Examen 2016-2017 : Comportement des Matériaux

Documents autorisés. Calculatrice autorisée. Durée 2h15

1 Une branche d'arbre

On considère une branche d'arbre horizontale soumise à son propre poids. On la modélise par une poutre encastrée en $x = 0$ cylindrique, de rayon R et de longueur L (voir Fig. 1).

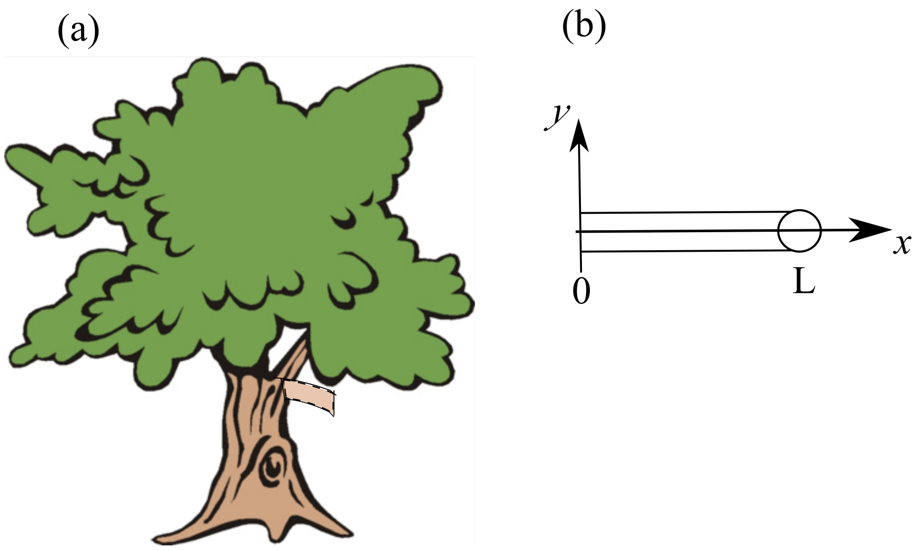

FIGURE 1 – *(a) Schéma d'une branche d'arbre. (b) Notations.*

1. Quelle est la surface neutre de la branche ?
2. Calculer le moment quadratique I de la branche considérée comme étant un cylindre de rayon r.

   On rappelle que l'équation de la déformée d'une poutre sous l'action d'une force linéïque F_L est : $EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F_L$
3. Quelle est la dimention de F_L ?
4. On considère que la branche est une poutre encastrée (dans l'arbre) soumise uniquement à son propre poids. Donner l'expression du poids de la branche P en fonction de la masse volumique ρ_B du bois. En déduire la force linéïque (poids par unité de longueur) P_L qui s'applique à la branche.
5. On note $y(x)$ l'équation de la déformée de la poutre, c'est à dire la position de la surface neutre en fonction de x. Quelles sont les valeurs de $y(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial x}$ en $x = 0$?
6. Montrer que la déformée de la branche est $y(x) = \frac{\rho_B}{ER^2}(\frac{x^4}{6} - \frac{2}{3}Lx^3 - L^2x^2)$ sachant que en $x = L$ on a $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ et $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$
7. Que vaut la flèche maximale de la branche ?
8. Application numérique : $L = 2$ m, $R = 10$ cm, $\rho = 800$ kg/m^3 et $E_B = 10^7$ Pa.

.

2 Création de rides à la surface d'un matériau mou

On étudie un matériau élastique de module E_v représenté sur la Figure 2. La fabrication de rides à la surface peut s'effectuer selon le principe présenté sur la Figure 3. On commence par appliquer une traction uniaxiale au matériau qui s'allonge de dL. Ensuite, on le passe sous rayons UV pour durcir la surface. On a alors une épaisseur h de matériau plus dur, de module E_s à la surface. Ensuite on relâche la traction. Le volume mou revient en place et retrouve sa longueur L. La surface va se gondoler car sa longueur est plus longue que la longueur imposée par le matériau mou. L'amplitude des rides est A_0 et leur longueur d'onde est λ, grandeurs que l'on va déterminer dans la suite.

Les trois sous parties sont indépendantes.

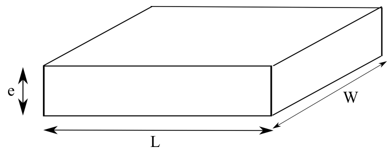

FIGURE 2 – *Schéma du matériau en 3D.*

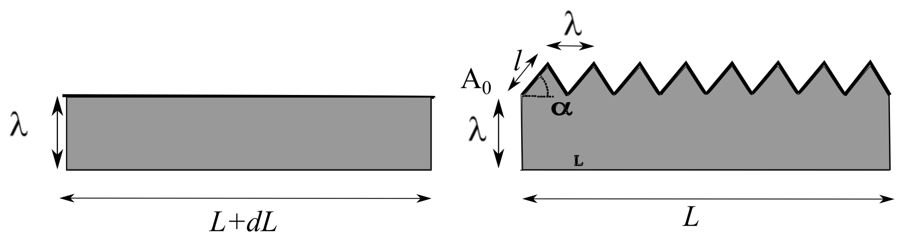

FIGURE 3 – *Principe de la fabrication des rides.*

2.1 Matériau viscoélastique

Dans un premier temps, on considère qu'on a un solide viscoélastique de viscosité $\eta_v = 10^6$ Pa.s et une élasticité $E_v = 5 \cdot 10^5$ Pa. On applique une force $F = 10$ N uniaxiale, au matériau.

1. Calculer le temps caractéristique τ qui caractérise le matériau viscoélastique.
2. Quelle est la déformation ϵ_0 du matériau au bout d'un temps grand devant τ ? On donne $W = 5$ cm et $e = 1$ cm.

2.2 Description des rides

On considère maintenant qu'on travaille à τ suffisamment grand pour qu'on puisse considérer le solide comme uniquement élastique. Dans la suite, on ne prendra donc plus en compte la viscosité. On considère donc un matériau purement élastique, de module d'Young E_v.

2.2.1 Energie de courbure

On va commencer par calculer l'énergie nécessaire à la courbure pour créer les plis avec la couche rigide. Pour cela, on se base sur la modélisation donnée par la Figure 4.

1. Calculer le moment quadratique de la couche rigide d'épaisseur h et de largeur W.
2. Evaluer le rayon de courbure R en fonction de β puis en fonction de A_0 et λ.
3. Montrer que l'énergie U_B nécessaire pour courber une poutre est $U_B = \frac{8}{3} E_s W L h^3 \frac{A_0^2}{\lambda^4}$.

2.2.2 Energie de déformation

La présence des rides crée une déformation dans le matériau. Pour estimer l'énergie que coûte cette déformation, on va modéliser les rides par des triangles, comme sur la Figure 5. Lors de la formation de rides, on passe du schéma de gauche à celui de droite sur cette même

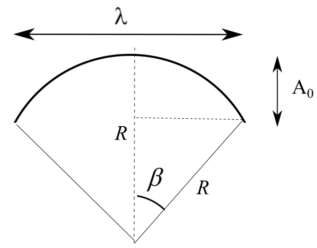

FIGURE 4 – *Schéma d'une demie période des rides.*

figure. La formation de rides exerce donc une traction sur une épaisseur λ du matériau mou de module E_v.

1. Quelle est la déformation maximale ϵ en haut des triangles ?
2. On considèrera cette déformation pour calculer l'énergie de déformation. Calculer l'énergie dissipée par la traction exercée par les rides
   — U_d^v par unité de volume
   — U_d dans l'ensemble du volume grisé

2.2.3 Relation géométrique

Lors de l'apparition des rides, la longueur totale $L + dL$ de la partie durcie, de module E_s ne change pas.

1. Comment appelle-t-on l'instabilité qui mène à la formation de rides plutôt qu'à la compression longitudinale de la couche ?
2. A l'aide du schéma de droite de la figure 5, donner une relation entre la longueur l d'un côté du triangle, l'angle α, L, dL et le nombre N de rides (une ride = un triangle).
3. En déduire la relation qui lie α, L et dL.
4. En considérant α et $\frac{dL}{L}$ petits et en faisant un développement limité à l'ordre 1 calculer $\epsilon_0 = \frac{dL}{L}$ en fonctiond e α puis montrer que $\epsilon_0 = \frac{dL}{L} = \frac{2A_0^2}{\lambda^2}$

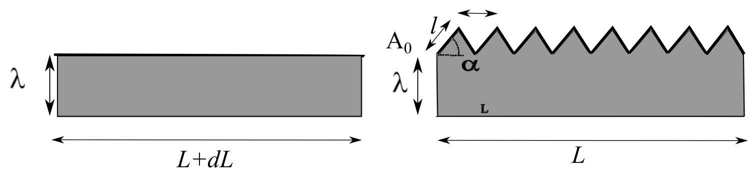

FIGURE 5 – *Modélisation des rides par un motif triangle.*

2.2.4 Energie totale

1. Montrer que l'énergie totale que coûte la création des rides est

$$U = LW\left(\frac{8E_sh^3}{3}\frac{\epsilon_0}{2\lambda^2} + \frac{1}{2}E_v\frac{\epsilon_0\lambda}{2}\right).$$

2. Calculer la valeur de λ qui permet de minimiser cette énergie.
3. Calculer la valeur de A_0 correspondante.

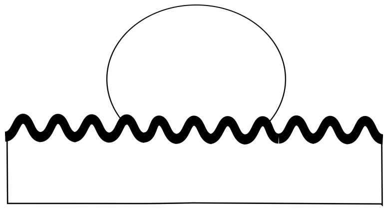

FIGURE 6 – *Goutte posée sur la surface texturée.*

2.3 Utilisation des rides pour créer une surface superhydrophobe

Les rides créent une rugosité qui va pouvoir être utilisée pour modifier les propriétés de mouillage du matériau. On se propose de calculer l'angle de contact(voir Figure 6).

Pour calculer l'angle de contact, on utilise la modèle de la figure 7.

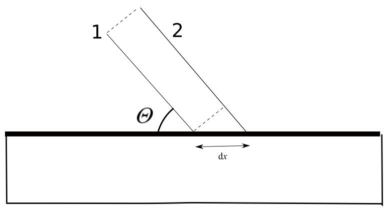

FIGURE 7 – *Avancée de la ligne de contact d'une longueur dx.*

2.3.1 Surface lisse

On commence par considérer une surface lisse.

1. Dessiner la goutte posée sur son substrat et l'angle de contact θ. On va calculer le travail nécessaire pour passer de l'état 1 à l'état 2 (Figure 7). Ce travail est donné par l'énergie de surface $E_2 - E_1$ nécessaire à passer de l'état 1 à l'état 2. On appellera W la longueur du matériau dans la direction transverse.
2. En calculant les différentes surfaces créées, calculer cette différence d'énergie $E_2 - E_1$. On notera γ_{sl} la tension de surface solide/liquide, γ_{sa} la tension de surface solide/air et γ_{la} la tension de surface liquide/air.
3. Que vaut le travail et par conséquent $E_2 - E_1$ lorsque l'angle θ vaut l'angle d'équilibre ?
4. En déduire l'angle d'Young θ_Y.

2.3.2 Surface rugueuse (bonus)

On s'intéresse maintenant à la surface rugueuse. L'effet de la rugosité est d'augmenter la surface solide : si on a un solide de surface A et de rugosité r, la surface réelle du solide est rA. Nous allons refaire le même raisonnement que ci-dessus.

1. Lorsque l'on passe de la situation 1 à la situation 2 de la figure 7 et que la surface a une rugosité r, quelle sont les surfaces liquide/air, solide/air et solide/liquide créées ?
2. En déduire la nouvelle expression de $E_2 - E_1$.
3. Montrer que $\cos\theta = r\cos\theta_Y$.
4. Calculer l'angle de contact pour une rugosité $r = 2$ et un angle d'Young $\theta_Y = 120°$ et $\theta_Y = 80°$.
5. A quelle condition obtient-on un substrat superhydrophobe, c'est-à-dire un substrat dont l'angle de contact est très grand ?