Université de Paris sud 11 **année 2014/2015**

LICENCE DE PHYSIQUE L3 PPAP LANGAGE SYMBOLIQUE

Examen du 18 décembre 2015
Durée : 2h
L'aide-mémoire non annoté est autorisé.
Le soin et la présentation seront notés.
Ne pas écrire de symboles avec des indices ou des exposants.

A Listes

1 Mélange alterné de deux listes

a. Définir une commande **cte**[a,n] qui crée une liste constante de longueur n et dont toutes les composantes sont a.

b. Écrire la commande permettant de former à l'aide des listes **cte**[a,n] et **cte**[b,n] une liste alternée $\{a, b, a, b, a, b, ...\}$ de longueur $2n$, à l'aide de **Riffle**.

c. Écrire une autre commande permettant d'obtenir le même résultat, à l'aide de **Transpose** et de **Flatten**.

2 Matrice par blocs

On veut écrire une fonction **bloc** qui crée une matrice bM de taille $m \times n$ (c'est-à-dire composée de m lignes et n colonnes) à partir de quatre matrices a de taille $m1 \times n1$, b de taille $m1 \times n2$, c de taille $m2 \times n1$ et d de taille $m2 \times n2$, de sorte que **bloc** a quatre arguments et $bM = \mathbf{bloc}(a, b, c, d)$ s'écrit matriciellement

$$bM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

a. Écrire la commande **bloc**.
Pour que bM soit une matrice, il faut utiliser **Flatten** *avec l'option* {{1,3},{2,4}}.

b. Pour vérifier que les arguments a, b, c et d sont bien des matrices, introduire un test **MatrixQ**[a], **MatrixQ**[b], ..., qui donne **True** si c'est le cas et **False** sinon. Vérifier de plus que les tailles des matrices sont compatibles, c'est-à-dire que les nombres de lignes de a et b sont égaux, ainsi que ceux de c et d, et que les nombres de colonnes de a et c sont égaux, ainsi que ceux de b et d.

c. **bonus** S'il y a une incompatibilité, vous pouvez prévoir un affichage d'erreur. pour les plus rapides, préciser dans le message les erreurs.

d. Optionnellement, écrire la commande à l'aide d'un **Module**.

3 Matrice tridiagonale

Écrire les instructions pour créer la matrice **mat**[n] de taille $n \times n$, dont la diagonale principale est nulle et toutes les autres diagonales composées d'un même nombre, qui mesure la distance à la diagonale principale. Voici par exemple, la représentation matricielle

de **mat**[5].

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B Équations

1 Maximum d'une fonction

a. Écrire une commande **max** qui donne la position du maximum d'une fonction à l'aide de **Solve**, en calculant sa dérivée. Le résultat doit être sous la forme d'un nombre.[1] Avec **Select** ou **Cases**, sélectionner la plus petite solution positive ou, s'il n'en existe pas, la plus grande négative.

Penser à préciser le nom de la variable et à réduire le domaine de résolution aux réels. On ne se préoccupera pas de savoir si la commande marche pour chaque fonction. Vous êtes libre de prévoir une fonction ordinaire ou intrinsèque comme argument.

b. Appliquer **max** à la fonction $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

c. Tracer la fonction f sur l'intervalle $[-3, 5]$ et indiquer le maximum par un point rouge sur la courbe et un point noir correspondant sur l'axe des abscisses. Prévoir une taille convenable pour les points.

d. Écrire un **Module** accomplissant toutes les tâches précédentes pour une fonction quelconque.

2 Équations différentielles

a. Donner les instructions permettant de résoudre formellement $f''(x)+f(x) = \cos(\omega x)$ sans conditions initiales. Puis définir une solution, avec le choix $\mathbf{C}[1] \to 1$ et $\mathbf{C}[2] \to 0$, et donner les instructions pour la tracer sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour les valeurs de ω allant de 0 à π par pas de $\pi/5$.

b. Donner les instructions permettant de résoudre numériquement[2] $f''(x)+\sin(f(x)) = \cos(\omega x)$, avec la condition initiale $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Puis donner les instructions pour la tracer sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour les valeurs de ω allant de 0 à π par pas de $\pi/5$.

C Graphisme

1 Spirale

On désire créer une liste de points $P_1, P_2, P_3, ...$ sur une spirale décrite par l'équation (en coordonnées polaires) $r = \theta/10$. On notera $r(\theta) = \theta/10$.

a. Écrire la commande qui crée la liste *lpolair* des couples de coordonnées $(r(\theta), \theta)$, θ variant de 0 à $20\,\pi$ par pas de 5° (à convertir en radians).

1. Réel ou exact, c'est *Mathematica* qui le détermine.
2. La résolution formelle ne donne pas de résultat.

b. Convertir la liste *lpolair* en coordonnées cartésiennes (x, y) en utilisant **Map**, **Cos** et **Sin**. Mettre le résultat dans la variable *lcartes*.

   On rappelle que $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$.

c. Écrire les commandes permettant de tracer un graphe où chaque point de la liste *lcartes* est représenté par un disque de rayon $r/50$ et de couleur alternativement rouge et bleu.

2 Ondes polarisées

Une onde polarisée se propageant rectilignement selon un axe $z'Oz$ s'écrit, dans le plan $z = 0$, (pour la partie champ électrique)

$$E_x = E_{0x}\cos(\omega t + \varphi_x) \qquad E_y = E_{0y}\cos(\omega t + \varphi_y)\ .$$

L'objet de l'exercice est de distinguer les différents type de polarisation (les courbes obtenues sont : une droite, si la polarisation est rectiligne, un cercle, si elle est circulaire, et une ellipse dans le cas elliptique), les flèches demandées à la suite permettent de distinguer les polarisations droite et gauche pour les cas non rectiligne.

a. Définir une commande permettant de tracer la courbe paramétrée des points (E_x, E_y) sur une période, pour un choix des variables ω, φ_x, φ_y, E_{0x} et E_{0y}.

   Ajouter sur le dessin le point correspondant à $t = 0$, la flèche indiquant dans quel sens la courbe est parcourue.

b. Prévoir une commande **Manipulate** pour représenter le dessin précédent en faisant varier le déphasage et l'excentricité.

c. Ajouter à l'aide de **Dynamique** un affichage dynamique indiquant la valeur du déphasage $\varphi_x - \varphi_y$ et celle de l'excentricité E_{0x}/E_{0y}.

   Attention, il faut utiliser l'option **LocalizedVariables** *avec le* **Manipulate**.