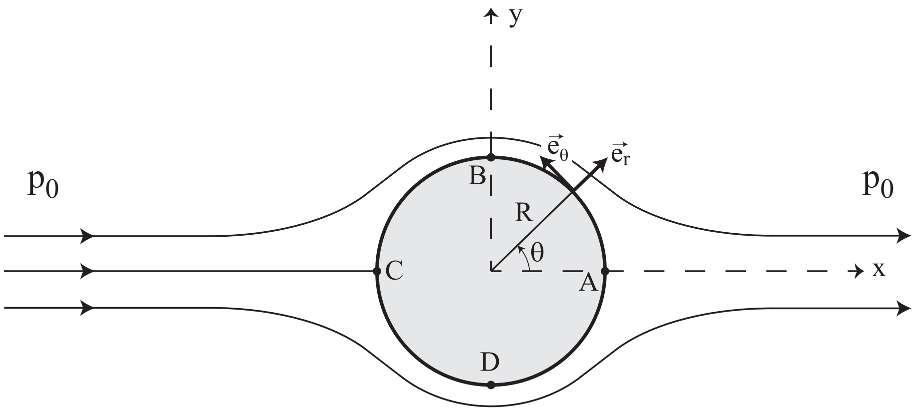
Examen de Mécanique des fluides

Mardi 3 janvier 2017, durée 3h

I. Écoulement d'un fluide autour d'un cylindre

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait autour d'un cylindre d'axe horizontal Oz et de rayon R. La longueur du cylindre est suffisamment grande de sorte que l'on puisse considérer l'écoulement comme purement bidimensionnel loin des extrémités du cylindre. On néglige l'accélération de la pesanteur dans ce problème et la pression du fluide vaut p_0 loin du cylindre. Le champ de vitesse de l'écoulement est donné, en coordonnées cylindriques (r,θ), par

$$\overrightarrow{v} = v_0\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - v_0\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}.$$



1. Montrer que l'écoulement est incompressible et irrotationnel.
2. Montrer que l'écoulement est parallèle à l'axe horizontal Ox loin du cylindre. Exprimer le vecteur vitesse dans ce cas.
3. Exprimer la vitesse du fluide à la surface du cylindre en $r = R$. En déduire les valeurs de la vitesse du fluide aux points A, B, C et D.
4. Exprimer la pression $p(\theta)$, par application du théorème de Bernoulli, sur la surface du cylindre. En déduire les valeurs de la pression du fluide aux points A, B, C et D.
5. Calculer la composante horizontale (traînée) et la composante verticale (portance) des forces de pression qui s'exercent sur le cylindre par unité de longueur selon Oz. Justifier vos résultats par un commentaire physique.

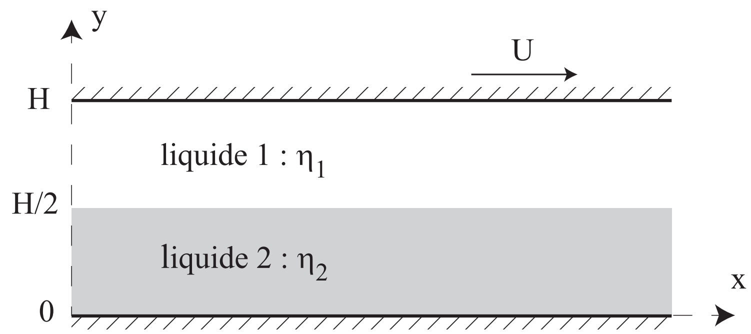
On rappelle que $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$, et les opérateurs divergence et rotationnel d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ en coordonnées cylindriques sont donnés par :

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\, \vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\, \vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\, \vec{e_z}$$

II. Écoulement de deux liquides non miscibles dans un Couette

On considère l'écoulement stationnaire et incompressible de deux liquides visqueux non miscibles (qui ne se mélangent pas) qui sont introduits dans un dispositif de Couette de sorte qu'ils forment deux couches de hauteur $H/2$ égales. On note respectivement η_1 et η_2 les viscosités dynamique (en Pa.s) du liquide 1 et du liquide 2 respectivement. La plaque supérieure se déplace à vitesse constante U, tandis que la plaque inférieure est maintenue fixe. Les deux plaques sont supposées infiniment grande dans la direction z de sorte que l'écoulement est bidimensionnel. On néglige la gravité dans ce problème, on considère qu'il n'y a aucun gradient de pression longitudinal le long de l'écoulement, $dp/dx = 0$, et on suppose enfin que l'interface entre les deux liquides reste plane.



1. On suppose que l'écoulement est parallèle de sorte que la composante verticale de la vitesse est strictement nulle $v = 0$. De quelles variables dépend la composante horizontale u ? Justifier votre réponse.
2. Rappeler l'expression de l'équation de Navier-Stokes sous forme vectorielle et préciser la signification de chacun de ses termes. Simplifier cette équation en justifiant pourquoi certains termes disparaissent.
3. On note u_1 et u_2 les composantes horizontales de vitesse des liquides 1 et 2 respectivement. Rappeler les conditions aux limites cinématique aux parois ainsi que la condition aux limites dynamique à l'interface.
4. On cherche le profil de vitesse du liquide 1 $\forall y \in [H/2, H]$ dans un premier temps. Projeter l'équation de Navier-Stokes dans la direction du mouvement pour le liquide 1 et montrer que le profil de vitesse peut se mettre sous la forme

$$u_1(y) = C + A\,(y - H)\,,$$

   où A et C sont des constantes. Identifier A et C.
5. On cherche cette fois le profil de vitesse du liquide 2 $\forall y \in [0, H/2]$. Montrer qu'il peut se mettre sous la forme

$$u_2(y) = By,$$

   où B est une constante. Identifier B et l'exprimer en fonction de A.

6. À partir de la continuité des vitesses à l'interface, exprimer A et B en fonction de U, H, η_1 et η_2. En déduire l'expression de la vitesse à l'interface U_i.
7. On suppose que la viscosité dynamique du liquide 2 est $\eta_2 = 4\eta_1$.
   (a) Déterminer U_i. Représenter sur un schéma l'allure du profil de vitesse dans le Couette $\forall y \in [0, H]$.
   (b) Un expérimentateur pense qu'il n'y a qu'un seul liquide, de viscosité dynamique η, présent dans le dispositif. Il souhaite déduire la viscosité de ce fluide par mesure de la contrainte σ'_{xy} nécessaire pour imposer la vitesse U. Déterminer la "viscosité apparente" du mélange que l'expérimentateur va mesurer.
8. Représenter sur un schéma l'allure du profil de vitesse dans le Couette si on suppose que les viscosités dynamiques des deux liquides sont telles que $\eta_1/\eta_2 \gg 1$. Même question si $\eta_1/\eta_2 \ll 1$.

III. Écoulement d'air autour d'une aile

On s'intéresse ici à l'écoulement d'air, de masse volumique ρ, autour d'une aile (d'avion ou d'un animal volant). On se place dans le référentiel de l'aile de sorte que l'écoulement soit stationnaire. On considère l'air comme un fluide parfait incompressible et non pesant (on néglige la gravité). L'extension de l'aile selon l'axe Oz étant très grande, on peut considérer l'écoulement comme bidimensionnel. On fait l'hypothèse dans cet exercice que l'écoulement d'air autour de l'aile se comporte comme schématisé sur la figure 1 : les lignes de courant sont parallèles à l'infini en amont et subissent une déflexion au voisinage de l'aile. C'est cette déflexion qui est responsable de la portance et qui permet aux avions et aux oiseaux de voler. On appelle force de traînée la force qu'exerce l'air sur l'aile alignée avec l'écoulement amont (selon $\overrightarrow{e_x}$) et la force de portance sa composante perpendiculaire (selon $\overrightarrow{e_y}$).

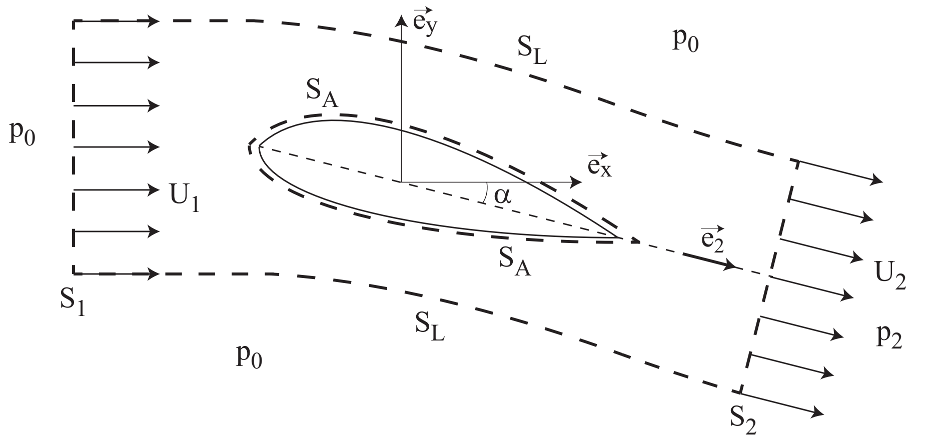


FIGURE 1 – Modèle simplifié schématisant la déflexion des lignes de courant au voisinage d'une aile.

On rappelle l'expression du théorème de transport de Reynolds appliqué à la quantité de mouvement dans le cas d'un écoulement stationnaire d'un fluide parfait non pesant

$$\iint_{SC} \rho \overrightarrow{v} \left(\overrightarrow{v} . \overrightarrow{dS} \right) + \iint_{SC} p \, \overrightarrow{dS} = \overrightarrow{0},$$

où SC désigne la surface de contrôle. On choisit ici une surface de contrôle trouée entourant l'aile, comme schématisée en pointillé sur le schéma, se composant d'une surface amont S_1, d'une surface aval S_2, d'une surface latérale S_L et de la surface entourant le contour de l'aile notée S_A. Les surfaces S_1 et S_L sont prises suffisamment loin de l'aile, de sorte que la pression y est égale à la pression atmosphérique p_0. La surface aval S_2 en revanche est prise lorsque les lignes de courant sont défléchies et la pression vaut p_2. La vitesse de l'air en amont U_1 est horizontale tandis que la vitesse de l'air en aval U_2 est orientée selon le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_2}$ qui forme un angle α par rapport à l'horizontale.

1. Exprimer une relation reliant les vitesses amont et aval, ainsi que l'expression de la différence de pression $p_2 - p_0$ en fonction de ces vitesses.
2. Exprimer la force $\overrightarrow{F}_p = \iint_{S_A} p \; \overrightarrow{dS}$ exercée par l'écoulement sur l'aile à l'aide du théorème de transport appliqué au domaine délimité par les surfaces S_1, S_2, S_L et le contour de l'aile S_A. On précise que les surfaces S_1, S_2 et S_L forment un contour fermé.
3. Préciser l'expression de la traînée F_x que subie l'aile. Justifier que la traînée est nulle et en déduire une deuxième relation permettant d'exprimer S_1 en fonction de S_2. On admettra, pour ce faire, que les surfaces doivent vérifier $S_2 < S_1$.
4. Montrer que la force de portance, que subit l'aile, est donnée par
$$F_L = \rho S_1 U_1^2 \tan \alpha.$$
5. On supposera dans la suite que la section S_1 amont du tube de courant entourant l'aile, dans lequel les lignes de courant sont localement défléchies, est de l'ordre de la surface de l'aile. On suppose par ailleurs que l'avion (ou l'animal volant) a un volume proportionnel à L^3, où L est l'envergure des ailes.
   (a) Exprimer le poids de l'avion/animal de masse volumique ρ_A.
   (b) Écrire la condition d'équilibre qui s'applique sur l'avion/animal. En déduire que l'envergure des ailes doit varier comme une loi de puissance de sa vitesse de déplacement.
   (c) En déduire que le poids de l'avion/animal doit varier comme une puissance de sa vitesse de vol. Cette loi d'échelle est-elle compatible avec les données de la figure 2 ?

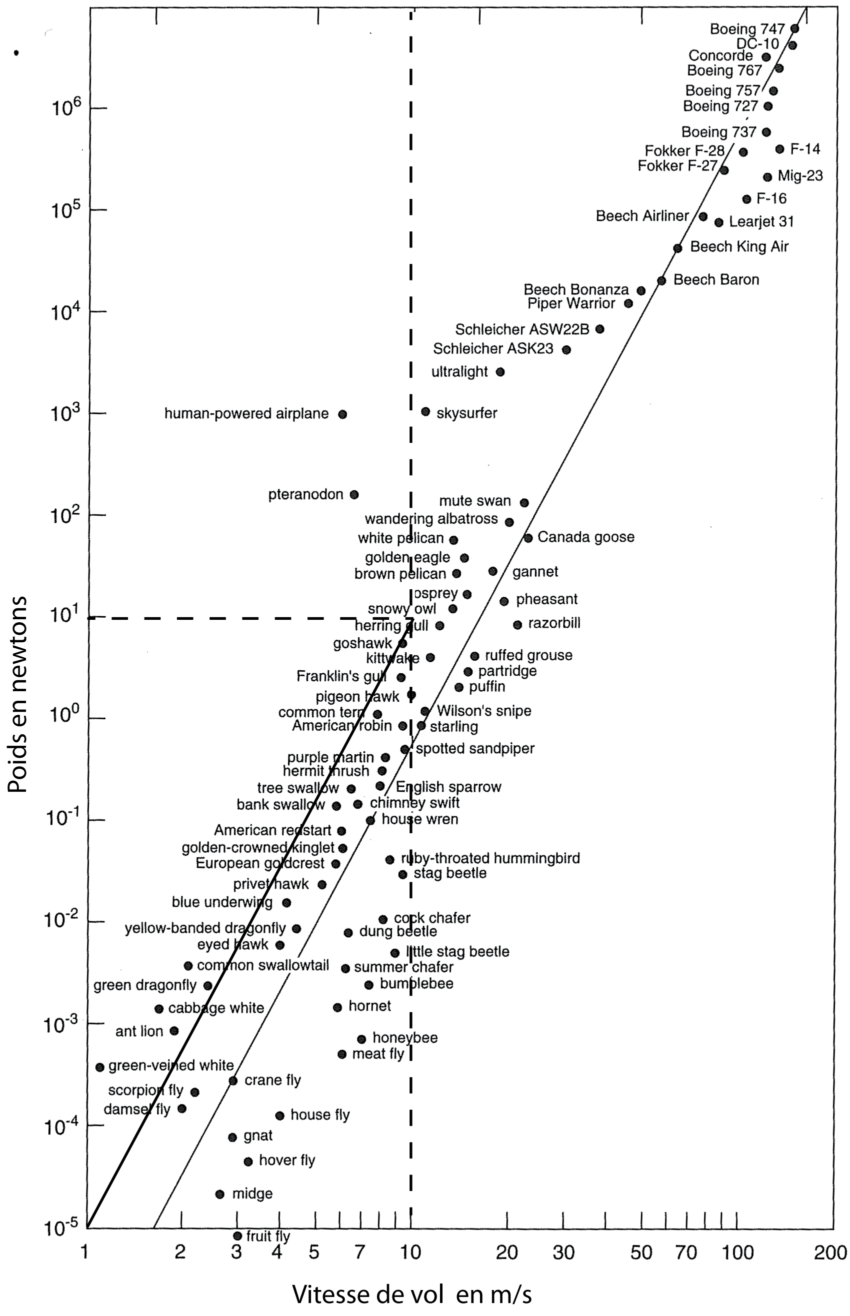


FIGURE 2 – Diagramme du vol établissant une loi d'échelle entre le poids et la vitesse de vol d'animaux et objets volants, des insectes aux avions. Source : The simple Science of Flight : from insects to jumbo jets de H. Tennekes, MIT press, p 12 (1997).