ostrogradsky : soit $\mathcal{V}$ le volume délimité par la surface fermée $\mathcal{S}$

$$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A}d\tau \qquad \text{et} \qquad \oiint_{\mathcal{S}} U\overrightarrow{dS} = \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\nabla}U d\tau$$

• Coordonnées cartésiennes :

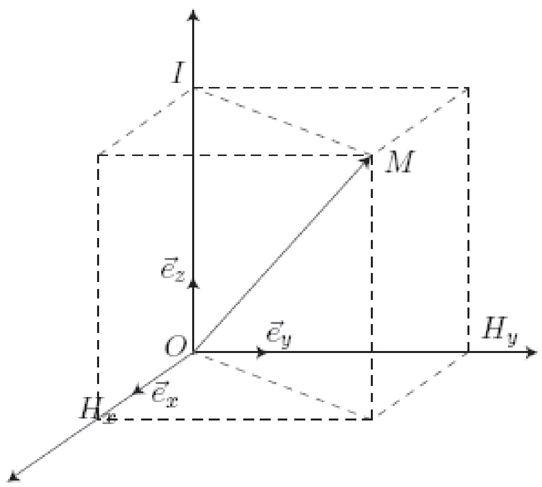
le point M est repéré par ses coordonnées (x, y, z) dans le trièdre direct orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$. Les coordonnées sont dans $\mathbb{R}$.

Déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$. Les vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont fixes.

Elément de volume : $d\tau = dx\,dy\,dz$

et de surface : $dS = dy\,dz$ (x fixé par exemple)

Gradient : $\overrightarrow{\nabla}U = \left(\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial U}{\partial z}\right)$



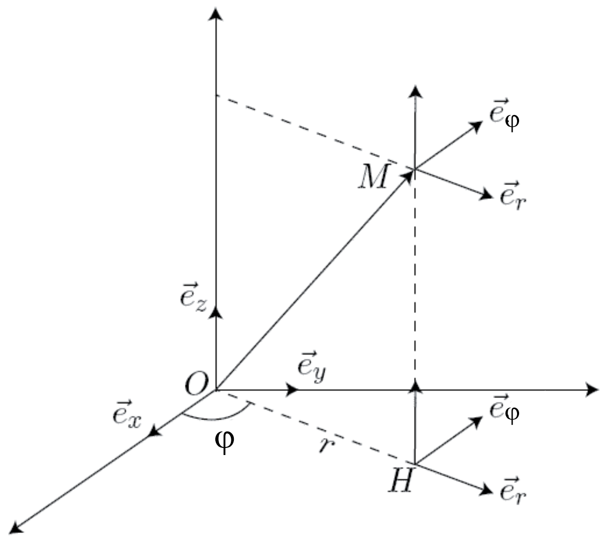
Divergence : $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

Rotationnel : $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}, \;\; \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}, \;\; \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \right)$

Laplacien : $\Delta U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ et $\Delta \overrightarrow{A} = \Delta A_x \overrightarrow{e_x} + \Delta A_y \overrightarrow{e_y} + \Delta A_z \overrightarrow{e_z}$.

• Coordonnées cylindriques :

le point M est repéré par ses coordonnées (r, φ, z) dans le trièdre direct orthonormé $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ avec $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$. Les coordonnées vérifient $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{R}$.



Déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dr\,\vec{e}_r + rd\varphi\,\vec{e}_\varphi + dz\,\vec{e}_z$

Différentielles : la direction de $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\varphi$ dépend de φ. Au cours d'un déplacement élémentaire, la variation de ces vecteurs est $d\vec{e}_r = d\varphi\,\vec{e}_\varphi,\; d\vec{e}_\varphi = -d\varphi\,\vec{e}_r$.

Elément de volume : $d\tau = dr\,rd\varphi\,dz = rdrd\varphi dz$

et de surface : $dS = rd\varphi dz$ (r fixé) ou bien $dS = rdrd\varphi$ (z fixé)

Gradient : $\overrightarrow{\nabla} U = \left(\dfrac{\partial U}{\partial r}, \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}, \dfrac{\partial U}{\partial z}\right)$

Divergence : $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

Rotationnel : $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z},\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r},\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)$

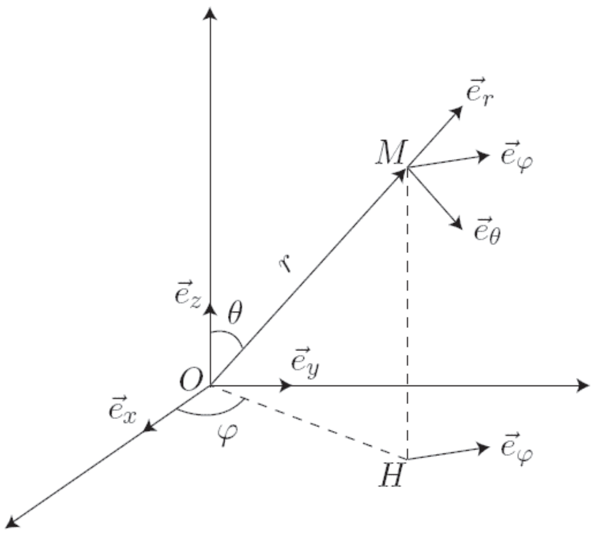
Laplacien scalaire : $\Delta U = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial U}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

Laplacien vectoriel :

$$\Delta\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - \dfrac{2}{r^2}\left(\dfrac{A_r}{2} + \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right) \\ \Delta A_\varphi - \dfrac{2}{r^2}\left(-\dfrac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \dfrac{A_\varphi}{2}\right) \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

• **Coordonnées sphériques :**

le point M est repéré par ses coordonnées (r, θ, φ) dans le trièdre direct orthonormé $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ avec avec $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$. Les coordonnées vérifient $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.



Déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dr\,\vec{e}_r + +rd\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi$

Différentielles : la direction de $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ dépend de θ et φ. Au cours d'un déplacement élémentaire, la variation de ces vecteurs est

$d\vec{e}_r = d\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi,\ \ d\vec{e}_\theta = -d\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi\ \ d\vec{e}_\varphi = -\sin\theta d\varphi\,\vec{e}_r - \cos\theta d\varphi\,\vec{e}_\theta$

Élément de volume : $d\tau = dr\,rd\theta\,r\sin\theta d\varphi = r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta$

et de surface : $dS = r^2\sin\theta d\varphi\,d\theta$ (r fixé)

Gradient : $\overrightarrow{\nabla} U = \left(\dfrac{\partial U}{\partial r}, \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}, \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\right)$

Divergence : $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right)$

Rotationnel : $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial (\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} \right),\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r},\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right) \right)$

Laplacien scalaire : $\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$

Laplacien vectoriel :

$$\Delta\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - \frac{2}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta A_r + \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \right) \\ \Delta A_\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\left(-\sin\theta \frac{\partial A_r}{\partial\theta} + \frac{A_\theta}{2\sin\theta} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \right) \\ \Delta A_\varphi - \frac{2}{r^2\sin\theta}\left(-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} + \frac{A_\varphi}{2\sin\theta} \right) \end{pmatrix}$$