

Comportement des matériaux solides et liquides

Partiel 2017-2018

Documents non autorisés. Calculatrice autorisée. Durée 2h

1 Elasticité d'une planche de parquet

On considère une planche de parquet de section rectangulaire de dimensions

- $L = 500$ mm dans la direction (Ox) de vecteur unitaire \vec{e}_x .
- $\ell = 120$ mm dans la direction (Oy) de vecteur unitaire \vec{e}_y .
- $h = 10$ mm dans la direction (Oz) de vecteur unitaire \vec{e}_z .

1. Faire un schéma de la planche de parquet

Elle est soumise au système de forces uniformément réparties suivant

- une force de traction \vec{F}_1 de 15 kN sur la face de normale \vec{e}_x ,
- une force de compression \vec{F}_2 de 5 kN sur la face de normale \vec{e}_y ,
- une force de compression \vec{F}_3 de 5 kN sur la face de normale \vec{e}_z ,
- une force de cisaillement \vec{F}_4 de 21 kN sur la face de normale \vec{e}_x parallèlement à \vec{e}_z .

2. Pour assurer l'équilibre mécanique, ces forces doivent être accompagnées d'autres forces sur les faces de normales $-\vec{e}_x$, $-\vec{e}_y$ et $-\vec{e}_z$. Donner ces quatre forces.
3. Représenter les huit forces sur un schéma.
4. Calculer la contrainte associée à chacune de ces forces.
5. Pour assurer la symétrie du tenseur des contraintes, une cinquième force \vec{F}_5 doit être ajoutée. Donner sa direction, sa norme et la face à laquelle elle doit être appliquée.
6. En déduire le tenseur des contraintes.
7. Calculer le tenseur des déformations correspondant.
8. En déduire la variation d'énergie volumique dE_v associée à une déformation élémentaire $d\epsilon$.

2 Cisaillement d'un cristal ionique

On considère un cristal ionique de constante de Madelung α . On appelle r la distance entre plus proches voisins. Les plus proches voisins portent des charges opposées de valeur e .

1. Donner l'expression de l'énergie d'interaction électrostatique par atome à l'intérieur du cristal.

On considère, en plus de l'interaction électrostatique une interaction répulsive par atome du type $U_{\text{rep}} = \frac{A}{r^\beta}$ qui modélise la répulsion à courte portée.

2. Quelles sont les valeurs typiques de β ? Dans la suite on prendra $\beta = 14$.
3. En déduire l'énergie d'interaction dans le cristal par atome.
4. Donner l'expression de la distance entre atome à l'équilibre r_0 ainsi que l'énergie E_0 correspondante.

La maille élémentaire du cristal considéré est représentée sur la figure 1. Il s'agit d'une maille cubique centrée, c'est à dire que l'atome central, ici chargé négativement est au centre d'un cube formé par 8 atomes chargés positivement.

On applique un cisaillement au matériau (et donc à la maille élémentaire considérée). La déformation imposée est schématisée sur la figure 1. La moitié des liaisons sont allongées de dr alors que l'autre moitié sont diminuées d'autant si bien que la variation d'énergie dans la maille cubique de côté a due à une petite déformation $d\epsilon$ s'écrit

$$dU = E_0 - \frac{1}{2} (E(r_0 + dr) + E(r_0 - dr))$$

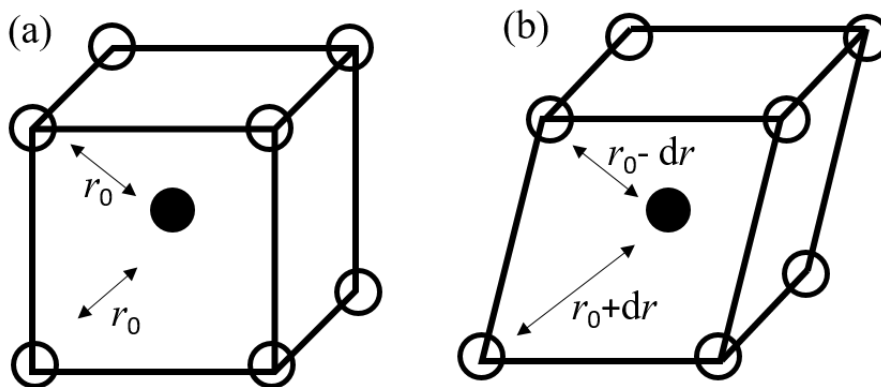


FIGURE 1 – Déformation de la maille cubique sous cisaillement.

5. Montrer que $dU = \left(\frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} - \frac{210 \times A}{2r_0^{14}} \right) \left(\frac{dr}{r_0} \right)^2$

On rappelle que le développement limité au second ordre de la fonction $(1+x)^\alpha$ autour de 0 est

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2}$$

6. En déduire l'énergie par unité de volume dU^v que coûte le cisaillement de la maille cubique.

Au niveau macroscopique, la réponse à une contrainte de cisaillement σ_{cis} est une déformation $\epsilon_{\text{cis}} = \frac{\sigma_{\text{cis}}}{2\mu}$.

7. Quelle est l'énergie associée à cette déformation macroscopique ?
 8. En déduire la valeur de μ . On admettra que la déformation au niveau microscopique dr est liée à la déformation macroscopique $d\epsilon$ par $\epsilon = 3\frac{dr}{r_0}$.

3 Résolution de problème : le saut à l'élastique

Cet exercice est de type "résolution de problème". Cela signifie que nous allons simplement poser une question et que vous devez essayer d'y répondre sans autre indication. Nous vous invitons vivement à commencer par :

- Représenter la situation physique par un dessin/schéma,
- Identifier les grandeurs physiques qui vous paraissent importantes pour répondre à la question.
- Leur donner un nom et estimer leur valeur.
- Énoncer les lois physiques qui vous paraissent pertinentes (nom, énoncé, équation).
- Résoudre le problème en donnant une formule littérale.
- Effectuer l'application numérique
- La commenter

Ces différentes étapes font partie intégrante du barème. Chacune d'entre elle vous rapporte des points même si vous n'allez pas au bout du calcul. Inversement, ne pas respecter ces étapes vous fera perdre des points même si vous allez au bout.

Question : on veut effectuer un saut à l'élastique depuis le haut du pont de la figure 2. Quelle longueur d'élastique utiliser ?



FIGURE 2 – Photographie d'un pont sur lequel des gens se préparent à sauter à l'élastique.