Examen de Mécanique des fluides

Mardi 8 janvier 2019, durée 3h

I. Efforts sur une vanne d'écluse

En intercalant une écluse dans un canal à surface libre de section rectangulaire, la hauteur d'eau passe d'une hauteur h_1 à une hauteur $h_2 < h_1$. On suppose la vitesse uniforme en amont et en aval de la vanne avec des valeurs U_1 et U_2 orientées selon $\vec{e_x}$. L'écoulement est stationnaire et incompressible, et le fluide est considéré comme un fluide parfait. On note g l'accélération de la pesanteur et p_0 la pression atmosphérique au niveau des surfaces libres.
On rappelle que le théorème de transport de Reynolds appliqué à la quantité de mouvement est

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})\,d\tau + \oiint_S \rho\vec{v}\left(\vec{v}.\vec{dS}\right) = -\oiint_S p\,\vec{dS} + \oiint_S \underline{\underline{\sigma'}}\,\vec{dS} + \iiint_V \rho\vec{g}\,d\tau. \tag{1}$$

Le volume de contrôle est représenté en gras sur la figure et délimité par la frontière $ABCDD'EF$.

1. Donner une relation entre U_1, h_1, U_2 et h_2 à partir de la conservation de la masse.
2. En appliquant le théorème de Bernoulli entre un point de la surface libre amont et un point de la surface libre aval, trouver une deuxième relation reliant U_1, h_1, U_2 et h_2.
3. Exprimer les vitesses amont et aval, U_1 et U_2, en fonction des hauteurs h_1 et h_2 et de l'accélération de la pesanteur.
4. On cherche à déterminer la force de pression résultante F_p, par unité de profondeur selon Oy, exercée par l'eau et l'air sur la vanne. On va utiliser le théorème de transport de Reynolds pour le faire.
   (a) La répartition de pression en amont et en aval est purement hydrostatique. Exprimer $p_1(z)$ et $p_2(z)$.
   (b) Identifier et justifier quels sont les termes nuls dans l'équation (1).

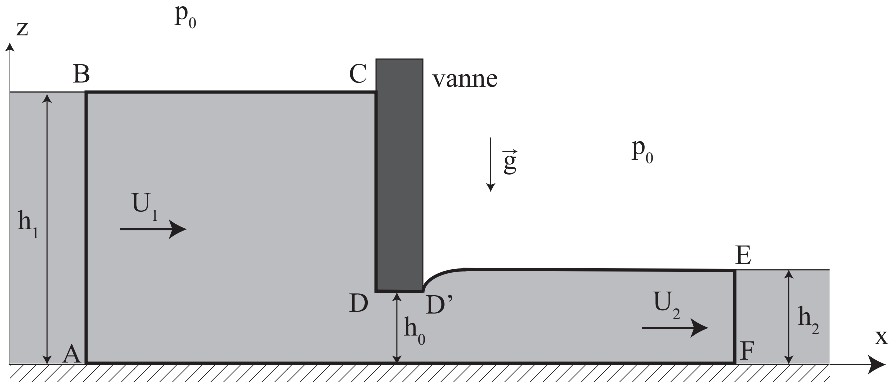

FIGURE 1 – Vanne de décharge dans un canal à surface libre.

(c) La quantité de mouvement, entrante et sortante à travers la surface de contrôle, étant exclusivement horizontale, on ne s'intéresse qu'à la composante selon Ox de l'équation (1). En déduire que l'expression de la force de pression résultante F_p qui s'applique sur la vanne est donnée par

$$F_p = \rho U_1 h_1 \left(U_1 - U_2\right) + \frac{1}{2}\,\rho g \left(h_1^2 - h_2^2\right).$$

II. Mouillage forcé

Pour réaliser industriellement un dépôt de liquide sur un substrat solide, on tire le solide à enduire d'un bain liquide à vitesse constante. Il est alors important de pouvoir contrôler l'épaisseur du dépôt.
Dans ce problème on considère une plaque plane immergée dans un bain liquide et tirée verticalement et lentement à la vitesse V de telle sorte que l'on reste en régime stationnaire. On note ρ la masse volumique et η la viscosité dynamique du liquide, que l'on suppose incompressible. On néglige la masse volumique et la viscosité de l'air de sorte que la contrainte visqueuse exercée par l'air sur le liquide est négligeable.
On distingue trois régions dans cet écoulement :

- Région (I) ou région asymptotique : le film est entraîné par la plaque et reste d'épaisseur constante notée e.
- Région (II) ou région de lubrification : l'écoulement est faiblement non parallèle et les effets visqueux sont prédominants.
- Région (III) ou région du ménisque statique : la forme du ménisque est contrôlée par les forces de tension de surface et par la gravité.

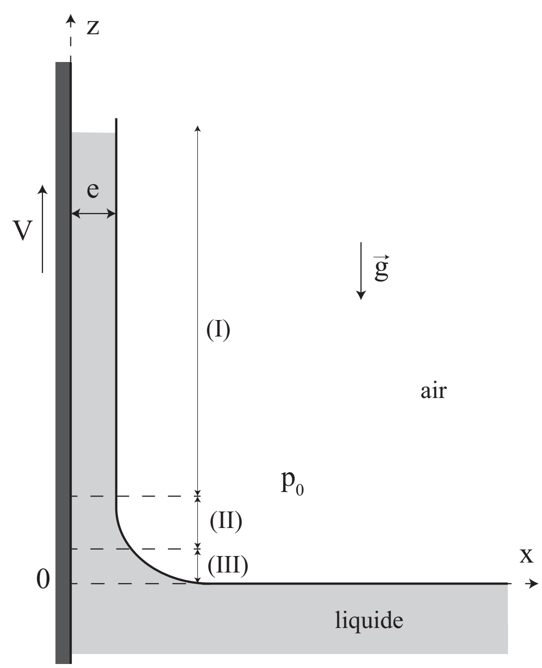

FIGURE 2 – Schématisation du film liquide entraîné par le mouvement vertical de la plaque.

Dans ce problème on ne s'intéresse qu'à la région (I) dans laquelle l'épaisseur du film est constante. On suppose que, dans cette région, l'écoulement est unidirectionnel tel que $\vec{v} = v_z(x,z)\vec{e_z}$. On note p_0 la pression atmosphérique de l'air et g l'accélération de la pesanteur.

1. Montrer que $v_z = v_z(x)$ uniquement.
2. Écrire l'équation de Navier-Stokes sous forme vectorielle et montrer qu'on peut la réduire à l'équation de Stokes, tout en justifiant vos réponses.
3. Projeter l'équation de Stokes selon Ox. Préciser la condition aux limites dynamique sur la pression et montrer que la pression dans le fluide est partout égale à la pression atmosphérique p_0 dans la région (I).
4. Projeter l'équation de Stokes selon Oz. Déterminer le profil de vitesse $v_z(x)$, après avoir soigneusement précisé les conditions aux limites, cinématique et dynamique, sur la vitesse. En déduire l'expression de la vitesse du liquide à l'interface en $x = e$ et donner une condition sur V pour que celle-ci soit positive ou négative. Tracer l'allure du profil de vitesse dans ces deux cas.
5. Exprimer le débit volumique Q_v par unité de profondeur dans la direction Oy. À quelle condition peut-on écrire que $Q_v \simeq Ve$? Quel est le signe de la vitesse à l'interface dans ce cas ?
6. On considère une tranche de fluide de largeur e et de hauteur dz. Exprimer la force élémentaire $\vec{dF}$, par unité de profondeur selon Oy, exercée par la plaque plane sur cette tranche de fluide. Discuter le résultat en raisonnant sur le bilan des forces qui s'applique sur cette tranche de fluide.

III. Modélisation d'un cyclone

On souhaite modéliser très simplement l'écoulement d'air dans un cyclone. On assimile pour cela l'atmosphère à un fluide parfait de masse volumique ρ et le cyclone à un tourbillon cylindrique d'axe Oz et de rayon a constant avec l'altitude z. On note $z = 0$ l'altitude au niveau de la mer. On suppose que l'écoulement dans le cyclone est stationnaire et compte tenu des symétries du problème, on peut supposer que le champ de vitesse est $\vec{v} = \vec{v}(r,z)$ et le champ de pression $p = p(r,z)$. Pour simplifier le problème, on fait l'hypothèse que notre cyclone obéit à un tourbillon de Rankine, c'est-à-dire que la vorticité est nulle en dehors du cœur du tourbillon (de rayon a) et qu'elle est constante à l'intérieur tel que

Région 1, $r \leq a : \vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \omega\, \vec{e_z}$
Région 2, $r > a : \vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$,

avec ω la vorticité du tourbillon considérée comme constante. On note $\vec{g}$ le vecteur accélération de la pesanteur orienté selon $-\vec{e_z}$.
On rappelle que le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$ quelconque en coordonnées cylindriques est donné par

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z},$$

et que l'opérateur gradient est donné par

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}.$$

1. Exprimer le vecteur vorticité en fonction des données du problème.

   (a) Montrer que la composante orthoradiale de la vitesse v_θ est indépendante de z.

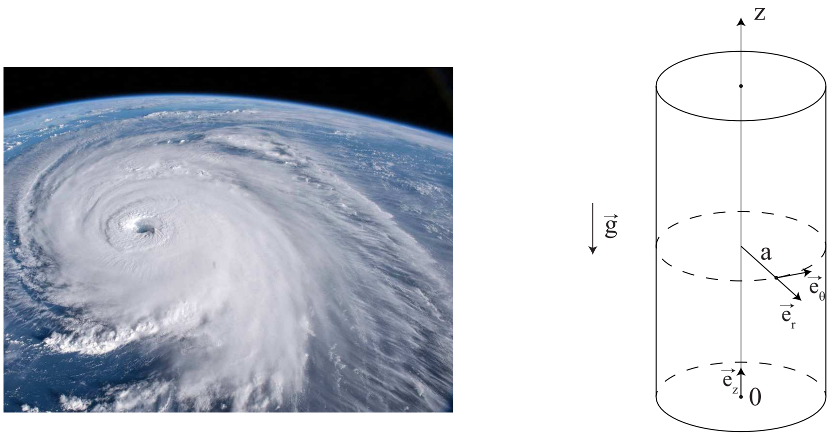

FIGURE 3 – Photographie de l'ouragan Florence en septembre 2018 et schématisation du problème.

(b) Déterminer le profil de v_θ dans la région 1 de l'écoulement, que l'on notera v_1. Vous utiliserez le fait qu'il n'y a pas de singularité en $r = 0$.

(c) Exprimer le profil de v_θ dans la région 2 de l'écoulement, que l'on notera v_2, compte tenu la continuité du champ de vitesse en $r = a$.

(d) Représenter la forme du profil de vitesse sur un schéma. Que vaut la vitesse au centre du tourbillon ? Exprimer la vitesse maximale et préciser où est-elle atteinte. Que vaut la vitesse à l'infini ?

2. On suppose pour simplifier par la suite que v_r et v_z sont nulles, bien que cette hypothèse soit peu réaliste pour un cyclone, compte tenu de la présence de forts courants ascendants au niveau du cœur du cyclone par exemple.

   (a) Rappeler l'équation d'Euler sous forme vectorielle.

   (b) Montrer que le terme non-linéaire est donné par $(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{v_\theta^2(r)}{r}\vec{e_r}$. Projeter l'équation d'Euler sur $\vec{e_r}$ et $\vec{e_z}$.

   (c) Déterminer le champ de pression $p_2(r, z)$ du cyclone dans la région 2, en utilisant les deux projections de l'équation d' Euler. Quelle condition aux limites raisonnable peut-on imposer à p infiniment loin du tourbillon en $z = 0$?

   (d) Énoncer le théorème de Bernoulli dans le cas particulier d'un écoulement irrotationnel (ce qui est bien le cas dans la région 2) et montrer que l'on peut retrouver $p_2(r, z)$ à partir de ce théorème.

   (e) Montrer le champ de pression $p_1(r, z)$ dans la région 1, en utilisant la continuité du champ de pression en $r = a$ pour déterminer une constante d'intégration, est donnée par

$$p_1(r, z) = p_0 - \rho g z + \rho\omega^2\frac{(r^2 - 2a^2)}{8}.$$

3. Applications

   (a) Déterminer la dépression Δp générée entre le cœur du cyclone et un point situé à l'infini à la même altitude.

   (b) Évaluer, par un raisonnement simple, la force d'aspiration F exercée par le cyclone sur la toiture (de surface S) d'une maison située au centre du tourbillon et dont on a fermé hermétiquement toutes les ouvertures avant le passage du cyclone.

Pression barométrique (en hPa)	Correction (en m)
963	+0,5
973	+0,4
983	+0,3
993	+0,2
1003	+0,1
1013	0
1023	-0,1
1033	-0,2

TABLE 1 – La pression atmosphérique exerce une pression sur la mer. Sous un anticyclone (haute pression), la mer est plus basse, tandis qu'elle est plus haute sous un cyclone (dépression). Voici le tableau de correspondance entre la pression en hectopascals (1 hPa = 10^2 Pa) et la correction à apporter sur la marée en mètre.

(c) On suppose maintenant que le cyclone se trouve en pleine mer. Exprimer la hauteur H de la marée barométrique au niveau du cœur du tourbillon (hauteur de la mer au dessus de son niveau au repos aspirée par la dépression du cyclone).

(d) Sachant que la vitesse v_θ maximale à la périphérie du cyclone est de 160 km/h, calculer Δp, H et F (pour un toit de surface $S = 100$ m^2). On admettra que $\rho_{air} = 1$ kg/m^3, $\rho_{eau} = 10^3$ kg/m^3 et $g = 10$ m/s^2. La valeur de H calculée est-elle cohérente avec les données du tableau 1 ?