Licence L3 de Mécanique Physique et Licence L3 de Physique et Applications
Université Paris Sud

— PhysM301 —

EXAMEN DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE

8 janvier 2018

Les documents ne sont pas autorisés.

DURÉE : 3 HEURES.

1 Questions de cours

1. Forces centrales : définir ce qu'est une force centrale. Dans le problème à deux corps, démontrer que le mouvement du point fictif est plan. Sans démonstration, rappeler quelles sont les orbites possibles pour le point fictif, dans le cas d'une force attractive et d'une force répulsive.

2. Moment d'inertie :

   • Rappeler la définition du moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe. Quelles sont sa signification physique et sa dimension ?

   • Calculer le moment d'inertie d'un disque troué, de masse surfacique homogène, par rapport à l'axe (Oz).

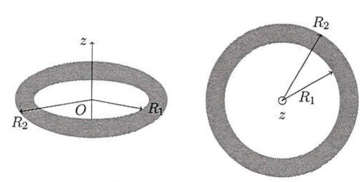

Figure 1: Disque troué : gauche) Vue en perspective et droite) vue de dessus.

3. Question Bonus : D'où vient l'expression du Lagrangien $\mathcal{L} = T - U$?

2 L'OVNI tournant

On s'intéresse à la mise en rotation rapide d'un OVNI dans l'espace (figure 2). Cet objet volant est constitué de deux parties : un corps central entouré de deux satellites. Le corps central est assimilable à une tige de longueur L, de masse M et d'épaisseur négligable. Les deux satellites, considérés comme ponctuels, sont chacun de masse m, et sont maintenus à une distance ρ par deux supports de masse négligeable, fixés rigidement à mi-hauteur du corps central.
On note O le centre de masse de ce système, et $(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{x_3})$ le repère lié au solide, $\vec{e}_{x_1}$ étant l'axe de symétrie du corps central, $\vec{e}_{x_2}$ l'axe des satellites et $\vec{e}_{x_3}$ l'axe orthogonal au plan $(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{x_2})$.

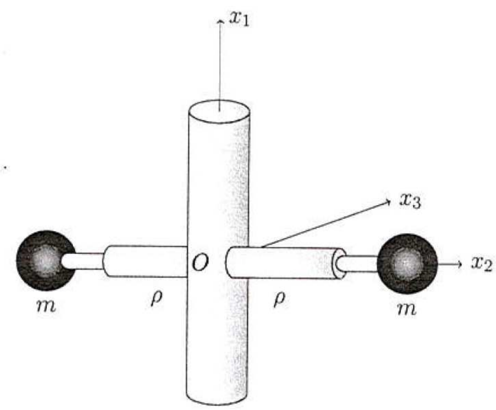

Figure 2: OVNI orséen.

On rappelle les équations d'Euler dans le cas d'une rotation libre :

$$I_1\dot{\Omega}_1 - (I_2 - I_3)\,\Omega_2\Omega_3 = 0$$

$$I_2\dot{\Omega}_2 - (I_3 - I_1)\,\Omega_3\Omega_1 = 0$$

$$I_3\dot{\Omega}_3 - (I_1 - I_2)\,\Omega_1\Omega_2 = 0$$

où le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega} = \Omega_1\vec{e}_1 + \Omega_2\vec{e}_2 + \Omega_3\vec{e}_3$ est exprimé dans le repère lié au solide, les $\vec{e}_i$ étant les vecteurs unitaires dans les trois directions du repère.

1. Calculer la matrice d'inertie $\mathcal{I}_O$ de l'OVNI par rapport à O dans le repère $(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{x_3})$. On détaillera le calcul de chacune des composantes. Tracer les moments d'inertie principaux I_1, I_2 et I_3 en fonction de l'écartement ρ des satellites. Montrer que l'on peut distinguer deux configurations selon l'ordre des moments d'inertie principaux :

   Configuration A : $I_1 < I_2 < I_3$ pour $\rho < \rho_c$
   Configuration B : $I_2 < I_1 < I_3$ pour $\rho > \rho_c$

   où ρ_c est un écartement seuil que l'on déterminera en fonction de L, m ou M. Dans la suite, on exprimera les moments d'inertie en fonction de m, ρ et ρ_c.

2. On s'intéresse à la stabilité de la rotation autour de l'axe $\vec{e}_{x_1}$, dans chacune de deux configurations A et B. Pour cela on considère le vecteur instantané de rotation sous la forme :

   $$\vec{\Omega} = \Omega_O\vec{e}_{x_1} + \vec{\omega}(t)$$

   où Ω_O est constante et telle que la perturbation $\vec{\omega}(t) = \omega_1(t)\vec{e}_{x_1} + \omega_2(t)\vec{e}_{x_2} + \omega_3(t)\vec{e}_{x_3}$ soit très petite devant Ω_O.

   (a) Montrer que, au premier ordre en ω, les équations d'Euler conduisent à $\omega_1 = \text{cste}$, et que les composantes selon $\vec{e}_{x_2}$ et $\vec{e}_{x_3}$ de la perturbation satisfont les équations différentielles:

   $$\ddot{\omega}_2 + K\omega_2 = 0$$

   $$\ddot{\omega}_3 + K\omega_3 = 0$$

   où K est une constante que l'on exprimera en fonction de Ω_0, ρ et ρ_c.

   (b) Intégrer ces équations différentielles en distinguant les configurations A et B, et décrire la trajectoire du vecteur instantané de rotation dans le repère du solide. Préciser la vitesse angulaire de précession Ω_p dans le cas de la trajectoire stable. Quelle situation reconnait-on pour $\rho << \rho_c$?

(c) Que pensez-vous de la stabilité de la rotation si l'objet disposait de 4 satellites plutôt que de 2, disposés symétriquement selon $\vec{e}_{x_2}$ et $\vec{e}_{x_3}$?

3 Cylindre roulant dans une gouttière cylindrique

On considère un cylindre de rayon r, de masse m, roulant sans glisser sur la surface intérieure d'une gouttière semi-cylindrique de rayon R (figure 3). On note θ la position angulaire du centre de masse G du cylindre par rapport à l'axe (Oz), et ϕ la position angulaire d'un point M sur le cylindre par rapport à la verticale. La hauteur du cylindre est notée H. On prendra $g = 10$ m.s^{-2} pour la constante de pesanteur.

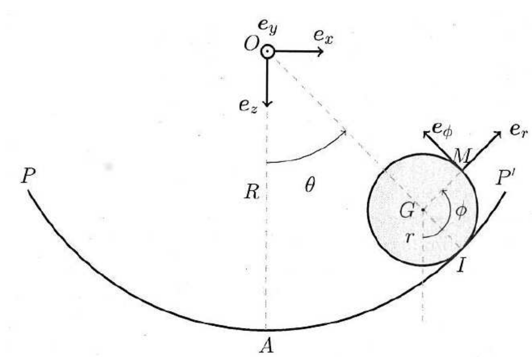

Figure 3: Cylindre de rayon r roulant dans une glissière semi-cylindrique de rayon R.

1. Question préliminaire. On note ρ la masse volumique homogène du cylindre. Exprimer la masse m en fonction de ρ, r et H. Calculer le moment d'inertie I_G du cylindre par rapport à son axe de symétrie passant par G, en fonction de m et r.

2. Energie mécanique.

   (a) Donner la vitesse du centre de masse G dans le repère lié à la roue $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$. En considérant le point de contact I (voir figure 3), montrer que la contrainte qui lie θ et ϕ est :
   $$\dot{\phi} = -\frac{R-r}{r}\dot{\theta}$$
   Dans la suite on choisira θ comme degré de liberté.

   (b) Ecrire l'énergie cinétique T du cylindre.

   (c) Ecrire l'énergie potentielle V du cylindre. on choisira comme référence pour l'énergie potentielle la position basse du cylindre quand $\theta = 0$.

   (d) En déduire que l'énergie mécanique du système peut se mettre sous la forme :
   $$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,\mu(R-r)^2\dot{\theta}^2 - mg(R-r)\cos\theta + K,$$
   où l'on précisera la valeur de la masse effective μ et de la constante K. Pourquoi l'énergie mécanique est-elle conservée ?

   (e) En déduire l'équation du mouvement du système.

3. Etude des oscillations.

   (a) Montrer que, dans la limite des petites perturbations ($\theta << 1$), la dynamique du système se réduit à celle d'un oscillateur harmonique. Quelle est sa pulsation propre ω_0 ? La période des oscillations dépend-elle de l'amplitude θ_0 initiale ?

   (b) Toujours dans la limite $\theta << 1$, on choisit un cylindre de même rayon r, mais de masse deux fois supérieure, soit $2m$. Comment est modifiée la période des oscillations ? Commentez.

4. Ecrire la matrice d'inertie $\mathcal{I}$ du cylindre par rapport à son centre de masse, dans son système d'axes principaux.

4 Roue de manège

La roue d'un véhicule de manège de masse M roule sans glisser sur un plateau immobile, en décrivant un cercle de rayon R autour de l'axe vertical Δ. L'axe de rotation de la roue, de masse négligeable, est relié en O à l'axe Δ de sorte que $\vec{OG}$ est horizontal, G étant le centre de masse de la roue. On note a la rayon de la roue, d'épaisseur négligeable, ϕ l'angle que fait $\vec{OG}$ avec une direction arbitraire repérée sur le plateau et ψ l'angle existant entre les vecteur $\vec{GA}$ et $\vec{GP}$, où A est le point de contact instantané de la roue sur le plateau et P le point courant de repérage de la rotation de la roue sur elle-même.

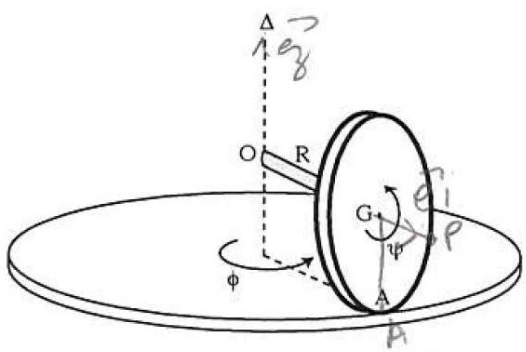

Figure 4: Une roue de manège.

1. Ecrire le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ dans le repère $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, où $\vec{e_1}$ est selon $\vec{GP}$, $\vec{e_3}$ selon $\vec{OG}$ et $\vec{e_2}$ est orthogonal au plan $(\vec{e_3}, \vec{e_1})$.

2. Calculer le tenseur d'inertie de la roue par rapport à son centre de masse G dans le système d'axes propres $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

3. En déduire le tenseur d'inertie de la roue par rapport au point O.

4. Déterminer l'énergie cinétique T du système, soit en utilisant le résultat de la question précédente, soit en appliquant le second théorème de Koening (les deux méthodes donnent le même résultat).

5. Que vaut l'énergie potentielle V du système ?

6. Ecrire l'énergie mécanique du système. En déduire l'équation du mouvement.