Examen de *Mathematica*

Partiel du 6 novembre 2014

Durée : 2 h. Seule l'aide intégrée à *Mathematica* est autorisée.

Out[3]= selectionner votre nom

Ceci est votre carnet d'examen. Soignez la présentation. Enregistrez très régulièrement. Les carnets seront transférés et imprimés par nos soins après l'examen pour être notés.

Exercice 1 : précession d'un moment dipolaire

On étudie le mouvement de precession d' un moment dipolaire sous l' effet d' un champ magnetique.

1) Définir **mu[t]** un vecteur à trois composantes, qui représente le moment dipolaire μ(t), dont les composantes sont les symboles **mux[t]**, **muy[t]** et **muz[t]** .
Définir **B** le vecteur champ magnétique, dont les composantes sont **0**, **0** et **1**.

2) Vérifier que **B** est de norme 1.

3) L' équation différentielle qui gouverne le mouvement est : $d\mu/dt = \mu \times B$. Plutôt que d'écrire composante par composante ($d\mu_x/dt = -\mu_y$, etc.), on peut l'écrire **prodvec=Cross[B,mu[t]]** .
Définir **prodvec** puis la résoudre formellement avec **DSolve** sans conditions initiales.

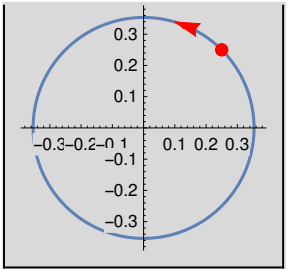
4) Définir **dipole[t]** la solution, correspondant aux conditions initiales **C[1]→1/4**, **C[2]→1/4** et **C[3]→1/2** .

5) Tracer les trois composantes ensemble, pour **t** entre 0 et 6π.

6) Définir **angle[t]** une fonction qui représente α(t), l' angle par rapport à l' axe Ox de la projection dans le plan Oxy du vecteur μ (t).
(*Indice* : cet angle s' exprime en termes des composantes μ_x et μ_y et on utilisera **ArcTan**).
Que vaut $\alpha(0)$?

7) Tracer la fonction α en fonction du temps pour $0 < \mathbf{t} < 6\pi$. Vérifier que 2π est une période du mouvement.

8) On va représenter les composantes μ_x et μ_y à l' aide de **ParametricPlot**. Reproduire la figure ci-dessous



de la trajectoire de la projection de μ dans le plan Oxy. Pour les

points, utiliser **Graphics[** où

{Red, PointSize[Large], Arrowheads[0.1], Point[{μ_{x0}, μ_{y0}**}], Arrow[{{**μ_{x1}, μ_{y1}**}, {**μ_{x2}, μ_{y2}**}}]}]**

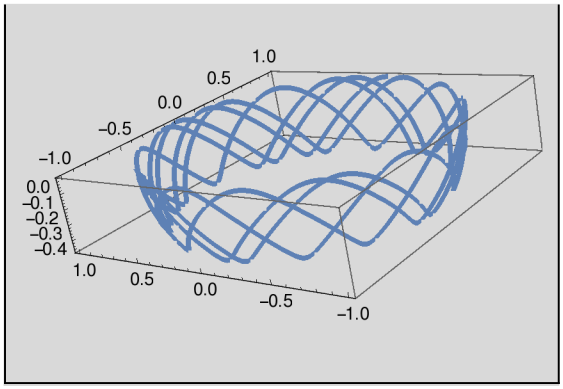
μ_{x0} et μ_{y0} sont les composantes de μ à **t→0**, μ_{x1} et μ_{y1} les composantes de μ à **t→0.4** et μ_{x2} et μ_{y2} les composantes de μ à **t→0.5** ; puis rassembler les avec la trajectoire en utilisant **Show**.

.

9) On étudie à présent l'effet d'une composante de champ supplémentaire, en rotation dans le plan Oxy. On prendra B_x = Cos (5 t), B_y = Sin (5 t) et on garde la composante B_z = 1. Recalculer (ou redéfinir) **prodvec** puis la résoudre avec **NDSolve** et les conditions initiales $\mu_x = 1$, $\mu_y = 0$, $\mu_z = 0$. Vous choisirez l'intervalle de résolution [0,10π].

10) Définir **dipol2[t]** la solution, tracer ses trois composantes ensemble, pour **t** entre 0 et 10π.

11) On va représenter μ à l' aide de **ParametricPlot3D**. Reproduire la figure ci-dessous,



qui représente la trajectoire de μ dans l'espace.

Exercice 2 : matrices & statistiques

1) Définir le vecteur de dimension **n**, que vous noterez **a[n]**, dont les composantes sont les nombres entiers de **1** à **n**. Voici **MatrixForm[a[3]]** : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) Définir la matrice ligne **n**×1, que vous noterez **aa[n]**, égale à la liste **{a[n]}**. Voici **MatrixForm[aa[10]]**

```
( 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 )
```

Vérifier que **aa[n][[1]]** donne **a[n]** pour au moins trois valeurs de **n**.

3) Définir la matrice **n**×2, que vous noterez **b[n,m]**, dont la première ligne est **a[n]** et la seconde composée de zéros, sauf à la **m**^{ème}colonne, où on met **1**. Voici **MatrixForm[b[10,6]]**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Vérifier sur au moins trois ensembles que, ∀ **n1**, **n2** entiers strictement positifs, **Transpose[aa[n1]].aa[n2]** existe et que son rang est 1 (utiliser **MatrixRank**).

5) Vérifier sur au moins trois exembles que, ∀ **n1**, **m1**, **n2**, **m2** entiers strictement positifs (avec **m1** ≤ **n1** et **m2** ≤ **n2**), **Transpose[b[n1,m1]].b[n2,m2]** existe et que son rang est 2 (utiliser **MatrixRank**).

6) Calculer, pour au moins deux exemples, **aa[n].Transpose[aa[n]]** . Pourquoi ne peut-on pas faire le calcul avec deux valeurs de n différentes?

7) Calculer, pour au moins deux exemples, **b[n,m1].Transpose[b[n,m2]]** . Pourquoi ne peut-on pas faire le calcul avec deux valeurs de n différentes?

8) Définir le vecteur de dimension **n**, que vous noterez **un[n]**, dont les composantes toute **1**.

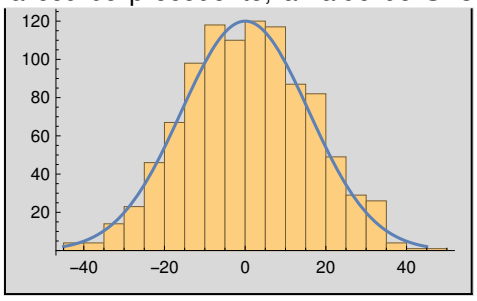
9) Définir la matrice **n×n**, que vous noterez **mat[n]**, dont les composantes sont données par **RandomInteger[{-5,5}]**. Pourquoi est-il particulièrement important ici de différer l'affectation?

10) Définir **som[n]**, la somme des composantes de **mat[n].un[n]**, en utilisant **Tr** . Calculer trois **som[n]** différentes pour trois valeurs de **n** différentes.

11) Définir une liste de **1000** tirages de **som[5]**, que vous noterez **echant1**, en utilisant **Table**. Pourquoi est-il particulièrement important ici de différer l'affectation?

12) Tracer l'histogramme de **echant1**, en écrivant **Histogram[echant1,{5}]** (on écrit {5} pour la largeur de colonne adéquate ici).

13) Tracer la courbe de la gaussienne **120 Exp[-x^2/500]**, pour **x** variant de **–45** à **45**. Réunir avec la courbe précédente, à l'aide de **Show** : vous devriez obtenir quelque chose ressemblant à



14) Définir le vecteur de dimension **n**, que vous noterez **vec[n]**, dont les composantes sont données par **RandomInteger[{-5,5}]**. Pourquoi est-il particulièrement important ici de différer l'affectation?

15) Définir **scal[n]**, le produit scalaire de **mat[n].un[n]** et de **vec[n]** . Calculer trois **vec[n]** différentes pour trois valeurs de **n** différentes.

16) Définir une liste de **1000** tirages de **scal[5]**, que vous noterez **echant2**, en utilisant **Table**.

17) Tracer l'histogramme de **echant2**, en écrivant **Histogram[echant2,{5}]** .

18) Tracer la courbe de la gaussienne **40 Exp[-x^2/4000]**, pour **x** variant de **–150** à **150**. Réunir avec la courbe précédente, à l'aide de **Show** : vous devriez obtenir quelque chose ressemblant à