

EXAMEN : « COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX »

4 janvier 2016. Les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les documents ne sont pas autorisés. Les calculatrices non programmables sont autorisées. La durée totale de l'épreuve est de 3h.

I Questions de cours

1. Le tenseur d'élasticité permet de calculer le tenseur des contraintes en fonction du tenseur des déformations. Donner toutes les composantes du tenseur d'élasticité puis exprimer ε_{zz} en fonction des différents σ_{ij} et des modules élastiques adaptés.
2. Donner la définition du tenseur des déformations ε et du tenseur des taux de déformations $\dot{\varepsilon}$ en fonction des coordonnées du vecteur déplacement \vec{u} de coordonnées u_x, u_y, u_z et du vecteur vitesse \vec{v} de coordonnées v_x, v_y, v_z .
3. On applique une contrainte uniaxiale σ_0 :
 - (a) à un matériau visqueux de viscosité η
 - (b) à un matériau élastique de module d'Young E
 - (c) à un matériau viscoélastique de viscosité η et d'élasticité E .Dans chacun des cas, donnez la déformation ε ou le taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ (vous choisirez le plus adapté) en fonction de η et/ou E .
4. Quelle est l'origine des interactions de Van der Waals ? L'énergie d'interaction de Van der Waals varie comme $1/r^n$. Combien vaut n ?
5. Qu'est-ce qui maintient la cohésion dans un cristal ionique ? D'où viennent les interactions répulsives à courte portée ?

II Le principe du Lamellé–Collé

Pour obtenir des structures comme celles de la figure 1(a), il faut courber des poutres de bois. Pour cela, on utilise des poutres en lamellé–collé, c'est-à-dire formées de fines planchettes de bois collées les unes sur les autres. Le but de cet exercice est de montrer pourquoi on préfère le lamellé–collé au bois massif.

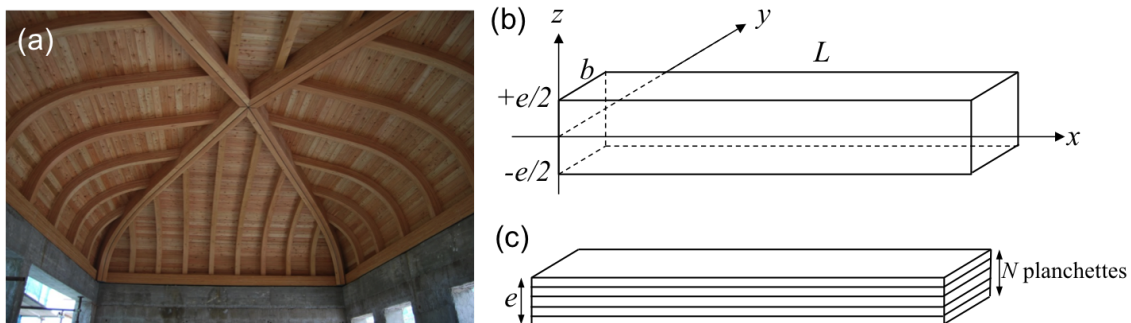


FIGURE 1 – (a) Charpente en lamellé–collé. (b) Schéma d'une poutre en bois massif et notations. (c) Schéma d'une poutre en lamellé–collé.

On rappelle que l'énergie nécessaire pour courber une poutre selon son épaisseur e sur l'axe z est :

$$U = \frac{1}{2} \frac{EIL}{R^2}$$

où L est la longueur de la poutre sur x , b est sa largeur sur y , E le module d'Young du matériau, $I = \iint yz^2 dydz$ le moment quadratique moyen du matériau et R le rayon de courbure que l'on souhaite appliquer au matériau.

1. Calculer le moment quadratique moyen
 - (a) I_m pour une poutre en bois massif d'épaisseur e (Fig. 1(b))
 - (b) I_p pour une planchette d'épaisseur e/N utilisée pour fabriquer la poutre de lamellé-collé (Fig. 1(c)).
2. En déduire l'énergie nécessaire
 - (a) E_p pour courber une planche du lamellé-collé d'épaisseur e/N .
 - (b) E_l pour courber la poutre entière lamellé-collé d'épaisseur e .
 - (c) E_m pour courber la poutre en bois massif d'épaisseur e .
3. Commenter le résultat.

III Mesure de la variation de tension de surface le long d'un film de savon vertical

On s'intéresse dans ce problème à un film de savon qui est nourri continument par un débit Q de liquide (Fig. 2). Ce débit de liquide ajouté en continu en haut du film permet de garder le film plusieurs heures durant afin de l'étudier.

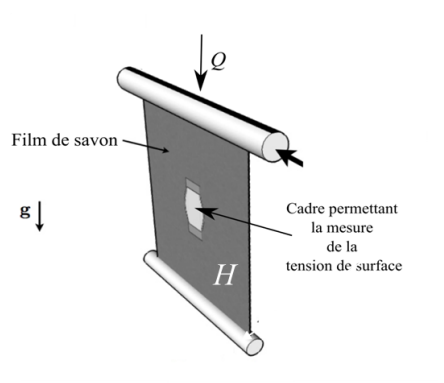


FIGURE 2 – Cadre placé dans le film de savon nourrit par le haut à un débit Q .

1 Mesure de la tension de surface de l'eau savonneuse

Dans cette première partie, on propose une mesure de la tension de surface de la solution savonneuse. Pour ce faire, on utilise la méthode de l'anneau (vue en TP). On plonge un anneau de rayon $R = 3$ cm dans la solution savonneuse et on le retire doucement du liquide. On mesure, grâce à un dynamomètre attaché à l'anneau, la force F exercée par le liquide sur l'anneau.

1. Faire un schéma de l'expérience.
2. Quelles sont les forces qui s'appliquent sur l'anneau juste avant qu'il ne quitte l'interface ?

3. Que faut il faire pour s'affranchir de l'effet du poids de l'anneau ?
4. Donner la formule qui relie la tension de surface γ_0 à la force F mesurée et au rayon R de l'anneau.
5. On mesure $F = 13$ mN. Calculer γ_0 .

2 Mesure de la tension de surface dans le film de savon

Nous allons voir comment il est possible de mesurer le profil de tension de surface $\gamma(z)$ en fonction de la position dans le film. Pour ce faire, des chercheurs¹ ont mis en place une méthode de mesure *in situ*. Il s'agit d'insérer un petit objet (Fig. 3) dans le film et d'observer sa déformation. Ici, l'objet est un cadre dont les deux des parois latérales sont déformables. Initialement, on place l'objet dans le

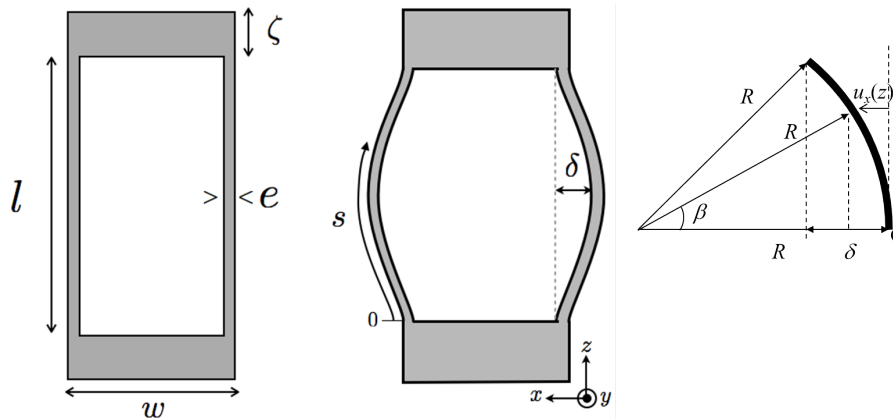


FIGURE 3 – Gauche : cadre non déformé. Centre : cadre dont les parois latérales sont déformées par la tension de surface. Droite : Notations utilisées pour décrire le déplacement d'une barre latérale.

film de savon (Fig. 2). Ensuite, on perce la partie du film de savon au centre du cadre. On a alors un cadre qui est entouré de film de savon. Les barres latérales de ce cadre se déforment sous l'action de la tension de surface et on passe de la situation de gauche de la figure 3 à celle du centre de la même figure. Lors de cette déformation, on note $u_x(z)$ le déplacement de la barre latérale.

6. Expliquer pourquoi seules les parois latérales se déforment (et pas les barres supérieures et inférieures).

Énergie élastique

On cherche ici à calculer l'énergie élastique nécessaire pour courber la paroi latérale, de section carrée de côté $e = 0.8$ mm et de longueur $\ell = 2.4$ cm. Son module d'Young est $E = 0.3$ MPa.

7. La paroi latérale subit une flexion. Quelle est la contrainte qu'elle subit ? Un cisaillement, une déformation ou une combinaison des deux ?
8. Justifier que la seule contrainte présente dans le matériau est donc σ_{xx} .
9. En utilisant le module d'Young E et le module de poisson ν , en déduire les valeurs de toutes les composantes du tenseur des déformations.
10. On modélise la paroi latérale par un arc de cercle de rayon de courbure R (Figure 3 Droite). Calculer $u_x(z)$ en fonction de β puis en fonction de z pour β petit. On prendra l'origine de l'axe z au point O (Figure 3 Droite). On estime le rayon de courbure R de la paroi à latérale à $R = \frac{\ell^2}{\delta}$.
11. Donner la définition de ε_{xz} en fonction de u_x et u_z . En déduire u_z .

1. Adami, N and Caps, H, *Surface tension profiles in vertical soap films*, *Physical Review E*, **91**,013007,2015.

12. Donner la définition de ε_{zz} en fonction du déplacement u_z . En déduire ε_{zz} puis σ_{zz} .
13. Donner la définition générale de la variation d'énergie par unité de volume dU_e^V lors d'une variation du tenseur des déformations $d\varepsilon$. Quelle est sa valeur dans le cas particulier de la flexion de la barre latérale ?
14. En déduire l'énergie U_e^V stockée par unité de volume lors de la déformation.
15. En déduire l'énergie U_e totale stockée lors de la déformation.
16. Montrer que la variation d'énergie élastique dW_e lorsque l'on passe d'une déflexion δ à une déflexion $\delta + d\delta$ est $dW_e = \frac{1}{12} \frac{e^4}{l^3} \delta d\delta$.

En réalité, comme la barre latérale est maintenue par le cadre à ses deux extrémités, l'énergie dépensée est 400 fois plus grande que ce que vous venez de calculer. Dans la suite, on utilisera cette nouvelle énergie.

Énergie de tension de surface

La déformation de la barre latérale crée une augmentation de surface que l'on estime égale à $\frac{\ell\delta}{2}$

17. Combien d'interfaces liquide/air sont accrochées à la paroi latérale ?
18. Quelle est la création d'énergie de surface associée W_γ ?
19. Montrer que la variation d'énergie de surface dW_γ lorsque la tension de surface passe de γ à $\gamma + d\gamma$ est $dW_\gamma = -\ell\delta d\gamma$?
20. Commenter le signe de cette énergie.
21. Que peut-on dire de la variation d'énergie $dW_\gamma + dW_e$ à l'équilibre ?
22. En déduire le lien entre une variation de tension de surface $d\gamma$ et la variation de la déflexion $d\delta$
23. Le film de savon a une hauteur H de 10 cm. On veut mesurer la différence de tension de surface entre le bas et le haut du film de savon. Pour cela, on place le cadre en bas puis en haut du film. On observe une variation de la déflexion $\Delta\delta = 330 \mu\text{m}$. En déduire l'ordre de grandeur de la variation de tension de surface $\Delta\gamma$ entre le bas et le haut du film.

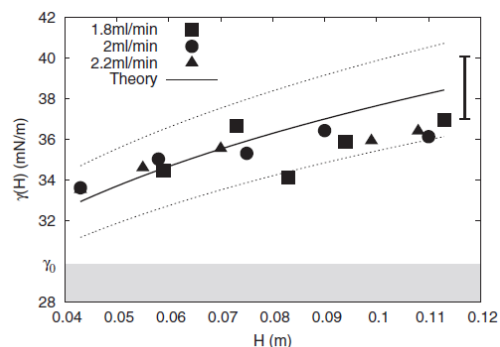


FIGURE 4 – Courbe expérimentale mesurant la tension de surface γ en fonction de la hauteur H dans le film.

24. On considère que la tension de surface en bas du film est γ_0 et que la tension de surface varie linéairement entre le bas et le haut du film. En déduire $\gamma(z)$.
25. Comparer ce résultat aux mesures expérimentales obtenues par Adami et collaborateurs (Figure 4).