Partiel de Mécanique Générale

2 novembre 2015

Durée : 2 heures - sans document ni calculatrice.

1 Question de cours

1.1 Moment d'inertie par rapport à un axe

On considère un cylindre plein, homogène, de hauteur H, de masse volumique ρ, de masse totale M et de rayon R.

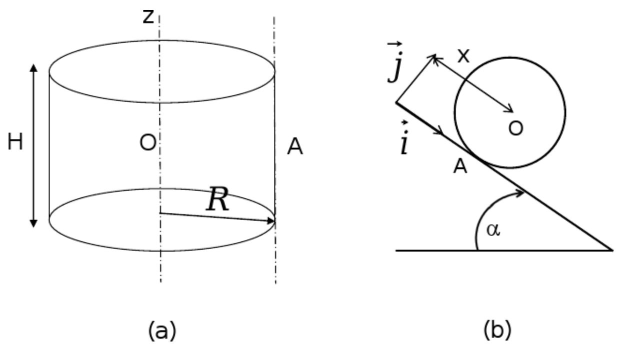

Figure 1: (a) Moment d'inertie d'un cylindre plein de rayon R et de hauteur H (homogène). (b) Cylindre roulant sans glisser sur un plan incliné d'angle α.

1. Calculer le moment d'inertie I_O de ce cylindre par rapport à l'axe Oz (voir figure 1). Le comparer au moment d'inertie d'un disque plat par rapport à un axe perpendiculaire passant par son centre.
2. Donner la formule de Huygens relative au moment d'inertie d'un corps solide entre deux axes parallèles distants de la distance d.
3. En déduire le moment d'inertie I_A du cylindre pour un axe de rotation parallèle à Oz mais passant par A (voir figure 1).

1.2 Cylindre roulant sans glisser sur une pente

Le cylindre précédent roule sans glisser sur un plan incliné d'angle α.

1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le cylindre.
2. En utilisant le théorème du moment cinétique au point de contact (considéré comme étant immobile à chaque instant), montrer que l'accélération angulaire s'écrit

$$\ddot{\theta} = B \sin\alpha$$

dont on donnera la valeur de la constante B en fonction de g (la constante de gravité), de R et de α. Donner alors l'accélération en x.

2 L'atome d'hydrogène "classique"

On considère un atome d'hydrogène, constitué d'un noyau de masse M, de charge $+Q$, et d'un électron de masse m, de charge $-Q$. Le noyau et l'électron sont considérés comme des masses ponctuelles en interaction électrostatique, l'énergie potentielle d'interaction étant donnée par:

$$V = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

On considère le cas où $M \gg m$ et le noyau est immobile, au point O, dans le référentiel du centre de masse. Le noyau et l'électron seront considérés comme des corpuscules classiques, non quantiques.

1. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle entre le noyau et l'électron.

2. Montrer que l'interaction électrostatique est dominante dans ce problème et que l'interaction gravitationnelle peut être négligée.

3. Quel fait remarquable permet de conclure que le mouvement sera nécessairement plan ? Dans toute la suite du problème, on repèrera la position de l'électron par rapport au noyau par ses coordonnées polaires, r étant la distance noyau-électron, θ la position angulaire de l'électron par rapport à l'axe Ox dans le plan.

4. Écrire l'énergie cinétique de l'électron, $T(r, \dot{r}, \dot{\theta})$, exprimée dans le référentiel du noyau.

5. Écrire l'énergie mécanique du système sous la forme

   $$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_e(r, \dot{\theta}),$$

   où on explicitera le potentiel effectif $V_e(r, \dot{\theta})$.

6. On note J le moment cinétique de l'électron par rapport à un axe passant par le noyau et perpendiculaire au plan du mouvement. Donner l'expression de J en fonction de m, r et $\dot{\theta}$.

7. Réécrire $V_e(r, \dot{\theta})$ sous une forme qui ne fasse plus apparaître $\dot{\theta}$,

   $$V_e(r, \dot{\theta}) \equiv V_e(r) = -\frac{1}{r}\left(\alpha - \frac{\beta}{r}\right),$$

   où l'on explicitera les constantes α et β en fonction des données du problème.

8. Tracer le potentiel $V_e(r)$ en fonction de r en précisant la position de sa tangente horizontale.

9. En se basant sur la forme de $V_e(r)$, discuter les différentes trajectoires possibles pour l'électron, selon les valeurs que peut prendre l'énergie totale, E.

10. Pour quelle valeur de l'énergie mécanique E la trajectoire sera-t-elle circulaire ? Quel sera le rayon, R, de cette orbite ?

Données:

Masse du noyau	$M \simeq 1.7 \times 10^{-27}$ kg
Masse de l'électron	$m \simeq 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Charge de l'électron	$Q \simeq 1.6 \times 10^{-19}$ C
Constante de Coulomb	$1/(4\pi\epsilon_0) \simeq 9 \times 10^9$ N·m^2·C^{-2}
Constante de gravitation	$\mathcal{G} \simeq 6.7 \times 10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}