Partiel de Mécanique des fluides

Mardi 31 octobre 2017, durée 3h

I. Le crève-tonneau de Pascal

Le crève-tonneau de Pascal est une expérience hydrostatique réalisée par Blaise Pascal en 1646. Dans cette expérience Pascal montre que l'augmentation de la pression peut, si ce n'est faire exploser le tonneau, le faire fuir en faisant écarter ses douves.
Pour cela, Pascal a percé la face supérieure du tonneau d'un trou pour y fixer un tube en plastique, soigneusement étanché, de diamètre intérieur $d = 5$ mm et de $H = 10$ m de long. On considère le tonneau comme un récipient cylindrique de rayon R et de hauteur $h = 1$ m. On suppose que l'ensemble est à la pression atmosphérique $p_0 = 10^5$ Pa (on néglige les variations de pression de l'air avec l'altitude). On oriente l'axe vertical vers le bas et on choisit $z = 0$ à la base du tuyau vertical comme schématisé sur la figure 1 (b).

1. Pascal remplit, dans un premier temps, le tonneau d'eau, de masse volumique ρ, jusqu'à ras-bord. Le tuyau vertical est en revanche rempli d'air. On suppose que le tonneau est parfait, c'est-à-dire qu'il ne fuit pas, qu'il est indéformable et rempli à ras bord.

   (a) Écrire l'équation de l'hydrostatique. En déduire l'expression de l'évolution de la pression $p(z)$ dans le tonneau.

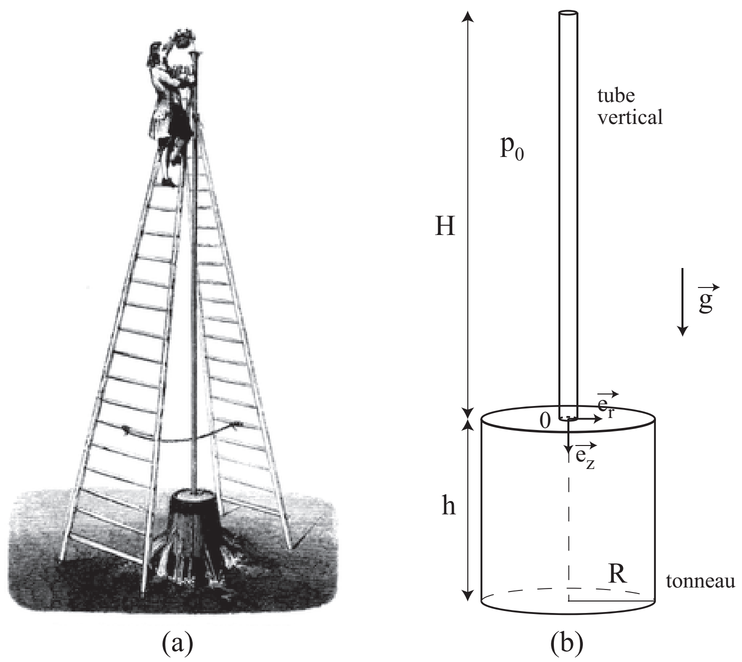

FIGURE 1 – (a) Illustration de l'expérience de Pascal. (b) Schématisation du problème.

(b) Exprimer la force de pression résultante $F_{p,1}$ s'exerçant sur une latte rectangulaire du tonneau de largeur L et de hauteur h.

2. Pascal ajoute de l'eau, de sorte que le niveau d'eau atteigne le sommet du tube vertical. L'eau est à l'air libre en $z = -H$.

   (a) Calculer le volume d'eau que Pascal a ajouté.

   (b) Exprimer $p(z)$ et déterminer l'expression de la nouvelle force de pression résultante $F_{p,2}$ s'exerçant sur la même latte rectangulaire.

   (c) Exprimer $F_{p,2}/F_{p,1}$ et faire l'application numérique. Que s'est-il passé ?

II. Interface dans un tube en U

On considère un tube en U rempli d'eau jusqu'à une hauteur initiale $h_0 = 10$ cm par rapport au fond. La section du tube est constante et égale à $S = 1$ cm^2. On ajoute alors $\mathcal{V} = 2$ cm^3 d'huile dans la branche gauche du tube. Les hauteurs d'eau et d'huile vont alors s'équilibrer. On note h_e la hauteur d'eau, h_h la hauteur de l'interface huile-air et h_i désigne la hauteur de l'interface eau-huile. On considère que les hauteurs h_e et h_i ont varié de la longueur x, par rapport à h_0, après l'ajout des 2 cm^3 d'huile de sorte que $h_e = h_0 + x$ et $h_i = h_0 - x$. Le rapport des masses volumiques est $\rho_{huile}/\rho_{eau} = 0,6$.

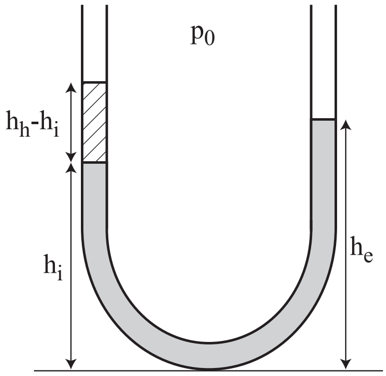

FIGURE 2 – Schématisation du problème

Calculer x et en déduire les valeurs de h_e, h_i et h_h.

III. Écoulement d'un jet sur une plaque plane

On considère l'écoulement d'un jet dans le plan (O,x,y) sur une plaque plane horizontale, située en $y = 0$. Les parties 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1. Le champ de vitesse de l'écoulement bidimensionnel stationnaire correspondant est donné par

$$\overrightarrow{u} = U_0 \left(\frac{x}{\ell} \vec{e}_x - \frac{y}{\ell} \vec{e}_y \right),$$

   où U_0 et ℓ sont des constantes non nulles.

(a) Préciser où dans l'écoulement la norme de la vitesse est égale à U_0. Représenter le champ de vitesse dans le premier quadrant ($x \geq 0$, $y \geq 0$), où la norme de la vitesse est égale à U_0 justement, en dessinant les vecteurs vitesses en $x/\ell = 0; 0,5; 1$.

(b) Montrer que les équations des lignes de courant vérifient $xy = C^{te}$. Déterminer les trajectoires pour cet écoulement. Coïncident-elles avec les lignes de courant et pourquoi ?

(c) L'écoulement est-il incompressible et irrotationnel ?

(d) Calculer le vecteur accélération d'une particule fluide.

(e) Calculer le tenseur taux de déformation et montrer qu'un élément fluide subit un allongement, que l'on précisera, dans la direction $\vec{e}_x$ et une compression selon $\vec{e}_y$.

2. On considère l'écoulement stationnaire d'un jet d'eau (supposé parfait et incompressible) qui impacte une plaque plane comme schématisé sur la figure 3. L'axe du jet est normal à la plaque. Loin de la région d'impact, le jet incident a une épaisseur e et une vitesse uniforme U. Après l'impact, le jet se sépare en deux lames fluides d'épaisseurs e_1 et e_2 qui s'écoulent aux vitesses U_1 et U_2 respectivement. Le jet est plongé dans l'air à la pression atmosphérique p_0 et on se place dans un plan horizontal dans lequel la gravité n'intervient pas.

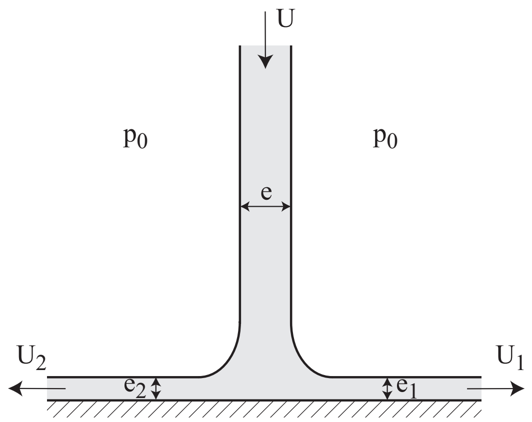

FIGURE 3 – Impact d'un jet sur une plaque plane.

(a) Énoncer le théorème de Bernoulli et la conservation du débit volumique.

(b) En déduire les relations entre U, U_1 et U_2 d'une part et entre e, e_1 et e_2 d'autre part compte tenu de la symétrie du problème.

IV. Effet Magnus

Certains sportifs professionnels, pour surprendre leur(s) adversaire(s), donnent de l'effet à la balle pour dévier sa trajectoire. Pour ce faire, ils frappent la balle en faisant en sorte que la balle tourne sur elle-même à une vitesse angulaire Ω. Les tourbillons émis alors dans le sillage de la balle n'ont pas la même intensité, l'air est alors plus accéléré d'un côté que de l'autre ce qui fait apparaître une force perpendiculaire à l'écoulement dite force de Magnus.

Pour modéliser ce problème, on considère l'écoulement stationnaire (on se place dans le référentiel du centre de la balle) d'un fluide parfait, de masse volumique ρ, autour d'un cylindre d'axe horizontal Oz et de rayon

FIGURE 4 – Coup franc de Michel Platini lors d'un match international.

R. La longueur du cylindre est suffisamment grande de sorte que l'on puisse considérer l'écoulement comme bidimensionnel loin des extrémités du cylindre. La vitesse et la pression du fluide valent respectivement v_0 et p_0 loin du cylindre. On néglige l'accélération de la pesanteur dans ce problème. Le cylindre est en rotation à la vitesse angulaire Ω, comme illustré sur la figure 5. Le champ de vitesse de l'écoulement est donné, en coordonnées polaires (r,θ), par

$$\overrightarrow{v} = v_0\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} + \left[\frac{\Omega R^2}{r} - v_0\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta\right]\,\overrightarrow{e_\theta},$$

où r est la coordonnée radiale telle que $r \geq R$ et $\theta = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$.

1. Montrer que l'écoulement est parallèle à l'axe Ox loin du cylindre.
2. On cherche à déterminer les points d'arrêts de l'écoulement (points pour lesquels la vitesse du fluide est nulle) sur la surface du cylindre.
   (a) Exprimer la vitesse du fluide v_{surf} à la surface du cylindre. En déduire v_A et v_B aux points A et B.
   (b) Montrer qu'à la surface du cylindre, l'écoulement possède deux points d'arrêts lorsque $\Omega < \frac{2v_0}{R}$, comme schématisé sur la figure 5. Déterminer les coordonnées de ces points pour $R = 1$ cm, $v_0 = 1$ cm/s et $\Omega = \sqrt{2}$ rad/s.

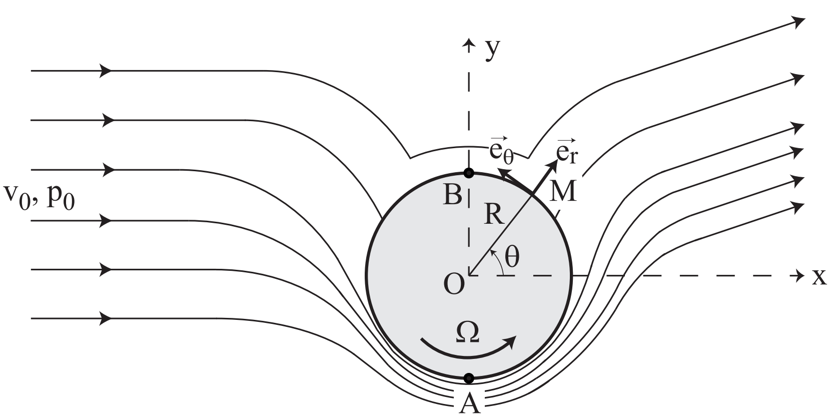

FIGURE 5 – Lignes de courant de l'écoulement autour d'un cylindre en rotation dans le cas où $\Omega < \frac{2v_0}{R}$.

(c) Que peut-on dire des points d'arrêts de l'écoulement lorsque $\Omega = \frac{2v_0}{R}$ et $\Omega > \frac{2v_0}{R}$. Tracer l'allure des lignes de courant de l'écoulement autour du cylindre dans ces deux cas sans les calculer.

(d) Déterminer la position des points d'arrêts de l'écoulement lorsque $\Omega = 0$. Tracer schématiquement l'allure des lignes de courant dans ce cas.

3. Déterminer la pression $p(R, \theta)$ en tout point du cylindre par application du théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant entre un point à l'infini et un point à la surface du cylindre.
4. En déduire la force de Magnus (composante selon Oy de la force de pression) qu'exerce le fluide sur le cylindre par unité de profondeur de ce dernier. Quelle est son signe ? Dans quel sens doit tourner le cylindre pour que cette force soit dirigée vers le haut ? Que vaut cette force dans le cas où $\Omega = 0$ et pourquoi ?