

Examen de *Mathematica*

Partiel du 6 novembre 2014

Durée : 2 h. Seule l'aide intégrée à *Mathematica* est autorisée.

Out[3]=

selectionner votre nom

Ceci est votre carnet d'examen. Soignez la présentation. Enregistrez très régulièrement. Les carnets seront transférés et imprimés par nos soins après l'examen pour être notés.

Exercice 1 : précession d'un moment dipolaire

On étudie le mouvement de precession d'un moment dipolaire sous l'effet d'un champ magnétique.

1) Définir **mu[t]** un vecteur à trois composantes, qui représente le moment dipolaire $\mu(t)$, dont les composantes sont les symboles **mux[t]**, **muy[t]** et **muz[t]**.

Définir **B** le vecteur champ magnétique, dont les composantes sont 0, 0 et 1.

2) Vérifier que **B** est de norme 1.

3) L'équation différentielle qui gouverne le mouvement est : $d\mu/dt = \mu \times B$. Plutôt que d'écrire composante par composante ($d\mu_x/dt = -\mu_y$, etc.), on peut l'écrire **proddvec=Cross[B,mu[t]]**.

Définir **proddvec** puis la résoudre formellement avec **DSolve** sans conditions initiales.

4) Définir **dipole[t]** la solution, correspondant aux conditions initiales **C[1]→1/2**, **C[2]→-1/2** et **C[3]→1/4**.

5) Tracer les trois composantes ensemble, pour **t** entre 0 et 6π .

6) Définir **angle[t]** une fonction qui représente $\alpha(t)$, l'angle par rapport à l'axe Ox de la projection dans le plan Oxy du vecteur $\mu(t)$.

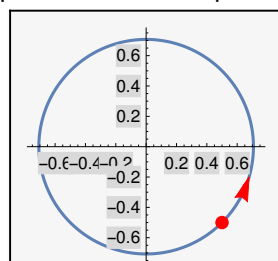
(Indice : cet angle s'exprime en termes des composantes μ_x et μ_y et on utilisera **ArcTan**).

Que vaut $\alpha(0)$?

7) Tracer la fonction α en fonction du temps pour $0 < t < 6\pi$. Vérifier que 2π est une période du mouvement.

8) On va représenter les composantes μ_x et μ_y à l'aide de **ParametricPlot**. Reproduire la figure ci-

dessous



points,

de la trajectoire de la projection de μ dans le plan Oxy. Pour les

utiliser

Graphics[

où

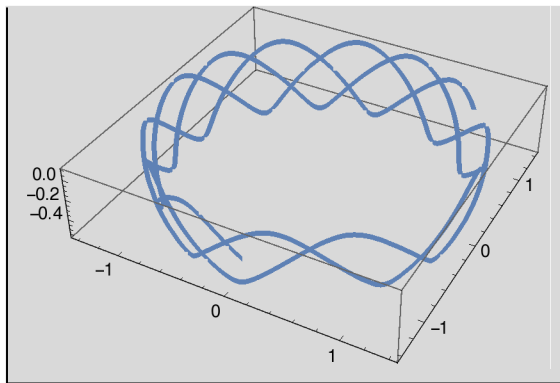
{Red, PointSize[Large], Arrowheads[0.1], Point[{ μ_{x0} , μ_{y0} }], Arrow[{ $\{\mu_{x1}, \mu_{y1}\}, \{\mu_{x2}, \mu_{y2}\}\}]}$

μ_{x0} et μ_{y0} sont les composantes de μ à $t \rightarrow 0$, μ_{x1} et μ_{y1} les composantes de μ à $t \rightarrow 0.4$ et μ_{x2} et μ_{y2} les composantes de μ à $t \rightarrow 0.5$; puis rassembler les avec la trajectoire en utilisant **Show**.

9) On étudie à présent l'effet d'une composante de champ supplémentaire, en rotation dans le plan Oxy. On prendra $B_x = \cos(5t)$, $B_y = \sin(5t)$ et on garde la composante $B_z = 1$. Recalculer (ou redéfinir) **proddvec** puis la résoudre avec **NDSolve** et les conditions initiales $\mu_x = 1$, $\mu_y = 1$, $\mu_z = 0$. Vous choisirez l'intervalle de résolution $[0, 6\pi]$.

10) Définir **dipol2[t]** la solution, tracer ses trois composantes ensemble, pour t entre 0 et 6π .

11) On va représenter μ à l'aide de **ParametricPlot3D**. Reproduire la figure ci-dessous,



qui représente la trajectoire de μ dans l'espace.

Exercice 2 : matrices & statistiques

1) Définir le vecteur de dimension n , que vous noterez **a[n]**, dont les composantes sont les nom-

bres entiers de n à 1. Voici **MatrixForm[a[3]]** :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Définir la matrice ligne $n \times 1$, que vous noterez **aa[n]**, égale à la liste **{a[n]}**. Voici **MatrixForm[aa[10]]**

(10 9 8 7 6 5 4 3 2 1)

Vérifier que **aa[n][[1]]** donne **a[n]** pour au moins trois valeurs de n .

3) Définir la matrice $n \times 2$, que vous noterez **b[n,m]**, dont la première ligne est **a[n]** et la seconde composée de zéros, sauf à la $m^{\text{ème}}$ colonne, où on met 1. Voici **MatrixForm[b[10,6]]**

$$\begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Vérifier sur au moins trois ensembles que, $\forall n1, n2$ entiers strictement positifs, **Transpose[aa[n1]].aa[n2]** existe et que son rang est 1 (utiliser **MatrixRank**).

5) Vérifier sur au moins trois exemples que, $\forall n1, m1, n2, m2$ entiers strictement positifs (avec $m1 \leq n1$ et $m2 \leq n2$), **Transpose[b[n1,m1]].b[n2,m2]** existe et que son rang est 2 (utiliser **MatrixRank**).

6) Calculer, pour au moins deux exemples, **aa[n].Transpose[aa[n]]**. Pourquoi ne peut-on pas faire le calcul avec deux valeurs de n différentes?

7) Calculer, pour au moins deux exemples, $\mathbf{b}[n, m1].\text{Transpose}[\mathbf{b}[n, m2]]$. Pourquoi ne peut-on pas faire le calcul avec deux valeurs de n différentes?

8) Définir le vecteur de dimension n , que vous noterez $\mathbf{un}[n]$, dont les composantes sont toutes 1.

9) Définir la matrice $n \times n$, que vous noterez $\mathbf{mat}[n]$, dont les composantes sont données par $\text{RandomInteger}[\{-3, 3\}]$. Pourquoi est-il particulièrement important ici de différer l'affectation?

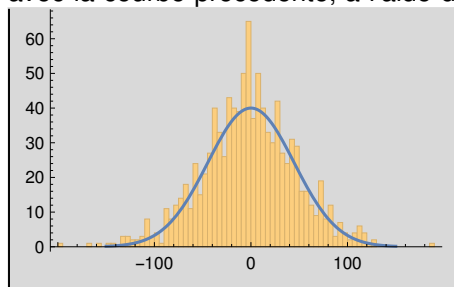
10) Définir le vecteur de dimension n , que vous noterez $\mathbf{vec}[n]$, dont les composantes sont données par $\text{RandomInteger}[\{-5, 5\}]$. Pourquoi est-il particulièrement important ici de différer l'affectation?

11) Définir $\mathbf{scal}[n]$, le produit scalaire de $\mathbf{mat}[n].\mathbf{un}[n]$ et de $\mathbf{vec}[n]$. Calculer trois $\mathbf{vec}[n]$ différentes pour trois valeurs de n différentes.

12) Définir une liste de 1000 tirages de $\mathbf{scal}[5]$, que vous noterez $\mathbf{echant1}$, en utilisant Table .

13) Tracer l'histogramme de $\mathbf{echant1}$, en écrivant $\text{Histogram}[\mathbf{echant1}, \{5\}]$.

14) Tracer la courbe de la gaussienne $40 \text{Exp}[-x^2/4000]$, pour x variant de -150 à 150 . Réunir avec la courbe précédente, à l'aide de Show : vous devriez obtenir quelque chose ressemblant à



15) Définir $\mathbf{som}[n]$, la somme des composantes de $\mathbf{mat}[n].\mathbf{a}[n]$, en utilisant Tr . Calculer trois $\mathbf{som}[n]$ différentes pour trois valeurs de n différentes.

16) Définir une liste de 1000 tirages de $\mathbf{som}[5]$, que vous noterez $\mathbf{echant2}$, en utilisant Table .

17) Tracer l'histogramme de $\mathbf{echant2}$, en écrivant $\text{Histogram}[\mathbf{echant2}, \{5\}]$.

18) Tracer la courbe de la gaussienne $35 \text{Exp}[-x^2/5000]$, pour x variant de -160 à 160 . Réunir avec la courbe précédente, à l'aide de Show : vous devriez obtenir quelque chose ressemblant à

