Université de Paris sud 11 **année 2014/2015**

LICENCE DE PHYSIQUE L3 PPAP LANGAGE SYMBOLIQUE

Examen du 18 décembre 2014
Durée : 2h30
L'aide-mémoire non annoté est autorisé.
On rappelle, malgré l'utilisation d'indices ou d'exposants dans le texte, que ces objets n'existent pas dans le langage Mathematica.

A Listes

1. Écrire les instructions pour créer la liste **nsept**$[n]$ des nombres entiers strictement positifs multiples de 7, inférieurs ou égaux à n, qui ne sont ni multiples de 2, ni multiples de 5.
2. Écrire les instructions pour créer la commande **milast**$[list]$ dont l'argument $list$ doit être une liste. **milast**$[list]$ vaut, pour $list$ une liste de longueur n paire ($n = 2k$), la liste de ses k derniers termes, et, pour $list$ une liste de longueur n impaire ($n = 2k+1$), la liste de ses $k+1$ derniers termes.
3. Écrire les instructions pour créer la matrice **mat**$[n]$ de taille $n \times n$, définie par :

$$\mathbf{mat}[n]\Big]_{ij} = \begin{cases} \text{pour } |i| = |j| & \begin{cases} \text{si } n \text{ pair } (n = 2k), & \sqrt{|k - i + \frac{1}{2}| + \frac{1}{2}}\,; \\ \text{si } n \text{ impair } (n = 2k+1), & \sqrt{|k + 1 - i| + 1}\,; \end{cases} \\ \text{pour } |i| \neq |j| & 0\,. \end{cases}$$

Voici par exemple, les représentations matricielles de **mat**[5] et **mat**[8].

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B Équations ordinaires

La distance du point $O = (0,0,0)$ au plan π_A passant par le point $A = (a,b,c)$ est celle du plus petit vecteur reliant O au plan π_A. Elle vaut

$$\left|\overrightarrow{OA}.\mathbf{u}\right|$$

où $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{smallmatrix}\right)$ est le vecteur normé orthogonal à la surface du plan π_A et $\mathbf{v}.\mathbf{w}$ est le produit scalaire de deux vecteurs quelconques $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$.

1. Définir la fonction **dist**$[a,b,c,\theta,\varphi]$ à l'aide de **Solve**, où on a paramétré le vecteur $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ à l'aide des variables $\theta \in [0,\pi[$ et $\varphi \in [0,2\pi[$.
2. Définir une fonction **plot**$[a,b,c]$ traçant la courbe à deux dimensions de **dist** en fonction de θ et φ.

C Équations différentielles

1. Expliquer et décrire les différences entre la résolution formelle –utilisant **DSolve**– et la résolution numérique –utilisant **NDSolve**–.
2. Donner les instructions permettant de résoudre formellement $f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x$. Puis définir une solution, avec le choix $\mathbf{C}[1] \to 1$ et $\mathbf{C}[2] \to 0$, et donner les instructions pour la tracer sur l'intervalle $[0, \pi]$.
3. Donner les instructions permettant de résoudre numériquement $f''(x)+\sqrt{1+f(x)^2} = \cos(x)$, avec la condition initiale $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Puis donner les instructions pour la tracer sur l'intervalle $[0, \pi]$.

D Graphisme

1. Définir une commande permettant de tracer ensemble une fonction réelle f et sa dérivée sur un intervalle arbitraire $[a, b]$. Préciser sur quelle type de fonction votre commande peut agir.
2. Définir une commande **gr** permettant de tracer sur un même graphique un ensemble de points quelconques, donnés dans un certain ordre, et les lignes les reliant chacun selon cet ordre donné. Autrement dit, si on représente chaque point P_i par $\{x_i, y_i\}$, alors $\mathbf{gr}[\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}, \cdots]$ produit la ligne reliant P_1 à P_2, puis P_2 à P_3, etc, les points étant dessinés aux arêtes des segments.

   Il n'est pas nécessaire de préciser l'argument de **gr**. Ainsi, le nombre de points est arbitraire.

   Prévoir, dans le code de la commande, de tracer les points en rouge, avec l'épaisseur **PointSize**[0.1] et les traits en noir, d'épaisseur **Thickness**[**Large**].
3. Une amélioration facultative et d'un niveau de difficulté très élevé consiste à structurer les objets sur lesquels opère **gr**. Même dans ce cas, il est possible de prévoir un nombre de points arbitraire.

E Opérateurs

1. Donner une instruction **valp** permettant d'obtenir les valeurs propres d'une matrice de taille $n \times n$ arbitraire.

   Donner une instruction **vecp** permettant d'obtenir les vecteurs propres d'une matrice de taille $n \times n$ arbitraire.
2. Donner une instruction **ordvap** permettant d'ordonner les valeurs propres obtenues par **valp** dans l'ordre croissant de leur partie réelle et, quand les parties réelles sont égales, dans l'ordre croissant de leur partie imaginaire.
3. Donner une instruction permettant d'ordonner les vecteurs propres obtenus par **vecp** dans l'ordre de leurs valeurs propres, généré par **ordvap**.

   Il n'est pas demander de prévoir d'ordre particulier entre vecteurs propres associées à des valeurs propres identiques (=une valeur propre dégénérée), mais, si vous le pouvez, tâchez de décrire l'ordre qui résultera de votre commande, dans ce cas.