Licence L3 de Mécanique Physique et Licence L3 de Physique et Applications
Université Paris Sud

— PhysM301 —

PARTIEL DE MÉCANIQUE

2 novembre 2017

Les documents ne sont pas autorisés.

Durée : 2 heures.

1 Questions de cours

1. Enoncer les trois lois de Newton en précisant les différentes quantités y apparaissant.
2. Définir le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_0$ d'un point matériel M de masse m par rapport au point fixe O dans le référentiel galiléen. Enoncer le théorème du moment cinétique de ce point matériel soumis à une force totale résultante $\vec{F}$.
3. Dans le cas d'un mouvement plan soumis à une force centrale, que peut-on dire du moment cinétique ? Démontrer.

2 Cylindre roulant sur une pente

On considère un cylindre plein homogène, de hauteur H, de masse volumique ρ, de masse totale M et de rayon R.

1. Calculer le moment d'inertie I_O de ce cylindre par rapport à l'axe (Oz) (figure 1 gauche). Le comparer au moment d'inertie d'un disque plat par rapport à un axe perpendiculaire passant par son centre.
2. Donner la formule de Huygens relative au moment d'inertie d'un corps solide entre deux axes parallèles distants de la distance d.
3. En déduire le moment d'inertie I_A du cylindre pour un axe de rotation parallèle à (Oz) mais passant par A.

Le cylindre précédent roule sans glisser sur un plan incliné d'angle α (figure 1 droite).

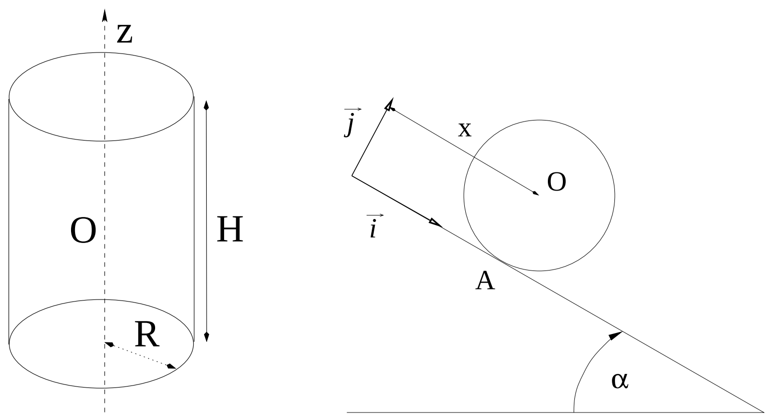


Figure 1: Cylindre roulant sur une pente.

1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le cylindre.

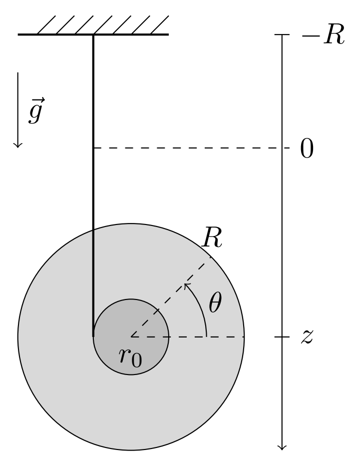
2. En utilisant le théorème du moment cinétique au point de contact (considéré comme étant immobile à chaque instant), montrer que l'accélération angulaire s'écrit :

$$\ddot{\theta} = B \sin \alpha$$

   On donnera la valeur de la constante B en fonction de g (la constante de gravité) et de R. Donner alors l'accélération en x.

3 Le yoyo

On cherche à calculer la vitesse de descente d'un yoyo lâché sans vitesse initiale du point $z = 0$. Ce yoyo, de masse m, est constitué d'un grand cylindre extérieur, de rayon R, et d'un petit cylindre intérieur (le moyeu), de rayon r_0, autour duquel s'enroule le fil de longueur L. On repère la position du yoyo par rapport à la hauteur de son centre de masse z, avec $0 \leq z \leq L$ (l'axe z est dirigé vers le bas ici), et son orientation par l'angle θ (on a $\dot{\theta} < 0$ lors de la descente). On suppose que le fil ainsi que la trajectoire du yoyo restent toujours verticaux. On néglige l'épaisseur du fil. La référence de l'énergie potentielle de pesanteur sera prise à l'altitude $z = 0$, lorsque le yoyo est en butée contre le support. On prendra $g = 9.80$ m·s^{-2}.



1. Faire un bilan des forces s'appliquant sur le yoyo lors de sa descente, et les représenter sur une figure.

2. L'énergie mécanique du yoyo est-elle conservée au cours du mouvement?

3. Montrer que le moment cinétique du yoyo par rapport à son centre de masse n'est pas conservé.

4. On considère que le rayon du moyeu r_0 est suffisamment petit pour que le moment d'inertie I du yoyo par rapport à son axe de rotation soit simplement celui du disque de rayon R. Calculer I en fonction de m et de R.

5. Justifier la relation (On justifiera notamment le signe) entre z et θ :

$$z = -r_0\theta$$

6. Calculer l'énergie mécanique en fonction de z, $\dot{z}$ et $\dot{\theta}$ et des paramètres du problème.

7. En utilisant la relation géométrique entre z et θ, exprimer cette énergie en fonction de z et $\dot{z}$ uniquement (sans faire intervenir $\dot{\theta}$).

8. Calculer l'énergie mécanique à l'instant $t = 0$, en $z = 0$.

9. En déduire que la vitesse verticale est donnée par

$$\dot{z} = \sqrt{2gz}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{1}$$

10. Comparer cette expression à celle que l'on obtiendrait pour la chute libre d'une masse ponctuelle ; le yoyo chute-t-il plus vite ou moins vite qu'une masse ponctuelle ? Pour quelle raison ?

11. Représenter sur un même graphique l'allure de $\dot{z}$ en fonction de z pour une chute libre, et pour un yoyo tel que $R = 4r_0$ (z variant de 0 à L).

12. Intégrer l'équation différentielle (1).

13. Exprimer le temps de chute T_c en fonction des paramètres du problème.

14. Application numérique : Calculer T_c pour $r_0 = 0,5$ cm, $R = 2$ cm, $L = 1,225$ m.

15. Comparer T_c au temps de chute libre d'une masse ponctuelle sur une même hauteur.