

LICENCE DE PHYSIQUE 3^{ème} année

mentions **Physique et Applications** et **Mécanique**

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

FACULTÉ des SCIENCES

ORSAY

Algèbre linéaire

G. ABRAMOVICI

septembre 2019

Table des matières

Glossaire	5
I Espace vectoriel de dimension finie	8
A Espaces : définitions et propriétés	9
1 OBJETS FONDAMENTAUX	9
2 ESPACE HERMITIEN	12
3 BASES	14
4 CAS D'UNE BASE ORTHONORMÉE	26
5 ÉTUDE DES OPÉRATEURS	29
B Changements de base	34
1 PRINCIPES	34
2 LOIS DE TRANSFORMATION PAR CHANGEMENT DE BASE	34
3 PROPRIÉTÉS	38
4 ORTHONORMALISATION	39
C Tableaux récapitulatifs	42
II Espace de Hilbert	45
A Espace de fonctions comme exemple de dimension infinie	47
1 FONCTIONS DE DIRAC	47
2 ESPACE GÉNÉRAL DE FONCTIONS	48
B Intégration	49
1 MESURE DE LEBESGUE DANS \mathbb{R}	49
2 CONVERGENCE D'INTÉGRALES	51
3 INTÉGRALE DE LEBESGUE	53
4 MÉTRIQUES APPLICABLES AUX FONCTIONS	57
C Espace $L^1(\mathbb{R})$	59
1 GÉNÉRALITÉS	59
2 PROPRIÉTÉS	61
3 OPÉRATEURS LINÉAIRES	63
4 FORMES LINÉAIRES	65

D	Espace $L^2(\mathbb{R})$	66
1	GÉNÉRALITÉS	66
2	PROPRIÉTÉS	67
3	FORMES LINÉAIRES	69
4	OPÉRATEURS LINÉAIRES	69
5	DÉCOMPOSITION POLYNÔMIALE	74
E	Espace L^∞	76
1	GÉNÉRALITÉS	76
2	PROPRIÉTÉS	77
3	OPÉRATEURS LINÉAIRES	77
4	FORMES LINÉAIRES	78
F	Autres espaces de fonctions	79
1	INTRODUCTION	79
2	ESPACE DE FONCTIONS $L^2(\mathbb{R}_+)$	79
3	ESPACE FONCTIONS $L^2(]-1, 1[)$	82
4	AUTRES BASES HILBERTIENNES	83
G	Appendice : notions de base	84
1	TOPOLOGIE DANS \mathbb{R}	84
2	FONCTIONS	88
	Index des équations	94
	Index	96
	Références	97

Glossaire

voir également certaines définitions dans les tableaux récapitulatifs

\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^n	espace des matrices colonnes à coefficients réels
\mathbb{C}	ensemble des nombres complexes
\mathbb{C}^n	espace des matrices colonnes à coefficients complexes
x_i	objet x indicé par un entier i
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	matrice 2×2
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	déterminant de la matrice
\mathcal{B}	base vectorielle
$\stackrel{\mathcal{B}}{=}$	identification entre quantité vectorielle (à gauche) et matricielle (à droite dans la base \mathcal{B})
$\{\mathbf{0}\}$	espace vectoriel réduit au vecteur nul
\oplus	addition d'espaces vectoriels (sans intersection)
${}^t A$	transposition matricielle
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	produit scalaire ou hermitien en notation classique
$\langle u v \rangle$	produit scalaire ou hermitien en notation de Dirac
$\widehat{\mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{v}}$	angle entre les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v}
\times	produit vectoriel <i>souvent noté \wedge dans la littérature</i>
\otimes	produit tensoriel
\mathcal{V}	volume (d'un trièdre) ou son aire (en dimension 2)
\mathcal{J}	l'opérateur identité
\mathcal{O}	l'opérateur nul
$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$	composition des opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B}
AB	produit matriciel des matrices A et B
\mathcal{A}^\dagger	adjoint de l'opérateur \mathcal{A}
A^\dagger	adjoint de la matrice A
$\text{tr}(\mathcal{A})$	trace de l'opérateur \mathcal{A}
$\text{tr}(A)$	trace de la matrice A
$\det(\mathcal{A})$	déterminant de l'opérateur \mathcal{A}
$\det(A)$	déterminant de la matrice A
χ	polynôme caractéristique
\mathcal{A}^{-1}	inverse de l'opérateur \mathcal{A} (au sens de la composition)
A^{-1}	inverse de la matrice A (au sens du produit matriciel)
$\mathcal{P} + \mathcal{Q}$	addition des opérateurs \mathcal{P} et \mathcal{Q}

\Leftrightarrow	si et seulement si
$exp_1 \equiv exp_2$	l'expression exp_1 est définie par (ou bien définit) exp_2
\sim	équivalent
\simeq	à peu près égal
$A \subset B$	l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B
$A \supset B$	l'ensemble A contient l'ensemble B
$A \cap B$	intersection des ensembles A et B
$A \cup B$	union des ensembles A et B
$A \setminus B$	l'ensemble A moins l'ensemble $A \cap B$
$[a, b]$	intervalle fermé ($a < b$ deux réels)
$[a, b[$	intervalle fermé à gauche et ouvert à droite
$]a, b]$	intervalle ouvert à gauche et fermé à droite
$]a, b[$	intervalle ouvert
$\{a\}$	singleton ne contenant que a
$\{a_1, \dots, a_n\}$	ensemble de n éléments
\emptyset	ensemble vide
\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels
\mathbb{Z}	ensemble des entiers relatifs
\mathbb{Q}	ensemble des nombres rationnels
\mathbb{N}^*	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$
\mathbb{Z}^*	$\mathbb{Z} \setminus \{0\}$
\mathbb{Q}^*	$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$
\mathbb{R}^*	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
\mathbb{R}_+	ensemble des réels positifs
\mathbb{R}_+^*	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
\overline{A}	fermeture de l'ensemble A
$\max(A)$	plus grand élément de l'ensemble A
$\min(A)$	plus petit élément de l'ensemble A
$\sup(A)$	limite supérieure de A
$\inf(A)$	limite inférieure de A
δ_{ij}	symbole de Kronecker, $\delta_{ij} = 1$ quand $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon
ε_{ijk}	tenseur de Levi-Civita, $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$, dans tous les autres cas $\varepsilon_{ijk} = 0$
pp	presque partout
cf.	<i>confere</i>
etc.	<i>et cætera</i>
resp.	respectivement
i.e.	<i>id est</i>
C.Q.F.D.	ce qu'il fallait démontrer

i	le nombre imaginaire
\cos	la fonction cosinus
\sin	la fonction sinus
sinc	la fonction sinus cardinal égale à $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
e^x	exponentielle de x
e^{ix}	exponentielle complexe égale à $\cos(x) + i \sin(x)$
\ln	logarithme népérien
f'	la dérivée d'une fonction $x \mapsto f(x)$
$\Re(z)$	partie réelle du nombre complexe z
$\Im(z)$	partie imaginaire du nombre complexe z
\bar{z}	nombre conjugué de z , égal à $\Re(z) - i\Im(z)$
$f(x)$	image de l' argument x par la fonction f
x^p	généralement puissance $p^{\text{ème}}$ de x pour le produit ordinaire
$f^{(p)}$	dérivée $p^{\text{ème}}$ de f
$n = i, j$	n prend les valeurs i ou j
$n = i..j$	n prend les valeurs de i à j
\propto	proportionnel
$\sum_{i=n_1}^{n_2}$	somme des éléments dont l'indice varie de n_1 à n_2
\sum_i	somme d'éléments d'indice i (plage implicite)
\prod_i	produit d'éléments d'indice i
$\lim_{x \rightarrow x_0}$	limite quand x tend vers x_0
$\lim_{x \rightarrow x_0^+}$	limite par valeur positive = $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}}$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-}$	limite par valeur négative = $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}}$
$f(x_0^+)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
$f(x_0^-)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$
$ x $	valeur absolue ou module du nombre x
$\ f\ $	norme de la fonction f
$\text{Support}(f)$	support de la fonction f
\tilde{f}	transposée de la fonction f
\mathcal{F}	transformation de Fourier
$C^p(\mathbb{R})$	ensemble des fonctions p fois dérivables dont la dérivée $p^{\text{ème}}$ est continue
$C^\infty(\mathbb{R})$	ensemble des fonctions infiniment dérivables

Partie I

Espace vectoriel de dimension finie

A Espaces : définitions et propriétés

1 OBJETS FONDAMENTAUX

a Espace vectoriel

α Définition

On introduit E un espace vectoriel sur \mathbb{C} , l'ensemble des nombres complexes. C'est un ensemble muni de l'addition interne et du produit externe par un scalaire. On écrit :

$$\forall(x, y) \in E^2, \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad \alpha x + \beta y \in E .$$

Par définition, l'addition des vecteurs est associative et commutative. Il existe un élément neutre, qui est le vecteur nul 0 et chaque élément $x \in E$ possède un opposé x' tel que $x + x' = 0$.

La multiplication par les nombres complexes est associative, ce qu'on écrit : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in E, \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$. Par ailleurs, 1 est l'élément neutre, ce qui s'écrit : $\forall x \in E, 1x = x$. Enfin, il y a deux propriétés de distributivité, qui s'écrivent

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \forall(x, y) \in E^2, \quad (\alpha + \beta)x = (\alpha x) + (\beta x) \quad \text{et} \quad \alpha(x + y) = (\alpha x) + (\alpha y).$$

β Propriétés

On démontre les deux propriétés de base

$$\forall x \in E, \quad 0x = 0 \tag{1}$$

$$(-1)x = x' \tag{2}$$

où x' est l'opposé de x dans (2) ; dans (1), le premier 0 du facteur $0x$ est le nombre zéro, tandis que le 0 du second terme est le vecteur nul. (2) justifie qu'on note toujours $-x$ l'opposé d'un vecteur x , sans crainte de confusion avec la multiplication par -1 .

On considérera dans ce cours des espaces vectoriels sur \mathbb{C} . On dira plus loin un mot des espaces vectoriels sur \mathbb{R} .

b Vecteurs

α Définition

Soit E un espace vectoriel. Les vecteurs sont les éléments qui composent E . On les note de différentes façons : x, \mathbf{x}, \vec{x} . On introduit également la notation de Dirac en notant un vecteur par un ket $|x\rangle$.

β Vecteur nul

Un espace vectoriel contient au moins un élément, le vecteur nul. On le notera $\mathbf{0}$ ou 0 , y compris en notation de Dirac, on a donc $|0\rangle \equiv 0$.

Le plus petit espace vectoriel est $\{0\}$, l'espace réduit au vecteur 0 , qu'on appelle espace *nul*.¹

c Opérateur vectoriel

α Définition

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{C} . On appelle opérateur linéaire ou opérateur vectoriel toute application linéaire \mathcal{M} de E dans E , i.e.

$$\mathcal{M} : \begin{array}{l} E \rightarrow E \\ u \mapsto \mathcal{M}u \end{array} \quad \forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad \mathcal{M}(\alpha u + \beta v) = \alpha(\mathcal{M}u) + \beta(\mathcal{M}v),$$

où $\mathcal{M}u$ est l'image de u par l'application \mathcal{M} .

β Notation de Dirac

En notation de Dirac, la linéarité s'écrit $\mathcal{M}|\alpha u + \beta v\rangle = \alpha\mathcal{M}|u\rangle + \beta\mathcal{M}|v\rangle$ où il est indispensable² d'écrire l'antécédent (=l'argument de \mathcal{M}) **dans** le ket $|\rangle$.

γ Image du vecteur nul

L'image du vecteur nul par un opérateur vectoriel \mathcal{M} est lui-même, ce qui s'écrit, en notations de Dirac,

$$\forall \mathcal{M} \text{ opérateur}, \quad \mathcal{M}|0\rangle = 0.$$

Démonstration : on a $|0\rangle = 0|0\rangle$, où on lit dans le second membre le nombre complexe zéro fois le vecteur nul. D'où, en utilisant (1), $\mathcal{M}|0\rangle = \mathcal{M}|0 \times \mathbf{0}\rangle = 0(\mathcal{M}|\mathbf{0}\rangle) = 0$.

δ Valeurs propres et vecteurs propres

Soit \mathcal{A} un opérateur quelconque, λ est une valeur propre de \mathcal{A} , et $|u_\lambda\rangle \neq |0\rangle$ sont les vecteurs propres associés, si et seulement si

$$\mathcal{A}|u_\lambda\rangle = \lambda|u_\lambda\rangle.$$

L'espace vectoriel engendré par l'ensemble des $|u_\lambda\rangle$, pour une valeur propre λ fixée, est noté E_λ et appelé espace propre³. On a, pour tout couple de valeurs propres (λ, λ') ,

$$E_\lambda \cap E_{\lambda'} = \{\mathbf{0}\} \iff \lambda \neq \lambda'.$$

On a la propriété suivante : tout opérateur admet au moins une valeur propre. Ce résultat est faux dans les espaces vectoriels de dimension infinie.

ϵ Polynôme caractéristique

Soit \mathcal{A} un opérateur, son polynôme caractéristique est $\chi(X) = \det(\mathcal{A} - XJ)$. Alors, les valeurs propres de \mathcal{A} sont les zéros de χ .

1. On qualifie un tel espace vectoriel de trivial, ici *trivial* ne signifie pas "facile" mais "atypique".
2. Bien que parfois non respectée, cette convention est indispensable pour la cohérence des notations.
3. Formellement $\mathbf{0} \in E_\lambda$, mais un vecteur propre $|u_\lambda\rangle$ ne peut être nul (on cherche une base de E_λ).

d Forme sesquilinéaire

α Définition

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{C} . On appelle forme sesquilinéaire toute application \mathcal{Q} de $E \times E$ dans \mathbb{C} , linéaire à droite et semi-linéaire à gauche,⁴ ce qui s'écrit

$$\mathcal{Q} : \left. \begin{array}{l} E \times E \rightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) \mapsto \mathcal{Q}(u, v) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall (x, y) \in E^2 \\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}(u, \alpha v + \beta w) = \alpha \mathcal{Q}(u, v) + \beta \mathcal{Q}(u, w), \\ \mathcal{Q}(\alpha u + \beta v, w) = \overline{\alpha} \mathcal{Q}(u, w) + \overline{\beta} \mathcal{Q}(v, w), \end{array} \right.$$

où $\mathcal{Q}(u, v)$ est l'image de (u, v) par l'application \mathcal{Q} . On note que son action sur u est différente de celle sur v .

β Notation de Dirac

En notation de Dirac, on note l'image $\langle u | \mathcal{Q} | v \rangle$; la linéarité à droite s'écrit $\langle u | \mathcal{Q} | \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u | \mathcal{Q} | v \rangle + \beta \langle u | \mathcal{Q} | w \rangle$ tandis que la semi-linéarité à gauche s'écrit $\langle \alpha u + \beta v | \mathcal{Q} | w \rangle = \overline{\alpha} \langle u | \mathcal{Q} | w \rangle + \overline{\beta} \langle v | \mathcal{Q} | w \rangle$.

e Forme hermitienne

Une forme sesquilinéaire \mathcal{Q} définie dans E est hermitienne si elle est de plus symétrique, c'est-à-dire qu'elle vérifie, en notation de Dirac,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle y | \mathcal{Q} | x \rangle = \overline{\langle x | \mathcal{Q} | y \rangle}.$$

On appelle $\langle x | \mathcal{Q} | y \rangle$ produit du couple $(|x\rangle, |y\rangle)$ par la forme \mathcal{Q} . À toute forme hermitienne peut être associée une métrique.⁵

f Forme hermitienne définie positive

Une forme hermitienne \mathcal{Q} dans E est dite définie positive si elle vérifie de plus les deux conditions suivantes, en notation de Dirac :

$$\begin{aligned} \forall u \in E, \quad \langle u | \mathcal{Q} | u \rangle &\geq 0 \\ \langle u | \mathcal{Q} | u \rangle = 0 &\Leftrightarrow |u\rangle = 0. \end{aligned}$$

On peut lui associer une métrique dite euclidienne, qui présente des propriétés particulières.⁵

g Forme linéaire

Une forme linéaire est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans \mathbb{C} , le corps des complexes, ce qui s'écrit :

$$\varphi : \left. \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{C} \\ u \mapsto \varphi(u) \end{array} \right\} \forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad \varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v);$$

où $\varphi(u) \in \mathbb{C}$ est l'image de u par l'application φ .

On note E^* l'espace des formes linéaires. C'est, par définition, le dual de E .

4. Ce choix est courant mais arbitraire, on peut également définir linéaire à gauche et semi-linéaire à droite, ce que font certains auteurs.

5. On n'étudiera, dans la section sur les bases, que les métriques euclidiennes, définies ci-après. Citons, parmi les métriques non euclidiennes, la métrique de Minkovski utilisée pour décrire l'espace-temps de dimension 4 en relativité générale, qui est définie non positive (les valeurs propres sont 1 et -1).

2 ESPACE HERMITIEN

a Produit hermitien

α Existence

Quand E , espace vectoriel sur \mathbb{C} , est de dimension finie, on peut toujours introduire un produit hermitien, associé à une forme hermitienne \mathcal{G} définie positive. E , muni de ce produit, est appelé *espace hermitien*.

β Propriétés

Notons que \mathcal{G} est une forme sesquilinéaire :

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{G} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C} \quad \forall (x, y) \in E^2 \\ (u, v) \mapsto \mathcal{G}(u, v) \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathcal{G}(u, \alpha v + \beta w) = \alpha \mathcal{G}(u, v) + \beta \mathcal{G}(u, w), \\ \mathcal{G}(\alpha u + \beta v, w) = \bar{\alpha} \mathcal{G}(u, w) + \bar{\beta} \mathcal{G}(v, w). \end{array} \quad (3)$$

Elle est de plus symétrique :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \mathcal{G}(y, x) = \overline{\mathcal{G}(x, y)}. \quad (4)$$

Enfin, elle est définie positive, donc on a les relations

$$\forall u \in E, \quad \mathcal{G}(u, u) \geq 0 \quad (5)$$

$$\mathcal{G}(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0. \quad (6)$$

(5) se lit “ \mathcal{G} est positive” et (6) se lit “ \mathcal{G} est définie”. \mathcal{G} étant une forme hermitienne définie positive, on lui associe une métrique g euclidienne.

γ Notations

De façon standard, on note $\mathcal{G}(u, v) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Remarquez que \mathcal{G} est implicite dans la notation, qui cache les détails du produit hermitien, donc de la métrique.

En notation de Dirac, on note $\mathcal{G}(u, v) = \langle u | v \rangle$. La propriété de symétrie (4) s’écrit alors $\langle y | x \rangle = \overline{\langle x | y \rangle}$. La dissymétrie entre l’action de \mathcal{G} sur $|u\rangle$ et celle sur $|v\rangle$ se traduit par le fait qu’on écrive un bra pour le premier et un ket pour le second.

b Norme

α Définition

À ce produit hermitien est associée une norme $\| \cdot \|$, définie par $\|u\| = \sqrt{\mathcal{G}(u, u)}$. Grâce à (5), la racine est toujours réelle, donc la norme bien définie.

β Distance

À cette norme est associée une distance d , la distance entre deux vecteurs u et v s’écrit $d(u, v) = \|u - v\|$. Grâce à (6), la distance entre deux vecteurs différents est toujours strictement positive, on dit que *la distance sépare les vecteurs*.

γ Conversion entre notations

On peut écrire $\|u\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\langle u | u \rangle}$, où les notations sont explicites.

δ *Multiplication par un complexe*

La sesquilinéarité du produit hermitien (3) implique

$$\|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Démonstration : soit un vecteur $|u\rangle$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \|\lambda \mathbf{u}\| &= \sqrt{\mathcal{G}(\lambda \mathbf{u}, \lambda \mathbf{u})} \\ &= \sqrt{\bar{\lambda} \lambda \mathcal{G}(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \\ &= |\lambda| \|\mathbf{u}\|, \end{aligned}$$

où on a appliqué (3) une fois à gauche et une fois à droite simultanément.

ϵ *Inégalités*

On vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui s'écrit en notation de Dirac :

$$|\langle u|v\rangle| \leq \|u\| \|v\|. \quad (8)$$

De même, on vérifie l'inégalité triangulaire

$$\left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u \pm v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad (9)$$

ζ *Identité de polarisation*

On peut exprimer le produit hermitien à partir de la norme grâce à l'égalité suivante :

$$\langle u|v\rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 - \mathbf{i}\|u+\mathbf{i}v\|^2 + \mathbf{i}\|u-\mathbf{i}v\|^2}{4}. \quad (10)$$

c Théorème de représentation de Riesz

α *Énoncé*

Quand E est de dimension fini, on démontre le résultat suivant : à toute forme linéaire φ est associée un vecteur v de sorte que

$$\forall u \in E, \quad \varphi(u) = \mathcal{G}(v, u) \quad (11)$$

où \mathcal{G} est le produit hermitien associé à une métrique euclidienne.⁶

Par conséquent, on notera systématiquement φ_v toute forme linéaire, où v est le vecteur tel que $\varphi_v(u) = \mathcal{G}(v, u)$ pour tout $u \in E$.

β *Notation de Dirac*

On notera par un bra $\langle v|$ la forme linéaire φ_v , de sorte que la relation (11) s'écrit

$$\langle v|(|u\rangle) = \langle v|u\rangle$$

ce qui explique l'intérêt de ces notations. Attention toutefois à la métrique qui se cache sous le produit hermitien.

6. Ce théorème est valable quelle que soit la métrique. Il découle de la bijection entre E et E^* .

γ *Semi-linéarité*

L'application, de E dans E^* , qui associe $u \mapsto \varphi_u$ n'est pas linéaire mais semi-linéaire, ce qui s'écrit

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad \varphi_{\alpha x + \beta y} = \bar{\alpha} \varphi_x + \bar{\beta} \varphi_y$$

Démonstration : soit $u \in E$, soit $(x, y) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$\varphi_{\alpha x + \beta y}(u) = \mathcal{G}(\alpha x + \beta y, u) = \bar{\alpha} \mathcal{G}(x, u) + \bar{\beta} \mathcal{G}(y, u) = \bar{\alpha} \varphi_x(u) + \bar{\beta} \varphi_y(u) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

En notation de Dirac, la semi-linéarité s'écrit

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad \langle \alpha x + \beta y | = \bar{\alpha} \langle x | + \bar{\beta} \langle y |$$

où on note qu'il faut écrire d'abord les combinaisons *vectoriellement* dans les bra ou ket, comme expliqué plus avant, sinon ce dernier calcul donnerait un résultat incorrect.

d Géométrie hilbertienne

α *Vecteurs orthogonaux*

Deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$ sont orthogonaux ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$), si et seulement si $\langle u | v \rangle = 0$.

β *Vecteurs parallèles*

- On rappelle la définition formelle du parallélisme :

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \iff \exists (\mu, \nu) \neq (0, 0), \quad \mu \mathbf{u} + \nu \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

qui s'écrit plus simplement, quand $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$,

$$\exists \lambda \neq 0, \quad \mathbf{v} = \lambda \mathbf{u} .$$

- À partir de la formule (8), on introduit le critère suivant :
Deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$ sont parallèles si et seulement si l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité, c'est-à-dire

$$|\langle u | v \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| .$$

- Enfin, spécifiquement à trois dimensions, on a également le critère

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

où \times désigne le produit vectoriel.

3 BASES

a Existence

Soit un espace vectoriel de dimension finie E , on démontre l'existence d'une base, qu'on notera $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ (ou $\mathcal{B} = \{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ en notation de Dirac). Le nombre n est un invariant de l'espace E , appelé dimension de l'espace.⁷

Par définition, tout vecteur $u \in E$ admet une décomposition **unique** dans la base \mathcal{B} , ce qu'on écrit en notation de Dirac,

$$|u\rangle = \sum_{i=1}^n U_i |e_i\rangle$$

où $U_i \in \mathbb{C}$ sont les **composantes** du vecteur dans cette base.

7. Dans le cas de l'espace nul, la dimension est $n = 0$ et la base $\mathcal{B} = \emptyset$.

b Base réciproque

Soit une base $\mathcal{B} = (|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle)$ d'un espace vectoriel E de dimension n . Il existe une base *réciproque* $\tilde{\mathcal{B}} = (|e_1^*\rangle, \dots, |e_n^*\rangle)$ définie par

$$\forall (i, j) \in \{1..n\}^2, \quad \boxed{\langle e_i^* | e_j \rangle = \delta_{ij}}. \quad (12)$$

On vérifiera qu'à \mathcal{B} correspond une base $\tilde{\mathcal{B}}$ **unique**.

La base $\tilde{\mathcal{B}}^\dagger \equiv \{\langle e_1^* |, \dots, \langle e_n^* | \}$ est la base duale (définie dans E^*) de la base \mathcal{B} .

c Décomposition des bra et des ket

α Représentation d'un vecteur

Soit un vecteur $|u\rangle$, on le représente dans la base \mathcal{B} par la matrice colonne $U \equiv \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$ et on a

$$|u\rangle = \sum_{i=1}^n U_i |e_i\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} U; \quad (13)$$

les composantes U_i sont dites contravariantes.

On peut également décomposer un vecteur $|u\rangle$ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$ et introduire ses composantes covariantes U_1^*, \dots, U_n^* , telles que

$$|u\rangle = \sum_{i=1}^n U_i^* |e_i^*\rangle. \quad (14)$$

β Composantes d'un vecteur

Soit $|u\rangle \in E$, qui se décompose selon (13), ses composantes contravariantes s'écrivent

$$\boxed{U_i = \langle e_i^* | u \rangle}; \quad (15)$$

Démonstration : on a

$$\langle e_i^* | u \rangle = \left\langle e_i^* \left| \sum_{j=1}^n U_j e_j \right. \right\rangle = \sum_{j=1}^n U_j \underbrace{\langle e_i^* | e_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = U_i \quad \text{C.Q.F.D.}$$

$|u\rangle$ se décompose également selon (14) et ses composantes covariantes s'écrivent

$$\boxed{U_i^* = \langle e_i | u \rangle}; \quad (16)$$

Démonstration : on a

$$\langle e_i | u \rangle = \left\langle e_i \left| \sum_{j=1}^n U_j^* e_j^* \right. \right\rangle = \sum_{j=1}^n U_j^* \underbrace{\langle e_i | e_j^* \rangle}_{=\delta_{ij}} = U_i^* \quad \text{C.Q.F.D.}$$

γ Décomposition des formes linéaires

Un bra $\langle u|$ se décompose de façon unique dans la base $\tilde{\mathcal{B}}^\dagger \equiv \{\langle e_1^*|, \dots, \langle e_n^*|\}$. Ses composantes dans cette base sont dites covariantes et s'écrivent $\overline{U_i^*}$, où U_i^* sont les composantes covariantes de $|u\rangle$. Cela s'écrit :

$$\langle u| = \sum_{i=1}^n \overline{U_i^*} \langle e_i^*|. \quad (17)$$

Démonstration : il suffit de faire l'adjoint de la relation (14).

Ces composantes sont $\overline{U_i^*} = \langle u|e_i\rangle = \overline{\langle e_i|u\rangle}$.

De façon analogue, on décompose une forme linéaire $\langle u|$ dans la base $\mathcal{B}^\dagger \equiv \{\langle e_1|, \dots, \langle e_n|\}$ et introduire ses composantes contravariantes $\overline{U_1}, \dots, \overline{U_n}$, telles que

$$\langle u| = \sum_{i=1}^n \overline{U_i} \langle e_i|. \quad (18)$$

Ces composantes sont $\overline{U_i} = \langle u|e_i^*\rangle = \overline{\langle e_i^*|u\rangle}$.

δ Représentation des formes linéaires

On représente le bra $\langle u|$ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}^\dagger$ par une matrice ligne, selon ⁸

$$\langle u| \stackrel{\tilde{\mathcal{B}}}{=} U^{*\dagger} \equiv \left(\begin{array}{c} U_1^* \\ \vdots \\ U_n^* \end{array} \right)^\dagger = (\overline{U_1^*} \quad \dots \quad \overline{U_n^*}) ;$$

d Représentation des opérateurs

α Décomposition d'un opérateur dans une base

Soit la base \mathcal{B} , soit un opérateur vectoriel \mathcal{M} , il se décompose sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{M} = \sum_{ij} M_{ij} |e_i\rangle \langle e_j^*|} \quad (19)$$

où les $|e_i^*\rangle$ sont les vecteurs de la base réciproque $\tilde{\mathcal{B}}$.

β Action d'un opérateur sur un vecteur

Soit \mathcal{M} un opérateur vectoriel et une base $\mathcal{B} = \{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$. L'action de \mathcal{M} sur $|e_i\rangle$ s'écrit

$$\boxed{\mathcal{M}|e_i\rangle = \sum_{j=1}^n M_{ji} |e_j\rangle} \quad (20)$$

où on notera attentivement l'ordre des indices.

Démonstration : on part de (19)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}|e_i\rangle &= \sum_{\substack{j=1..n \\ k=1..n}} M_{jk} |e_j\rangle \underbrace{\langle e_k^*|e_i\rangle}_{=\delta_{ki}} \\ &= \sum_{j=1}^n M_{ji} |e_j\rangle. \end{aligned}$$

8. Matriciellement, l'adjoint A^\dagger d'une matrice A est définie comme la transposée et complexe conjuguée de A , $A^\dagger = {}^t \overline{A}$, où $\overline{}$ représente la conjugaison complexe.

Soit un vecteur $|u\rangle$, l'action de \mathcal{M} sur $|u\rangle$ s'écrit

$$\mathcal{M}|u\rangle = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} U_i M_{ji} |e_j\rangle = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n M_{ji} U_i \right) |e_j\rangle = \sum_{j=1}^n [MU]_j |e_j\rangle .$$

Démonstration : la première égalité découle de (20) par linéarité. Ceci prouve que $\mathcal{M}|u\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} MU$.

γ Composantes d'un opérateur

Soit \mathcal{M} un opérateur vectoriel et une base \mathcal{B} . Les composantes de \mathcal{M} sont données par

$$\boxed{M_{ij} = \langle e_i^* | \mathcal{M} | e_j \rangle} . \quad (21)$$

Démonstration : on écrit

$$\begin{aligned} \langle e_i^* | \mathcal{M} | e_j \rangle &= \langle e_i^* | \left(\sum_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}} M_{kl} |e_k\rangle \langle e_l^*| \right) | e_j \rangle \\ &= \sum_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}} M_{kl} \underbrace{\langle e_i^* | e_k \rangle}_{=\delta_{ik}} \underbrace{\langle e_l^* | e_j \rangle}_{=\delta_{lj}} \\ &= M_{ij} . \end{aligned}$$

δ Représentation matricielle d'un opérateur

La matrice des composantes M_{ij} associée à un opérateur \mathcal{M} dans une base \mathcal{B} peut être utilisée directement dans l'algèbre matricielle.

Soit $|u\rangle$ un vecteur et U le vecteur colonne qui est sa représentation matricielle dans la base \mathcal{B} . Soit $\mathcal{M}|u\rangle$ l'image de $|u\rangle$ par cet opérateur, on a :

$$\mathcal{M}|u\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n M_{1j} U_j \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^n M_{nj} U_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} \equiv MU ,$$

autrement dit, l'action de \mathcal{M} sur $|u\rangle$ correspond au produit matriciel de M par U .

De plus, on peut à l'aide de (20) calculer directement M par l'observation suivante : **les colonnes de M sont les images des vecteurs de base** (dans leur propre base). On peut le vérifier sur un exemple :

$$\mathcal{M}|e_1\rangle = M_{11}|e_1\rangle + \cdots + M_{n1}|e_n\rangle \iff M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} \\ \vdots \\ M_{n1} \end{pmatrix}$$

où l'on observera également l'écriture vectorielle.

e Opérations sur les opérateurs

Nous étudions dans cette section la composition des opérateurs, leur trace et leur déterminant. Ces opérations sont définies à partir des composants mais ne dépendent pas du choix de la représentation, comme cela sera prouvé au chapitre sur les changements de base.

α *Produit*

La composition des opérateurs $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, qu'on écrira aussi simplement $\mathcal{A}\mathcal{B}$, correspond au produit matriciel AB .

Démonstration : soient \mathcal{A} et \mathcal{B} , deux opérateurs, on note C la matrice représentant le produit $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. Elle a pour composantes

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \langle e_i^* | \mathcal{A}\mathcal{B} | e_j \rangle = \langle e_i^* | \mathcal{A} \left(\sum_{k=1}^n B_{kj} | e_k \rangle \right) \rangle = \langle e_i^* | \sum_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}} B_{kj} A_{lk} | e_l \rangle \rangle \\ &= \sum_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}} B_{kj} A_{lk} \underbrace{\langle e_i^* | e_l \rangle}_{=\delta_{il}} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = AB]_{ij} ; \end{aligned}$$

c'est vrai $\forall i, j = 1..n$, on a finalement $C = AB$.

β *Trace*

- Soit un opérateur \mathcal{A} et la matrice A le représentant dans la base \mathcal{B} . On définit la trace de la matrice A , que l'on note $\text{tr}(A)$, par la somme de ses éléments diagonaux :

$$\boxed{\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}} . \quad (22)$$

On montrera dans ce cours que la trace est invariante par changement de base. Aussi peut-on définir la trace de l'opérateur \mathcal{A} , et noter $\text{tr}(\mathcal{A})$, la trace de l'une quelconque de ses représentations matricielles. On en déduit les résultats suivants,⁹ qu'on peut aussi établir directement.

- La trace vérifie les propriétés suivantes

$$\text{tr}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \text{tr}(\mathcal{A}_1) + \text{tr}(\mathcal{A}_2) \quad \text{tr}(\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2) = \text{tr}(\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1)$$
 et dans \mathcal{B} , $\text{tr}(A_1 + A_2) = \text{tr}(A_1) + \text{tr}(A_2) \quad \text{tr}(A_1 A_2) = \text{tr}(A_2 A_1)$
 Ce résultat n'est pas trivial car la composition des opérateurs est non commutative, de même que le produit des matrices qui les représentent.
- Quand un opérateur est diagonalisable, la trace est la somme des valeurs propres¹⁰.

γ *Déterminant*

- Soit un opérateur \mathcal{A} et la matrice A le représentant dans la base \mathcal{B} . On définit le déterminant de la matrice A , que l'on note $\det(A)$, par

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)}} . \quad (23)$$

où n est la dimension de l'espace, \mathbb{S}_n l'ensemble des permutations à n éléments et $\epsilon(\sigma)$ est la signature d'une permutation σ .

- Le déterminant vérifie la propriété suivante : soit les représentations \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 dans la base \mathcal{B} des opérateurs \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 ,

$$\det(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2) = \det(\mathcal{A}_1) \det(\mathcal{A}_2) .$$

9. Si on pose $A = A_1 A_2$ et $\alpha = (A_2)^{-1}$, on a $A_1 A_2 = A$ et $A_2 A_1 = \alpha^{-1} A \alpha = A'$ où A' est la matrice de \mathcal{A} représentée dans une nouvelle base, cf. la suite du cours.

10. Ce résultat se généralise mais cela nécessiterait de définir les valeurs propres dans tous les cas à l'aide de la représentation de Jordan.

- Le déterminant est invariant par changement de base¹¹. Aussi on peut définir le déterminant de l'opérateur \mathcal{A} , et noter $\det(\mathcal{A})$, le déterminant de l'une quelconque de ses représentations matricielles.
- La propriété précédente se généralise immédiatement pour les opérateurs :

$$\det(\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2) = \det(\mathcal{A}_1) \det(\mathcal{A}_2) .$$

- Quand ils sont diagonalisables, leur déterminant est le produit des valeurs propres.¹¹

δ Inversibilité

On rappelle le résultat fondamental, en dimension finie : soit \mathcal{A} , un opérateur, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- \mathcal{A} est inversible
- Son déterminant $\det(\mathcal{A}) \neq 0$.
- 0 n'est pas valeur propre¹² de \mathcal{A} .

On a les cas particuliers suivants :

- En dimension 2, il est utile de connaître l'expression de A^{-1} , à partir de l'expression de A . Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tel que $\det(A) = ad - bc \neq 0$, on a alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

- En dimension 1, l'inverse est $(a)^{-1} = (\frac{1}{a})$.
- Pour les dimensions supérieures, il faut dégager systématiquement la structure d'une matrice en blocs de dimensions inférieures ; en particulier, si les blocs sont de dimensions 1 ou 2, l'expression de l'inverse s'obtient directement, comme dans l'exemple suivant :

$$\text{soit } A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} & 0 \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix} .$$

f Représentation d'une forme sesquilinéaire

α Décomposition d'une forme sesquilinéaire dans une base

Soit la base \mathcal{B} , soit une forme sesquilinéaire \mathcal{Q} , elle se décompose sous la forme :

$$\mathcal{Q} = \sum_{ij} Q_{ij} |e_i^* \rangle \langle e_j^*| \quad (24)$$

où les $|e_i^* \rangle$ sont les vecteurs de la base réciproque $\tilde{\mathcal{B}}$.

11. *Démonstration* : d'après la propriété précédente, on a $\det(A_1 A_2) = \det(A_2 A_1)$ puisque la multiplication est commutative dans \mathbb{C} . Par suite, en utilisant les mêmes notations que pour la note 9, il vient $\det(A') = \det(A)$.

12. On écrit encore que le noyau $\ker(\mathcal{A}) = \{\mathbf{0}\}$, où on rappelle que $\ker(\mathcal{A}) = \{|u\rangle \text{ tel que } \mathcal{A}|u\rangle = 0\}$.

β Action d'une forme sesquilinéaire sur deux vecteurs

Soit \mathcal{Q} une forme sesquilinéaire et une base $\mathcal{B} = \{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$. L'action de \mathcal{Q} sur $|e_i\rangle$ à gauche et $|e_j\rangle$ à droite, on dira le sandwich de \mathcal{Q} entre \mathbf{e}_i et \mathbf{e}_j , s'écrit

$$\boxed{\langle e_i | \mathcal{Q} | e_j \rangle = Q_{ij}}. \quad (25)$$

Démonstration : on écrit

$$\begin{aligned} \langle e_i | \mathcal{Q} | e_j \rangle &= \langle e_i | \left(\sum_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}} Q_{kl} |e_k^*\rangle \langle e_l^*| \right) | e_j \rangle \\ &= \sum_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}} Q_{kl} \underbrace{\langle e_i | e_k^* \rangle}_{=\delta_{ik}} \underbrace{\langle e_l^* | e_j \rangle}_{=\delta_{lj}} \\ &= Q_{ij}. \end{aligned}$$

Par sesquilinearité, le sandwich de \mathcal{Q} entre \mathbf{u} et \mathbf{v} s'écrit

$$\langle u | \mathcal{Q} | v \rangle = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \bar{U}_i V_j Q_{ij}. \quad (26)$$

γ Représentation matricielle d'une forme sesquilinéaire

La matrice des composantes Q_{ij} associée à une forme sesquilinéaire \mathcal{Q} dans une base \mathcal{B} peut être utilisée directement dans l'algèbre matricielle.

Soit $|u\rangle$ et $|v\rangle$ deux vecteurs, U et V les vecteurs colonne qui les représentent matriciellement. On a

$$\langle u | \mathcal{Q} | v \rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} \left(\sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \bar{U}_i Q_{ij} V_j \right) = (\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_n) \begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} \equiv U^\dagger M V,$$

autrement dit, le sandwich de \mathcal{Q} entre \mathbf{u} et \mathbf{v} correspond au double produit matriciel de V^\dagger par M puis par U .¹³ Attention, tout sandwich est un scalaire, donc un nombre complexe.

g Métrique euclidienne

On considère dans toute la section un espace E muni d'une forme hermitienne définie positive \mathcal{G} et d'une base $\mathcal{B} = \{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$.

α Définition

Le produit hermitien étant bien défini, on peut définir la métrique g associée à cette base par

$$\boxed{g_{ij} = \langle e_i | e_j \rangle}. \quad (27)$$

13. Attention, l'ordre est essentiel ici puisque l'algèbre matricielle est non commutative.

β Décomposition du produit hermitien

Le produit hermitien des vecteurs $|u\rangle$ à gauche et $|v\rangle$ à droite, dans une base \mathcal{B} quelconque, s'écrit :

$$\boxed{\langle u|v\rangle = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \overline{U_i} g_{ij} V_j} . \quad (28)$$

Démonstration :

$$\langle u|v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n U_i e_i \left| \sum_{j=1}^n V_j e_j \right. \right\rangle = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \overline{U_i} V_j \underbrace{\langle e_i|e_j\rangle}_{=g_{ij}} .$$

On aurait pu appliquer directement (26). Matriciellement, ce produit s'écrit

$$\begin{pmatrix} \overline{U_1} & \cdots & \overline{U_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = U^\dagger g V .$$

γ Propriétés de la métrique

- $g^\dagger = g$.

Démonstration : on a $\langle e_j|e_i\rangle = \overline{\langle e_i|e_j\rangle}$ puisque \mathcal{G} est hermitienne. Cela s'écrit exactement $g_{ji} = \overline{g_{ij}}$.

- g est inversible $\Leftrightarrow \mathcal{G}$ est définie; on dit que la métrique est définie.

Démonstration : cela découle du théorème de décomposition polaire qui suit.

- g a toutes ses valeurs propres positives $\Leftrightarrow \mathcal{G}$ est positive.

Démonstration : cela découle aussi du théorème de décomposition polaire.

δ Théorème de décomposition polaire

La métrique g est définie positive si et seulement s'il existe une matrice β inversible (à valeur dans \mathbb{C}) telle que

$$g = \beta^\dagger \beta .$$

Démonstration : dans le sens direct, la démonstration la plus naturelle fait intervenir les changements de base, et sera étudiée ultérieurement.

Dans le sens indirect : soit β inversible, telle que $g = \beta^\dagger \beta$, calculons $\|\mathbf{u}\|$ pour $|u\rangle = \sum_i U_i |e_i\rangle \neq 0$

$$g = \beta^\dagger \beta \quad \Leftrightarrow \quad g_{ij} = \sum_{k=1}^n \beta_{ik}^\dagger \beta_{kj} = \sum_{k=1}^n \overline{\beta_{ki}} \beta_{kj}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \|\mathbf{u}\|^2 &= \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \overline{U_i} g_{ij} U_j = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n \\ k=1..n}} \overline{U_i} \overline{\beta_{ki}} U_j \beta_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \sum_i U_i \beta_{ki} \right|^2 = \|V\|^2 \\ &= V_i \text{ avec } V = \beta U \end{aligned}$$

or $V \neq 0$, sinon, on aurait $\beta U = 0 \Leftrightarrow U$ vecteur propre de valeur propre 0 $\Leftrightarrow \beta$ non inversible, absurde.

D'où finalement $\|\mathbf{u}\| \stackrel{\mathcal{B}}{=} \|V\| > 0$.

Il faut bien interpréter l'égalité $\|\mathbf{u}\| \stackrel{\mathcal{B}}{=} \|V\|$: la norme de \mathbf{u} vecteur $\in E$, muni de la métrique g , est identique à celle de V , vecteur colonne $\in \mathbb{C}^n$, muni de la métrique canonique euclidienne associée du produit hermitien $U^\dagger V = \sum_i \overline{U_i} V_i$.

ϵ Volume de la cellule unitaire

Le volume¹⁴ de la cellule unitaire définie par les vecteurs $|e_i\rangle$ de la base \mathcal{B} s'écrit

$$\boxed{\mathcal{V} = \sqrt{\det(g)}}. \quad (29)$$

h Adjoint

On définit formellement l'adjoint des objets définis dans un espace vectoriel E . C'est une généralisation de la conjugaison complexe à tous les objets définis dans E .

On note \mathcal{A}^\dagger l'adjoint d'un objet \mathcal{A} . Par définition, on a $(\mathcal{A}^\dagger)^\dagger = \mathcal{A}$.

α Adjoint d'un scalaire

L'adjoint d'un scalaire est son complexe conjugué : soit $a \in \mathbb{C}$, $a^\dagger = \bar{a}$.

Cette notion s'étend aux nombres complexes qui peuvent être rencontrés dans toute expression et s'interprètent alors comme des facteurs scalaires.

β Adjoint d'un vecteur et d'une forme linéaire

Soit $|u\rangle$ un vecteur, son adjoint est la forme $\langle u|$ représentée par un bra, ce qui s'écrit $(|u\rangle)^\dagger = \langle u|$.

Réciproquement $(\langle u|)^\dagger = |u\rangle$.

γ Adjoint d'un opérateur

Soit \mathcal{A} un opérateur vectoriel, son adjoint \mathcal{A}^\dagger est tel que,

$$\forall |u\rangle, |v\rangle \in E, \quad \langle u|\mathcal{A}^\dagger|v\rangle = \overline{\langle v|\mathcal{A}|u\rangle}.$$

δ Adjoint d'un produit d'objets

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux objets (ça peut être des vecteurs, des formes, des opérateurs, des scalaires). On a

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^\dagger = \mathcal{B}^\dagger\mathcal{A}^\dagger. \quad (30)$$

Exemple : Soient $|u\rangle$ et $|v\rangle$ deux vecteurs, et $\lambda = \langle u|v\rangle$ leur produit hermitien, on a

$$\overline{\langle u|v\rangle} = \bar{\lambda} = \lambda^\dagger = (\langle u||v\rangle)^\dagger = |v\rangle^\dagger\langle u|^\dagger = \langle v|u\rangle$$

ce qui redonne (4) en notation de Dirac.

i Norme des opérateurs

α Définition

Dans les espaces vectoriels de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. On utilisera pour les opérateurs¹⁵ la norme $\|\cdot\|$, définie par : soit \mathcal{O} un opérateur,

$$\|\mathcal{O}\| = \sup_{\mathbf{x} \in E} \frac{\|\mathcal{O}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

14. Attention, ce volume ne peut être défini qu'en référence à une base *orthonormée*. Comme la base canonique \mathcal{B} ne l'est a priori pas, il faut en trouver une, cf. section B4.

15. On peut aussi utiliser la norme liée aux composantes de la matrice : soit \mathcal{M} un opérateur, cette norme s'écrit $\|\mathcal{M}\|_{\mathcal{B}} = \sum_{ij} |M_{ij}|^2$, où M est la matrice le représentant dans une base \mathcal{B} . Comme cette norme dépend de \mathcal{B} , on peut également utiliser $\inf_{\mathcal{B}} \|\mathcal{M}\|_{\mathcal{B}}$.

β Propriétés

- Soit \mathcal{O} un opérateur, $\|\mathcal{O}\| = 0$ si et seulement si $\mathcal{O} = 0$. C'est la propriété de séparation.
- La norme $\|\cdot\|$ vérifie la propriété d'homogénéité (7).
Démonstration : soit \mathcal{A} un opérateur de E et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in E \quad & \|\lambda \mathcal{A} \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \\ \text{donc} \quad & \sup_{\mathbf{x} \in E} \|\lambda \mathcal{A} \mathbf{x}\| = \sup_{\mathbf{x} \in E} |\lambda| \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| = |\lambda| \sup_{\mathbf{x} \in E} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \\ \text{soit} \quad & \|\lambda \mathcal{A}\| = |\lambda| \|\mathcal{A}\|. \end{aligned}$$

- La norme $\|\cdot\|$ vérifie la relation triangulaire (9).
Démonstration : soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux opérateurs de E , on a

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in E \quad & \|(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| + \|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \\ \text{donc} \quad & \sup_{\mathbf{x} \in E} \|(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{x}\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in E} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| + \sup_{\mathbf{x} \in E} \|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \\ \text{soit} \quad & \|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\| \\ \text{et} \quad & \forall \mathbf{x} \in E \quad \|(\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathcal{B}\mathbf{x}\| \geq \left| \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \right| \\ \text{donc} \quad & \sup_{\mathbf{x} \in E} \|(\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathbf{x}\| \geq \sup_{\mathbf{x} \in E} \left| \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \right| \geq \left| \sup_{\mathbf{x} \in E} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \sup_{\mathbf{x} \in E} \|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \right| \\ \text{soit} \quad & \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| \geq \left| \|\mathcal{A}\| - \|\mathcal{B}\| \right|. \end{aligned}$$

- Soient \mathcal{O} et \mathcal{P} deux opérateurs, la norme de leur composée est inférieure ou égale au produit de leur norme :

$$\|\mathcal{O} \circ \mathcal{P}\| \leq \|\mathcal{O}\| \|\mathcal{P}\|. \quad (31)$$

Démonstration : soit $\mathbf{x} \in E$, on a

$$\|\mathcal{O}\mathcal{P}(\mathbf{x})\| = \|\mathcal{O}(\mathcal{P}(\mathbf{x}))\| \leq \|\mathcal{O}\| \|\mathcal{P}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathcal{O}\| \|\mathcal{P}\| \|\mathbf{x}\|$$

d'où le résultat en prenant le sup pour $\mathbf{x} \in E$.

- Soit \mathcal{O} opérateur, on a

$$\|\mathcal{O}\| = \sup_{\mathbf{x} \in E, \mathbf{y} \in E} \frac{|\langle \mathbf{x} | \mathcal{O} \mathbf{y} \rangle|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \quad (32)$$

Démonstration : montrons d'abord $\sup_{\mathbf{x} \in E, \mathbf{y} \in E} \frac{|\langle \mathbf{x} | \mathcal{O} \mathbf{y} \rangle|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq \|\mathcal{O}\|$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (8), on a

$$|\langle \mathbf{x} | \mathcal{O} \mathbf{y} \rangle| = |\langle \mathbf{x} | \mathcal{O} \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathcal{O} \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \|\mathcal{O}\|$$

d'où le résultat en divisant par les normes et passant au sup.

Montrons pour finir $\sup_{\mathbf{x} \in E, \mathbf{y} \in E} \frac{|\langle \mathbf{x} | \mathcal{O} \mathbf{y} \rangle|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \geq \|\mathcal{O}\|$. Pour $\mathbf{x} = \mathcal{O} \mathbf{y}$, on a

$$\langle \mathbf{x} | \mathcal{O} \mathbf{y} \rangle = \langle \mathcal{O} \mathbf{y} | \mathcal{O} \mathbf{y} \rangle = \langle \mathcal{O} \mathbf{y} | \mathcal{O} \mathbf{y} \rangle = \|\mathcal{O} \mathbf{y}\|^2 \quad \text{donc} \quad \frac{\langle \mathbf{x} | \mathcal{O} \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \frac{\|\mathcal{O} \mathbf{y}\|^2}{\|\mathcal{O} \mathbf{y}\| \|\mathbf{y}\|} = \frac{\|\mathcal{O} \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|}$$

choisissons une suite \mathbf{y}_n telle que $\frac{\|\mathcal{O} \mathbf{y}_n\|}{\|\mathbf{y}_n\|} \rightarrow \|\mathcal{O}\|$, on observe que, soit $\mathbf{x}_n = \mathcal{O} \mathbf{y}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\langle \mathbf{x}_n | \mathcal{O} \mathbf{y}_n \rangle}{\|\mathbf{x}_n\| \|\mathbf{y}_n\|} = \frac{\langle \mathcal{O} \mathbf{y}_n | \mathcal{O} \mathbf{y}_n \rangle}{\|\mathcal{O} \mathbf{y}_n\| \|\mathbf{y}_n\|} \rightarrow \|\mathcal{O}\|$$

ce qui prouve le résultat recherché.

- Soit \mathcal{O} un opérateur, son adjoint a la même norme,

$$\|\mathcal{O}^\dagger\| = \|\mathcal{O}\|. \quad (33)$$

Démonstration : soit $\mathbf{x} \in E$ et $\mathbf{y} \in E$, on a, d'après (32), $\langle \mathbf{x} | \mathcal{O}^\dagger \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} | \mathcal{O} \mathbf{x} \rangle}$, donc $|\langle \mathbf{x} | \mathcal{O}^\dagger \mathbf{y} \rangle| = |\langle \mathbf{y} | \mathcal{O} \mathbf{x} \rangle|$. Comme c'est vrai $\forall \mathbf{x} \in E, \forall \mathbf{y} \in E$, on a le résultat annoncé en divisant par $\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ et passant au sup.

- Soit \mathcal{O} un opérateur, on a

$$\|\mathcal{O}\|^2 = \|\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}\| = \|\mathcal{O} \mathcal{O}^\dagger\|. \quad (34)$$

Démonstration : soit $\mathbf{x} \in E$,

$$\|\mathcal{O} \mathbf{x}\|^2 = \langle \mathcal{O} \mathbf{x} | \mathcal{O} \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathcal{O}^\dagger \mathcal{O} \mathbf{x} \rangle \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}\|$$

en utilisant (32). En divisant par $\|\mathbf{x}\|^2$, on obtient $\|\mathcal{O}\|^2 \leq \|\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}\|$.

Pour montrer $\|\mathcal{O}\|^2 \geq \|\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}\|$, on applique (31) :

$$\|\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}\| \leq \|\mathcal{O}^\dagger\| \|\mathcal{O}\|$$

puis (33) pour finir. Pour démontrer la formule avec les opérateurs dans le sens $\mathcal{O} \mathcal{O}^\dagger$, il suffit de refaire la démonstration avec \mathcal{O}^\dagger à la place de \mathcal{O} .

- Soit \mathcal{O} un opérateur diagonalisable et λ_1, λ_n ses valeurs propres (éventuellement égales). Alors,

$$\|\mathcal{O}\| = \max\{|\lambda_i|, 1 \leq i \leq p\};$$

la norme d'un opérateur diagonalisable est la plus grande valeur propre, en module. Ce résultat est faux si l'opérateur n'est pas diagonalisable. Par exemple, la norme d'un opérateur nilpotent est non nulle alors qu'il n'admet que la valeur propre zéro.

- Les opérateurs \mathcal{O} de norme finie sont continus : la propriété $\|\mathcal{O}\| = K < \infty$ exprime la continuité usuelle. En dimension finie, tous les opérateurs linéaires sont bornés et donc continus.

j Représentation de la base réciproque

On considère une base $\mathcal{B} = \{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ et la métrique euclidienne g associée. On note la base réciproque $\tilde{\mathcal{B}} = \{|e_1^*\rangle, \dots, |e_n^*\rangle\}$. On montre la relation de décomposition

$$\boxed{|e_i^*\rangle = \sum_j (g^{-1})_{ji} |e_j\rangle}. \quad (35)$$

On forme des lignes des vecteurs de base, et on écrit (35) formellement, en utilisant ¹⁶ $g_{ij}^{-1} = \overline{g_{ji}^{-1}}$:

$$(|e_1^*\rangle \quad \dots \quad |e_n^*\rangle) = (|e_1\rangle \quad \dots \quad |e_n\rangle) \overline{g^{-1}}.$$

Les vecteurs $|e_i\rangle$ ont une représentation triviale dans leur propre base \mathcal{B} , comme $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$.

Alors (12), qui s'écrit $(E_i^*)^\dagger g E_j = \delta_{ij} \forall i, j = 1..n$ et (35) donnent

$$E_i^* = \begin{pmatrix} (g^{-1})_{1i} \\ \vdots \\ (g^{-1})_{ni} \end{pmatrix}.$$

16. L'inverse d'une matrice hermitienne est hermitienne, il suffit de prendre les inverses, membre à membre, de $g^\dagger = g$. On peut également montrer que g^{-1} est la métrique associée à la base $\tilde{\mathcal{B}}$, donc hermitienne.

Démonstration de (35) : il est légitime de partir du résultat, du moment que l'on vérifie bien l'équation (12) et grâce à l'unicité de la base réciproque. On calcule

$$\begin{aligned} \langle e_i | \left(\sum_k (g^{-1})_{kj} |e_k\rangle \right) &= \sum_k \langle e_i | (g^{-1})_{kj} |e_k\rangle \\ &= \sum_k (g^{-1})_{kj} \underbrace{\langle e_i | e_k \rangle}_{=g_{ik}} \\ &= (gg^{-1})_{ij} = \delta_{ij} . \end{aligned}$$

Réciproquement, on a

$$\boxed{|e_i\rangle = \sum_j g_{ji} |e_j^*\rangle} ; \quad (36)$$

ce qui se démontre de façon analogue :

$$\begin{aligned} \langle e_i | \left(\sum_k g_{kj} |e_k^*\rangle \right) &= \sum_k \langle e_i | g_{kj} |e_k^*\rangle \\ &= \sum_k g_{kj} \underbrace{\langle e_i | e_k^* \rangle}_{=\delta_{ki}} \\ &= g_{ij} . \end{aligned}$$

Chaque vecteur e_i^* étant connu sur la base \mathcal{B} , on pourra prouver l'unicité de la base réciproque (cf. la suite du cours).

k Formule alternative du produit hermitien

Le produit hermitien des vecteurs $|u\rangle$ à gauche et $|v\rangle$ à droite, peut se récrire, à l'aide de (35) et (28),

$$\langle u | v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{U_i^*} V_i = \sum_{i=1}^n \overline{U_i} V_i^* .$$

Par exemple, la formule de la phase d'une onde diffusée dans la direction \mathbf{k} en un point \mathbf{r} du plan de diffraction s'écrit $\phi = \sum_{i=1}^3 k_i^* r_i$, où $\mathbf{k} = k_1^* \mathbf{e}_1^* + k_2^* \mathbf{e}_2^* + k_3^* \mathbf{e}_2^*$ est défini dans la base réciproque cristalline et $r_1 = x$, $r_2 = y$, $r_3 = z$ sont les composantes dans l'espace réel.

l Scalaires

Considérons un produit hermitien entre deux vecteurs et étudions ses propriétés :

- Cet objet est un nombre complexe.
- Cet objet est invariant par changement de base, autrement dit, ne dépend pas d'une représentation dans une base \mathcal{B} particulière.

Par exemple, la norme d'un vecteur, qui est un cas particulier de produit hermitien, ne dépend pas de la représentation choisie.

De tels objets sont appelés *scalaires*. Il y a parfois confusion avec les nombres complexes, mais cet abus ne sera pas fait dans ce cours, où les scalaires désigneront spécifiquement les nombres complexes invariants par changement de base.

A contrario, la composante U_i d'un vecteur u est aussi un nombre complexe, mais elle dépend par définition de la base choisie.

m Cas réel

Si on construit un espace vectoriel sur \mathbb{R} au lieu de \mathbb{C} , il suffit de supprimer dans tout ce qui précède la conjugaison complexe $\overline{}$, le produit hermitien devient alors produit scalaire, les formes sesquilinéaires deviennent bilinéaires, l'application $\mathbf{u} \mapsto \varphi_{\mathbf{u}}$ est linéaire au lieu de semi-linéaire et les scalaires sont des nombres réels.

Toutefois, certaines applications du cours devront être étudiées spécifiquement dans le cas réel dans la suite du cours.

Par ailleurs, si on construit un espace vectoriel E sur \mathbb{C} de dimension n , on peut le considérer comme un espace vectoriel sur \mathbb{R} , à condition de remarquer que la dimension, en tant qu'espace vectoriel sur \mathbb{R} , est $2n$.¹⁷

n Convention d'Einstein

α Propriétés remarquables dans les sommes

On constate la propriété suivante : un indice qui est sommé **apparaît toujours deux fois**.

β Convention d'Einstein

Partant de ces constatations, la convention d'Einstein consiste à ne jamais écrire de signe \sum .

Cette convention ne sera pas appliquée dans le polycopié. En effet, pour simplifier, on a omis l'enseignement de la variance des indices qui fournit une méthode de contrôle systématique des écritures. La convention décrite ici est donc appauvrie, elle est utilisée dans certaines disciplines de la physique (par exemple en mécanique des fluides) mais ne doit pas être confondue avec la convention complète utilisée en relativité générale, qui utilise également la variance des indices.

4 CAS D'UNE BASE ORTHONORMÉE

a Bases orthonormales

α Définition

Une base $\mathcal{B} = \{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ est orthonormée si et seulement si ses vecteurs vérifient

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \equiv \langle e_i | e_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \equiv \delta_{ij} .$$

β Base réciproque

On peut choisir $|e_i^*\rangle = |e_i\rangle \forall i$ dans la définition (12). Ceci prouve, dans ce cas, que la base directe \mathcal{B} et la base réciproque $\tilde{\mathcal{B}}$ sont égales.

γ Métrique

La métrique associée à une base orthonormée est $g = I$, autrement dit $g_{ij} = \delta_{ij}$ $i, j = 1..n$. On dit que la métrique (euclidienne) est plate.¹⁸

17. Pour éclairer cette règle, prenons l'exemple de l'espace \mathbb{C} lui-même. C'est un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension 1. On l'identifie fréquemment avec le plan \mathbb{R}^2 (l'axe des x se confondant avec les nombres réels, l'axe des y avec les nombres imaginaires purs). Cette réalisation de \mathbb{C} comme plan \mathbb{R}^2 est justement son interprétation en tant qu'espace vectoriel sur \mathbb{R} , de dimension 2.

18. Il faut préciser *euclidienne* et *plate* car il existe des métriques non euclidiennes plates, comme la métrique de Minkovski, cf. la note 5.

δ Composantes d'un vecteur

Dans une base orthogonale, on a $U_i = \langle e_i | u \rangle$.

ϵ Composantes d'un opérateur vectoriel

Dans une base orthogonale, les composantes de A sont obtenus par les sandwiches avec les éléments de la base, définis par $A_{ij} = \langle e_i | (A|e_j\rangle) \equiv \langle e_i | A | e_j \rangle$.

ζ Décomposition d'un opérateur vectoriel

La décomposition d'un opérateur A quelconque s'écrit dans une base orthonormale :

$$A = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} A_{ij} |e_i\rangle \langle e_j|.$$

η Produit hermitien

Dans le cas d'une base \mathcal{B} orthonormée, on retrouve la formule standard du produit hermitien de deux vecteurs. Comme $g = I$, on a

$$\langle u | v \rangle = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \overline{U_i} \underset{= \delta_{ij}}{\underbrace{g_{ij}}_{\sim}} V_j = \sum_{i=1}^n \overline{U_i} V_i = U^\dagger V.$$

θ Norme

Par définition, la norme du vecteur $|u\rangle$ s'écrit, dans une base orthogonale,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle u | u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |U_i|^2} = \sqrt{U^\dagger U}.$$

ι Produit vectoriel

À trois dimensions, on rappelle la définition du produit vectoriel de deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$. Dans une base orthonormale, les composantes étant définies comme précédemment, on a

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} U_2 V_3 - U_3 V_2 \\ U_3 V_1 - U_1 V_3 \\ U_1 V_2 - U_2 V_1 \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1..3} \varepsilon_{ijk} U_j V_k \right)_{i=1..3}.$$

On trouve que ce produit est antisymétrique : $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

b Géométrie

α Volume

Soit $\mathcal{B}^\perp = \{|f_1\rangle, \dots, |f_n\rangle\}$ une base orthonormée et \mathcal{B} une base quelconque, le volume du paralléloptope¹⁹ formé par les vecteurs $|e_i\rangle$ de \mathcal{B} vaut

$$\boxed{\mathcal{V} = |\det (E_1 \ \cdots \ E_n)|} \quad (37)$$

19. Un paralléloptope est la généralisation du parallélépipède défini en dimension 3.

où on a utilisé les représentations E_i en matrice colonne des vecteurs de base $|e_i\rangle$.

On peut préciser ces expressions dans le cas réel, pour les dimensions deux et trois.

À deux dimensions, on note $\begin{pmatrix} E_i \\ 0 \end{pmatrix}$ une matrice 1×3 . On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = |\det(E_1 \ E_2)| &= \left\| \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \|\mathbf{e}_1\| \|\mathbf{e}_2\| |\sin(\widehat{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2})| \end{aligned}$$

À trois dimensions, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = |\det(E_1 \ E_2 \ E_3)| &= \left| \sum_{\substack{i=1..3 \\ j=1..3 \\ k=1..3}} \varepsilon_{ijk} E_1]_i E_2]_j E_3]_k \right| &= |\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)| \\ &= |\mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)| \\ &= |\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)| . \end{aligned}$$

β Angles

On se restreint ici au cas réel. On rappelle que la géométrie est définie par le produit scalaire. En particulier, le cosinus de l'angle entre deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$ est donné par :

$$\cos(\widehat{\mathbf{u} \mathbf{v}}) = \frac{\langle u|v\rangle}{\|u\| \|v\|} . \quad (38)$$

γ Orientation de l'espace

On reste ici dans le cas réel.

- Soit \mathcal{B}^\perp la base orthonormée et \mathcal{B} une base quelconque, on définit l'orientation de la base \mathcal{B} (relativement à la base canonique) par le signe du déterminant $\det(E_1 \ \dots \ E_n)$. S'il est positif, on dit que la base est orientée positivement, s'il est négatif, on dit qu'elle est orientée négativement.
- À trois dimension, si l'on observe les vecteurs de \mathcal{B} de façon à former un trièdre aigu (d'angle solide $< 2\pi$), la base est orientée positivement quand les vecteurs tournent selon la règle de la main droite et négativement sinon.

c Produit tensoriel

α Exemple fondamentale

Soit deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$, alors $\mathcal{M} = |u\rangle\langle v|$ peut être identifié à un opérateur, en écrivant :

$$|x\rangle \mapsto (|u\rangle\langle v|)|x\rangle = (\langle v|x\rangle)|u\rangle \in E ;$$

on l'écrira encore $|u\rangle \otimes \langle v|$, et, matriciellement, dans la base \mathcal{B} orthonormale,

$$|u\rangle\langle v| \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} (V_1 \ \dots \ V_n) = UV^\dagger = \begin{pmatrix} U_1 V_1 & \dots & U_1 V_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n V_1 & \dots & U_n V_n \end{pmatrix} ,$$

ce qui fournit la représentation matricielle de cet opérateur. On peut écrire, plus succinctement,

$$M_{ij} = U_i V_j \quad \forall i, j = 1..n.$$

β Définition générale

Dans le cas général, un objet \mathcal{M} est le produit tensoriel des vecteurs u, v, \dots , si on peut écrire, dans une base \mathcal{B} , $M_{ij..} = U_i V_{j..} \forall i, j.. = 1..n$.

d Structure canonique de \mathbb{C}^n

L'espace \mathbb{C}^n des vecteurs colonnes U , muni du produit matriciel, possède une base canonique $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le produit hermitien associé au produit matriciel est $U^\dagger V$, la métrique est plate, $g = I$.

Il faut prendre garde à ne pas confondre cette métrique canonique euclidienne et plate avec la métrique g d'un espace E représenté dans \mathbb{C}^n , qui peut être quelconque (mais on n'étudie que les cas euclidiens dans ce cours).

5 ÉTUDE DES OPÉRATEURS

Il s'agit d'un rappel sur les familles importantes d'opérateurs : isométries, projections, opérateurs hermitiens, étudiés dans le cadre d'une base orthonormée.

On étudie au préalable la représentation de l'adjoint des opérateurs.²⁰

a Représentation de l'adjoint d'un opérateur

α Définition

Dans une base orthonormale, l'adjoint \mathcal{A}^\dagger a pour matrice $A^\dagger \equiv {}^t \overline{A}$, ce qui s'écrit, pour les composantes,

$$\boxed{(A^\dagger)_{ij} = \overline{A_{ji}}} . \tag{39}$$

Démonstration : soit $|u\rangle \in E$, posons $|v\rangle = \mathcal{A}|u\rangle$, on a

$$|v\rangle = \mathcal{A}|u\rangle = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} A_{ij} U_j |e_i\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j} U_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{nj} U_j \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle v| = \langle u|\mathcal{A}^\dagger &= \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \overline{U_j} A_{ji}^\dagger \langle e_i| \stackrel{\mathcal{B}}{=} (\sum_{j=1}^n \overline{U_j} A_{j1}^\dagger, \dots, \sum_{j=1}^n \overline{U_j} A_{jn}^\dagger) \\ \text{mais aussi } &\stackrel{\mathcal{B}}{=} (\overline{V_1}, \dots, \overline{V_n}) = (\sum_{j=1}^n \overline{U_j} A_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n \overline{U_j} A_{nj}) . \end{aligned}$$

Par identification, on obtient l'égalité (39) annoncée.

20. Cette représentation n'a pas été donnée dans le cas d'une base non orthonormée, où la matrice représentant \mathcal{A}^\dagger s'écrit $g^{-1} A^\dagger g$. Cette formule non usuelle sort du cadre de ce cours et ne redonne la formule du cas orthonormée que si $[g, A^\dagger] = 0$, i.e. les matrices g et A^\dagger commutent.

β Action à gauche d'un opérateur vectoriel

On remarque que l'équation (20) s'écrit de façon conjuguée :

$$\langle e_i | \mathcal{A} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \langle e_j | .$$

Attention : cette écriture n'est valable que pour le cas d'une base orthonormée et on a transformé $\mathcal{A}^\dagger \rightarrow \mathcal{A}$ pour l'élégance de la formule.

b Isométrie

- On appelle isométrie ou opérateur unitaire un opérateur \mathcal{A} qui envoie une base orthonormée $(|e_i\rangle)_{i=1..n}$ sur une base orthonormée $(|e'_i\rangle = \mathcal{A}|e_i\rangle)_{i=1..n}$.
- Les isométries préservent également les angles, c'est-à-dire les produits scalaires ($\langle u|v\rangle \mapsto \langle u'|v'\rangle = \langle u|v\rangle$) et, conséquemment, les normes ($\|\mathbf{u}\| \mapsto \|\mathbf{u}'\| = \|\mathbf{u}\|$). De même les isométries conservent tous les volumes, en particulier le volume \mathcal{V} de la base choisie.
- Les isométries sont toujours inversibles et, dans une base orthogonale, elles sont caractérisés par

$$A^\dagger = A^{-1} .$$

- Toutes les valeurs propres d'une isométrie vérifient $|\lambda| = 1$.
Démonstration : soit $|u\rangle$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ , on sait que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathcal{A}\mathbf{u}\|$, ce qui peut encore s'écrire $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}'\| = \|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$, d'où le résultat, en simplifiant.
- Par conséquence, on a $|\det(\mathcal{A})| = 1$.

c Isométrie réelle

- Ce sont les isométries \mathcal{A} dont une représentation A (dans une base particulière qui peut être \neq de la base canonique) est réelle (c'est-à-dire que toutes ses composantes A_{ij} sont réelles).
- Il peut exister des représentations complexes d'une isométrie réelle, c'est-à-dire que l'on peut trouver une base \mathcal{B}' telle qu'il y ait des composantes A'_{ij} complexes. Il peut même arriver que les valeurs propres soient complexes.

Un exemple qui rassemble ces deux cas est le suivant, à deux dimensions :

Soit \mathcal{A} , dont la matrice dans une base orthonormale \mathcal{B} est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Il existe une base \mathcal{B}' qui diagonalise \mathcal{A} , où cette isométrie s'écrit $A' = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$.

- Le déterminant est réel, puisqu'il peut être calculé dans une représentation réelle (vérifiez que cela marche dans l'exemple précédent). Il vaut donc $\det(\mathcal{A}) = \pm 1$.
- On distingue les isométries directes (ou positives) et les isométries indirectes (ou négatives) selon qu'elles conservent ou inversent l'orientation de la base. Les premières correspondent au cas $\det(\mathcal{A}) = 1$, les secondes au cas $\det(\mathcal{A}) = -1$. À deux dimensions, les isométries positives sont les rotations et les isométries négatives sont les symétries orthogonales. À trois dimensions, les isométries positives sont les rotations et les isométries négatives sont les symétries miroir (ce sont les symétries orthogonales par rapport à un plan) et l'inversion $\mathcal{A} = -\mathcal{J}$.

d Projecteurs

α Définition

Les projecteurs \mathcal{P} sont caractérisés par $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}$. L'espace E est alors décomposable en la somme directe²¹ $E = \ker(\mathcal{P}) \oplus \Im(\mathcal{P})$ (où \Im désigne l'image, i.e. $\Im(\mathcal{P}) = \mathcal{P}(E)$); cette sommation est caractéristique d'un projecteur. $\ker(\mathcal{P})$ est l'axe ou le plan parallèlement auquel on projette. $\Im(\mathcal{P})$ est l'axe ou le plan sur lequel on projette (on dit aussi axe ou plan **de** projection).

Dans toute base \mathcal{B} (y compris non orthonormale), \mathcal{P} est caractérisé par $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le polynôme minimal est $\mathcal{P}^2 - \mathcal{P}$ (cf. § h), sauf cas particuliers pour $\mathcal{P} = \mathcal{I}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{O}$, on en déduit que leurs valeurs propres sont exactement 0 et 1.

β Projecteur orthogonal

Un projecteur orthogonal \mathcal{P} vérifie par définition $\ker(\mathcal{P}) \perp \Im(\mathcal{P})$. On le caractérise également par

$$\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}.$$

Dans une base \mathcal{B} orthonormale, cela s'écrit $P^\dagger = P$. Exemple, $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

γ Décomposition en opérateurs élémentaires

Les opérateurs $|e_i\rangle\langle e_j|$ forment une base de E^E , matriciellement, ils s'écrivent :

$$|e_i\rangle\langle e_j| \stackrel{\mathcal{B}}{=} i \begin{pmatrix} & & & & j \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Parmi les opérateurs élémentaires, ceux qui s'écrivent $|e_i\rangle\langle e_i|$ sont toujours des projecteurs orthogonaux. Cela est vrai dès que le vecteur $|e_i\rangle$ est normé, $\|e_i\| = 1$, y compris quand la base n'est pas orthogonale, car il ne faut pas perdre de vue que $|e_i\rangle$, déjà normé, peut toujours être complété en une base orthonormale (cf. B4b).

Vérifions que, pour tout $|u\rangle$ de norme $\|\mathbf{u}\| = 1$, l'opérateur $\mathcal{P}_{|u\rangle} \equiv |u\rangle\langle u|$ est un projecteur orthogonal :

- $\mathcal{P}_{|u\rangle} \circ \mathcal{P}_{|u\rangle} = (|u\rangle\langle u|)(|u\rangle\langle u|) = |u\rangle \underbrace{\langle u|u\rangle}_{=\|\mathbf{u}\|^2=1} \langle u| = |u\rangle\langle u| = \mathcal{P}_{|u\rangle};$
- $\mathcal{P}_{|u\rangle}^\dagger = (|u\rangle\langle u|)^\dagger = (\langle u|)^\dagger (|u\rangle)^\dagger = |u\rangle\langle u| = \mathcal{P}_{|u\rangle}.$

Par contre, le cas d'une base orthonormale se distingue par la propriété décrite à la section suivante :

21. Par définition, $E = E_1 \oplus E_2$ si, $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{E}$, $\exists!(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

δ Relation de fermeture

On dit que des projecteurs $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ sont **orthogonaux entre eux** si leurs images sont toutes orthogonales deux à deux, i.e. $\mathfrak{S}(\mathcal{P}_i) \perp \mathfrak{S}(\mathcal{P}_j), \forall i \neq j$.

Cela entraîne notamment la commutation des projecteurs, $\mathcal{P}_i \circ \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j \circ \mathcal{P}_i$, ou encore, dans une base \mathcal{B} quelconque (y compris non orthonormale), $P_i P_j = P_j P_i$.

Si l'union des images forment une partition de l'espace²², $E = \mathfrak{S}(\mathcal{P}_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{S}(\mathcal{P}_k)$, on obtient alors une décomposition de l'identité \mathcal{J} , appelée **relation de fermeture**,

$$\mathcal{J} = \mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_k$$

où l'ordre est quelconque puisque ces opérateurs commutent.

En particulier, une base orthonormale est également caractérisée par la relation de fermeture

$$\mathcal{J} = |e_1\rangle\langle e_1| + \dots + |e_n\rangle\langle e_n|.$$

Démonstration : il faut et il suffit de démontrer que, $\forall |u\rangle \in E, \left(\sum_{i=1}^n |e_i\rangle\langle e_i|\right)|u\rangle = |u\rangle$. Par linéarité, il suffit de montrer ce résultat pour tous les vecteurs de la base. Soit donc $|e_i\rangle \in \mathcal{B}$, on a

$$\left(\sum_{j=1}^n |e_j\rangle\langle e_j|\right)|e_i\rangle = \sum_{j=1}^n |e_j\rangle \underbrace{\langle e_j|e_i\rangle}_{=\delta_{ij}} = |e_i\rangle \quad \text{C.Q.F.D.}$$

e Opérateurs nilpotents

Un opérateur \mathcal{A} est nilpotent s'il existe $m \geq 1$ tel que $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$ (où la puissance est à comprendre au sens de la composition).

Dans toute base \mathcal{B} (y compris non orthonormale), \mathcal{A} est caractérisé par $A^m = 0$.

On peut montrer que $m \leq n$ la dimension de l'espace. 0 est valeur propre, car ces opérateurs sont non inversibles et $\ker(\mathcal{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$; c'est leur seule valeur propre.

Dans une base \mathcal{B} orthonormale, les opérateurs élémentaires $\mathcal{A}_{ij} = |e_i\rangle\langle e_j|$, sont, quand $i \neq j$, des opérateurs nilpotents; ils vérifient plus précisément $(\mathcal{A}_{ij})^2 = \mathcal{O}$.

Démonstration : $\mathcal{A}_{ij} \circ \mathcal{A}_{ij} = (|e_i\rangle\langle e_j|)(|e_i\rangle\langle e_j|) = |e_i\rangle \underbrace{\langle e_j|e_i\rangle}_{=0} \langle e_j| = \mathcal{O}$.

Exemple : $A_{13} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie bien $A_{13}A_{13} = 0$.

f Opérateurs hermitiens

Les opérateurs hermitiens sont caractérisés par $\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}$. Dans une base orthogonale, ceci s'écrit simplement $A^\dagger = A$.

Une des deux propriétés fondamentales des opérateurs hermitiens est que toutes leurs valeurs propres sont réelles.

Démonstration : soit λ une valeur propre, et $|u\rangle$ un des vecteurs propres associés, on applique l'équation (39) à $|u\rangle$ et \mathcal{A} :

$$\overline{\langle u|\mathcal{A}|u\rangle} = \langle u|\mathcal{A}^\dagger|u\rangle = \langle u|\mathcal{A}|u\rangle$$

22. La définition est la généralisation de celle donnée à la note précédente.

mais, $|u\rangle$ étant vecteur propre, on peut encore l'écrire

$$\begin{aligned} & \overline{\langle u|\lambda|u\rangle} = \langle u|\lambda|u\rangle \\ \text{soit encore} & \quad \overline{\lambda\langle u|u\rangle} = \lambda\langle u|u\rangle \\ & \iff \overline{\lambda}\|u\|^2 = \lambda\|u\|^2 \\ \text{finalement} & \quad \overline{\lambda} = \lambda, \end{aligned}$$

où on peut diviser par $\|u\|^2$ car $|u\rangle \neq |0\rangle$ par définition.

L'autre propriété est liée à la diagonalisation, que nous allons rappeler maintenant.

g Opérateurs diagonalisables

Un opérateur \mathcal{A} est dit diagonalisable si et seulement s'il existe une base constituée de ses vecteurs propres. On montre alors que les espaces propres forment une partition de E , autrement dit :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les p valeurs propres distinctes de \mathcal{A} .

On peut caractériser un tel opérateur de la façon suivante : il existe une base \mathcal{B}' telle que la représentation de \mathcal{A} dans cette nouvelle base soit la matrice D diagonale. On dit que \mathcal{A} est diagonal (ou diagonalisé) dans la base \mathcal{B}' .

On a les résultats suivants :

- Les isométries sont diagonalisables (leurs valeurs propres vérifient $|\lambda| = 1$.)
- Les projecteurs sont diagonalisables.
- Les opérateurs hermitiens sont diagonalisables et **on peut choisir une base \mathcal{B}' orthonormale** pour les diagonaliser.
- Les opérateurs nilpotents sont non diagonalisables (sauf \mathcal{O} , qui est un cas très particulier, puisque c'est aussi un projecteur).
- Deux opérateurs diagonalisables qui commutent sont diagonalisables **simultanément**, c'est-à-dire sur une même base.

h Polynôme minimal

Il existe pour tout opérateur \mathcal{A} , un polynôme minimal²³ $P(X)$ tel que $P(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ (on convient que le terme constant est implicitement multiplié par \mathcal{J} dans cette dernière équation).

Le polynôme minimal est toujours un diviseur du polynôme caractéristique χ (il faut pour le démontrer vérifier que $\chi(\mathcal{A}) = 0$).

Exemples : le polynôme minimal de \mathcal{O} est X , celui de \mathcal{J} est $X - 1$, celui des autres projecteurs est $X^2 - X$, celui d'un opérateur nilpotent est X^m , celui d'une rotation d'un demi-tour est $X^2 - 1$, d'une rotation d'un tiers de tour $X^3 - 1$, etc.

Toute valeur propre λ d'un opérateur \mathcal{A} de polynôme minimal P est solution de $P(\lambda) = 0$. En effet, soit \mathbf{u} un vecteur propre y associé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}^n \mathbf{u} = \mathcal{A}^{n-1}(\mathcal{A} \mathbf{u}) = \mathcal{A}^{n-1} \lambda \mathbf{u} = \dots = \lambda^n \mathbf{u}$ et, par linéarité, $0 = P(\mathcal{A}) \mathbf{u} = P(\lambda) \mathbf{u}$.

23. plus petit au sens du plus petit degré possible

B Changements de base

1 PRINCIPES

Les objets mathématiques (**vecteurs, opérateurs, formes, scalaires**) préexistent à la base d'un espace E . Ils ne sont pas concernés par les changements de base.

Par contre, leurs représentations matricielles (autrement dit leurs composantes) dépendent de la base dans laquelle elles sont définies. Lors d'un changement de base, seules ces représentations varient.

Enfin, la **base réciproque** et la **métrique** dépendent de la base et varient lors d'un changement de base.

Selon les cas, on notera \mathcal{B} ou \mathcal{B}_E la base initiale, quelconque, et \mathcal{B}' ou \mathcal{B}_F une autre base, également quelconque.

2 LOIS DE TRANSFORMATION PAR CHANGEMENT DE BASE

a Matrice de changement de base

Soit $\mathcal{B}_E = (|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle)$ la base initiale, et $\mathcal{B}_F = (|f_1\rangle, \dots, |f_n\rangle)$ la base finale, on définira la matrice de changement de base $\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}_F$, que l'on notera α , par :

$$\boxed{(|f_1\rangle, \dots, |f_n\rangle) = (|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle) \alpha} \quad (40)$$

où l'on notera que l'on manipule des lignes formelle (chaque composante est un vecteur) et que la multiplication matricielle **se fait par la gauche**. Détaillons l'équation (40) :

$$\boxed{|f_i\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} |e_j\rangle}.$$

D'après ces relations, les colonnes de α sont les représentations des vecteurs $|f_i\rangle$ dans la base \mathcal{B}_E . Pour calculer α , il suffit d'écrire, dans leur représentation en matrices colonne, les **nouveaux** vecteurs dans la base des **anciens**.

b Changement de base inverse

Le changement (40) peut s'inverser. On notera **toujours** $\beta = \alpha^{-1}$ la matrice inverse de α . Alors β est la matrice du changement de base inverse $\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}_E$, qui s'écrit

$$\boxed{(|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle) = (|f_1\rangle, \dots, |f_n\rangle) \beta} \quad (41)$$

et, de façon détaillée :

$$\boxed{|e_i\rangle = \sum_{j=1}^n \beta_{ji} |f_j\rangle}.$$

Démonstration : On écrit

$$|e_i\rangle = \sum_{j=1}^n \beta_{ji} |f_j\rangle = \sum_{\substack{j=1..n \\ k=1..n}} \underbrace{\beta_{ji} \alpha_{kj}}_{=\alpha_{kj} \beta_{ji}} |e_k\rangle = \sum_{k=1}^n \underbrace{(\alpha\beta)_{ki}}_{=\delta_{ki}} |e_k\rangle = |e_i\rangle .$$

ce qui prouve que ce changement permet bien de revenir à la base initiale.

D'après ces relations, les colonnes de β sont les représentations des vecteurs $|e_i\rangle$ dans la base \mathcal{B}_F . Pour calculer β , il suffit d'écrire, dans leur représentation en matrices colonne, les **anciens** vecteurs dans la base des **nouveaux**.

c Transformation de la base réciproque

On adopte l'ensemble des notations du cours déjà introduites, notamment pour la base réciproque.

La base réciproque $\tilde{\mathcal{B}}_E$ devient, sous le changement de base α , $\tilde{\mathcal{B}}_F$, donnée par

$$\boxed{(|f_1^*\rangle, \dots, |f_n^*\rangle) = (|e_1^*\rangle, \dots, |e_n^*\rangle) \beta^\dagger} . \quad (42)$$

On peut le récrire formellement $|f_i^*\rangle = \sum_{j=1}^n (\beta^\dagger)_{ji} |e_j^*\rangle = \overline{\beta_{ij}} |e_j^*\rangle$.

Démonstration : vérifions (42) dans la base $\tilde{\mathcal{B}}_F$, en la supposant vraie dans \mathcal{B}_E :

$$\langle f_i^* | f_j \rangle = \sum_{k=1}^n (\beta_{ik} \langle e_k^* |) \sum_{l=1}^n (\alpha_{lj} |e_l\rangle) = \sum_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}} \beta_{ik} \alpha_{lj} \underbrace{\langle e_k^* | e_l \rangle}_{=\delta_{kl}} = (\beta\alpha)_{ij} = \delta_{ij} .$$

Le changement (42) peut s'inverser. On a

$$\boxed{(|e_1^*\rangle, \dots, |e_n^*\rangle) = (|f_1^*\rangle, \dots, |f_n^*\rangle) \alpha^\dagger} . \quad (43)$$

et, de façon détaillée :

$$\boxed{|e_i^*\rangle = \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_{ij}} |f_j^*\rangle} .$$

Démonstration : On écrit

$$|e_i^*\rangle = \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_{ij}} |f_j^*\rangle = \sum_{\substack{j=1..n \\ k=1..n}} \underbrace{\overline{\alpha_{ji} \beta_{kj}}}_{=\beta_{kj} \alpha_{ji}} |e_k^*\rangle = \sum_{k=1}^n \underbrace{(\beta\alpha)_{ki}}_{=\delta_{ki}} |e_k^*\rangle = |e_i^*\rangle \quad \text{C.Q.F.D.}$$

d Transformations des représentations matricielles

α Transformation des matrices représentant un vecteur

Soit $|u\rangle = \sum_{i=1}^n U_i^E |e_i\rangle = \sum_{i=1}^n U_i^F |f_i\rangle$ un vecteur exprimé dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F . On a :

$$U^F = \beta U^E . \quad (44)$$

Démonstration : on introduit (41) dans la décomposition de $|u\rangle$. D'où

$$|u\rangle = \sum_{i=1}^n U_i^E |e_i\rangle = \sum_{i=1}^n U_i^E \left(\sum_{j=1}^n \beta_{ji} |f_j\rangle \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \beta_{ji} U_i^E \right) |f_j\rangle$$

ce qui, par identification, donne $U_j^F = \sum_{i=1}^n \beta_{ji} U_i^E$, écriture détaillée de (44).

β Transformation des matrices représentant une forme linéaire

Soit $\langle u | = \sum_{i=1}^n \overline{U_i^{E*}} \langle e_i^* | = \sum_{i=1}^n \overline{U_i^{F*}} \langle f_i^* |$ un vecteur exprimé dans les bases duales associées à \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F . On a :

$$U^{F*\dagger} = U^{E*\dagger} \alpha \iff U^{F*} = \alpha^\dagger U^{E*} . \quad (45)$$

Démonstration : on introduit (43) dans la décomposition de $\langle u |$. D'où

$$\langle u | = \sum_{i=1}^n \overline{U_i^{E*}} \langle e_i^* | = \sum_{i=1}^n \overline{U_i^{E*}} \left(\sum_{j=1}^n \overline{\alpha_{ij}} |f_j^*\rangle \right)^\dagger = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \overline{U_i^*} \right) |f_j^*\rangle$$

ce qui, par identification, donne $\overline{U_j^{F*}} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \overline{U_i^{E*}} = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_{ji}^\dagger U_i^{E*}}$, écriture détaillée de (45).

γ Transformation des matrices représentant un opérateur

Soit un opérateur \mathcal{M} . Soit le changement de base α , $\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}_F$, on a :

$$\boxed{M^F = \beta M^E \alpha} \quad (46)$$

où M^E est la matrice de \mathcal{M} dans \mathcal{B}_E et M^F est la matrice de \mathcal{M} dans \mathcal{B}_F .

Démonstration : on a

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} M_{ij}^E |e_i\rangle \langle e_j^*| = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} M_{ij}^E \left(\sum_{k=1}^n \beta_{ki} |f_k\rangle \right) \left(\sum_{l=1}^n \alpha_{jl} \langle f_l^*| \right) \\ &= \sum_{\substack{i=k..n \\ l=1..n}} \underbrace{\left(\sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \beta_{ki} M_{ij}^E \alpha_{jl} \right)}_{=(\beta M^E \alpha)_{kl}} |f_k\rangle \langle f_l^*| = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} M_{ij}^F |f_i\rangle \langle f_j^*| \end{aligned}$$

d'où le résultat par identification. Une autre démonstration s'écrit, soit $|u\rangle \in E$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}|u\rangle &= \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} M_{ij}^E U_j^E |e_i\rangle = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} M_{ij}^E \left(\sum_{l=1}^n \alpha_{jl} U_l^F \right) \left(\sum_{k=1}^n \beta_{ki} |f_k\rangle \right) \\ &= \sum_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}} \underbrace{\left(\sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \beta_{ki} M_{ij}^E \alpha_{jl} \right)}_{=(\beta M^E \alpha)_{kl}} U_l^F |f_k\rangle = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} M_{ij}^F U_j^F |f_i\rangle \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Remarquez, quand on diagonalise un opérateur par le changement de base α , D étant la représentation diagonale, $D = M^F$, d'où la décomposition traditionnelle :

$$M^E = \alpha D \beta .$$

e Transformation d'une forme sesquilinéaire

Soit une forme sesquilinéaire \mathcal{Q} . Soit le changement de base α , $\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}_F$, on a :

$$\boxed{Q^F = \alpha^\dagger Q^E \alpha} \quad (47)$$

où Q^E est la matrice de Q dans \mathcal{B}_E et où Q^F est la matrice de Q dans \mathcal{B}_F .

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} Q_{ij}^E |e_i^*\rangle\langle e_j^*| = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} Q_{ij}^E \left(\sum_{k=1}^n \overline{\alpha_{ik}} |f_k^*\rangle \right) \left(\sum_{l=1}^n \alpha_{jl} \langle f_l^*| \right) \\ &= \sum_{\substack{i=k..n \\ l=1..n}} \underbrace{\left(\sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \overline{\alpha_{ik}} Q_{ij}^E \alpha_{jl} \right)}_{=(\alpha^\dagger Q^E \alpha)_{kl}} |f_k^*\rangle\langle f_l^*| = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} Q_{ij}^F |f_i^*\rangle\langle f_j^*| \end{aligned}$$

d'où le résultat par identification. Une autre démonstration s'écrit, soit $|u\rangle, |v\rangle \in E$,

$$\begin{aligned} \langle u|Q|v\rangle &= \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \overline{U_i^E} Q_{ij}^E V_j^E = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} Q_{ij}^E \left(\sum_{l=1}^n \overline{\alpha_{ik}} U_k^F \right) \left(\sum_{l=1}^n \alpha_{jl} V_l^E \right) \\ &= \sum_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}} \underbrace{\left(\sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \overline{\alpha_{ik}} Q_{ij}^E \alpha_{jl} \right)}_{=(\alpha^\dagger Q^E \alpha)_{kl}} \overline{U_k^F} V_l^F = \sum_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}} \overline{U_k^F} Q_{kl}^F V_l^F \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

f Transformation de la métrique

Soit le changement de base $\alpha, \mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}^F$, soit g la métrique associée à \mathcal{B}_E , on définit la métrique \tilde{g} induite dans la base \mathcal{B}_F , c'est-à-dire celle qui définit le même produit hermitien.

Soit $|u\rangle, |v\rangle \in E$, on écrit

$$\begin{aligned} \langle u|v\rangle &= U^{E\dagger} g V^E = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \overline{U_i^E} g_{ij} V_j^E = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \left(\sum_{k=1}^n \overline{\alpha_{ik}} U_k^F \right) g_{ij} \left(\sum_{l=1}^n \alpha_{jl} V_l^F \right) \\ &= \sum_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}} \overline{U_k^F} V_l^F \underbrace{\sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \overline{\alpha_{ik}} g_{ij} \alpha_{jl}}_{=(\alpha^\dagger g \alpha)_{kl}} = \sum_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}} \overline{U_k^F} \tilde{g}_{kl} V_l^F = U^{F\dagger} \tilde{g} V^F \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\tilde{g} = \alpha^\dagger g \alpha}$ par identification. Or, on peut définir g^F la métrique de la nouvelle base :

$$g_{ij}^F = \langle f_i | f_j \rangle = \left(\sum_{k=1}^n \overline{\alpha_{ki}} \langle e_k | \right) \left(\sum_{l=1}^n \alpha_{lj} |e_l\rangle \right) = \sum_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}} \overline{\alpha_{ki}} \underbrace{\langle e_k | e_l \rangle}_{=g_{kl}} \alpha_{lj} = (\alpha^\dagger g \alpha)_{ij} = \tilde{g}_{ij}$$

d'où on constate que le changement de base préserve bien la métrique hermitienne, qui se calcule dans la nouvelle base de façon standard (i.e. comme dans l'ancienne base). De plus, la loi de transformation de g est celle des formes sesquilineaires, ce qui est normal puisque g est l'expression d'une forme hilbertienne définie positive \mathfrak{G} , cf. A3g.

En prenant l'inverse de la relation (47), on trouve directement la transformation d'une métrique inverse g^{-1} ,

$$\boxed{\widetilde{g^{-1}} = \beta g^{-1} \beta^\dagger}.$$

3 PROPRIÉTÉS

a Invariants par changement de base

α Trace de la matrice représentant un opérateur

Soit un opérateur vectoriel \mathcal{A} et A^E la matrice le représentant dans la base \mathcal{B}_E . Montrons que la trace de A^E est invariante par changement de base. On a

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^E) &= \sum_{i=1}^n A_{ii}^E = \sum_{i=1}^n \langle e_i^* | \mathcal{A} | e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \langle f_j^* | \right) \mathcal{A} \left(\sum_{k=1}^n \beta_{ki} | f_k \rangle \right) \\ &= \sum_{\substack{j=1..n \\ k=1..n}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \beta_{ki} \alpha_{ij} \right)}_{=(\beta\alpha)_{kj}=\delta_{kj}} \underbrace{\langle f_j^* | \mathcal{A} | f_k \rangle}_{=A_{jk}^F} = \sum_{j=1}^n A_{jj}^F = \text{tr}(A^F) \end{aligned}$$

d'où le résultat. Par définition, la trace de l'opérateur \mathcal{A} est définie par $\text{tr}(\mathcal{A}) = \text{tr}(A)$, calculée dans n'importe quelle base.

β Déterminant de la matrice représentant un opérateur

Soit un opérateur vectoriel \mathcal{A} et A la matrice le représentant dans la base \mathcal{B} . On admettra que le déterminant de A est invariant par changement de base.

Par définition, le déterminant de l'opérateur \mathcal{A} est définie par $\det(\mathcal{A}) = \det(A)$, calculée dans n'importe quelle base.

γ Produit hermitien de deux vecteurs

Soient $|u\rangle, |v\rangle \in E$, par définition $\langle u|v\rangle$ est indépendant de la base. Il est instructif de vérifier que, calculé à l'aide des colonnes représentant ces vecteurs dans une base donnée, on trouve une quantité invariante par changement de base. Soit \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F deux bases et U^E, V^E ou U^F, V^F les représentations matricielles respectives de $|u\rangle$ et $|v\rangle$, on a

$$\langle u|v\rangle = U^{E\dagger} g V^E = (\alpha U^F)^\dagger (\beta^\dagger \tilde{g} \beta) (\alpha V^F) = U^{F\dagger} \underbrace{(\beta\alpha)^\dagger}_{=I} \underbrace{\tilde{g}(\beta\alpha)}_{=I} V^F = U^{F\dagger} \tilde{g} V^F \quad \text{C.Q.F.D.}$$

δ Opérateur en sandwich entre deux vecteurs

Soient $|u\rangle, |v\rangle \in E$ et \mathcal{A} un opérateur, par définition $\langle u|\mathcal{A}|v\rangle$ est indépendant de la base. Il est toutefois instructif de vérifier que, calculé à l'aide des matrices représentant ces objets dans une base donnée, on trouve une quantité invariante par changement de base. Soit \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F deux bases et U^E, V^E, A^E ou U^F, V^F, A^F les représentations matricielles respectives de $|u\rangle, |v\rangle$ et \mathcal{A} , on a

$$\begin{aligned} \langle u|\mathcal{A}|v\rangle &= U^{E\dagger} g A^E V^E = (\alpha U^F)^\dagger (\beta^\dagger \tilde{g} \beta) (\alpha A^F \beta) (\alpha V^F) \\ &= U^{F\dagger} \underbrace{(\beta\alpha)^\dagger}_{=I} \underbrace{\tilde{g}(\beta\alpha)}_{=I} \underbrace{A^F(\beta\alpha)}_{=I} V^F = U^{F\dagger} \tilde{g} A^F V^F \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

4 ORTHONORMALISATION

a Principe

En dimension finie, il existe toujours une base orthonormale $\mathcal{B}^\perp = \{|f_1\rangle, \dots, |f_n\rangle\}$, c'est-à-dire telle que tous les vecteurs $|f_i\rangle$ soient normés ($\|f_i\| = 1, \forall i = 1..n$) et orthogonaux entre eux ($\langle f_i | f_j \rangle = 0, \forall i, j = 1..n$).

b Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit une base quelconque $\mathcal{B} = (|e_i\rangle)_{i=1..n}$, alors, on peut construire une base orthonormée $\mathcal{B}^\perp = \{|f_1\rangle, \dots, |f_n\rangle\}$ à partir de \mathcal{B} .

- On peut supposer que \mathcal{B} est normée, c'est-à-dire que $\|e_i\| = 1 \forall i = 1..n$. Si ce n'est pas le cas, on remplace chaque \mathbf{e}_i par $\mathbf{e}'_i \equiv \mathbf{e}_i / \|\mathbf{e}_i\|$. Chaque vecteur $|e'_i\rangle$ est normé : selon (7), sa norme vaut

$$\|e'_i\| = \left\| \frac{1}{\|\mathbf{e}_i\|} \mathbf{e}_i \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{e}_i\|} \|\mathbf{e}_i\| = 1$$

Finalement, on oublie le prime et la base est normée.

- \mathcal{B} étant normée, on peut toujours choisir $|f_1\rangle = |e_1\rangle$ (où $|e_1\rangle$ peut être choisi de façon arbitraire, parmi les vecteurs de la base \mathcal{B}).
- On notera α le changement de base $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^\perp$.
- On ne démontrera pas la suite de ce théorème, qui est du programme des années précédentes, et se trouve dans tous les bons manuels.

c Conséquences

α Expression de la métrique

Soit g la métrique définie dans la base canonique, $g_{ij} = \langle e_i | e_j \rangle$; soient $|u\rangle$ et $|v\rangle$ deux vecteurs. Dans la base \mathcal{B}^\perp , la métrique est triviale, et le produit hermitien peut donc s'exprimer simplement en fonction des composantes U_i^\perp et V_i^\perp :

$$\begin{aligned} \langle u | v \rangle &= \sum_{i=1}^n \overline{U_i^\perp} V_i^\perp \\ &= U^\dagger \beta^\dagger \beta V \end{aligned}$$

Par ailleurs, le produit hermitien s'écrit

$$\langle u | v \rangle = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \overline{U_i} g_{ij} V_j = U^\dagger g V \quad ;$$

par identification, on en déduit la formule

$$g = \beta^\dagger \beta$$

qui avait été annoncé dans la première partie.

β Caractérisation d'une métrique définie positive

À partir de l'expression $g = \beta^\dagger \beta$, on en déduit la caractérisation suivante d'une métrique définie positive :

Théorème 1. g est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont strictement positives.

Supposons ceci vrai, g étant hermitienne, elle est diagonalisable. L'existence de β se prouve dans la base qui diagonalise g ; on prend

$$\beta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_p} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, on pose $g = \beta^\dagger \beta$, soit U un vecteur propre¹ et λ sa valeur propre associée, on a

$$\begin{aligned} U^\dagger g U &= U^\dagger \lambda U = \lambda \|U\|^2 \quad \text{mais aussi} \\ &= U^\dagger \beta^\dagger \beta U = \|\beta U\|^2 > 0 \end{aligned}$$

donc $\lambda = \|\beta U\|^2 / \|u\|^2 > 0$. C.Q.F.D.

γ Expression des vecteurs de la base directe

Quand on l'exprime dans la base orthonormale, la composante j du vecteur $|e_i\rangle$ s'écrit

$$E_i^\perp]_j = \beta_{ji}.$$

où il s'agit bien des nouvelles composantes du même vecteur $|e_i\rangle$.

Démonstration : la définition du changement de base implique, d'après (41), $|e_i\rangle = \sum_{j=1}^n \beta_{ji} |f_j\rangle$; on note les représentations matricielles des vecteurs $|f_i\rangle$ par F_i . Puisque c'est une base orthonormée, on a $F_j]_i = \delta_{ij}$, d'où

$$E_j^\perp]_i = \sum_{k=1}^n \beta_{ki} F_j]_k = \sum_{k=1}^n \beta_{ki} \delta_{ik} = \beta_{ji}.$$

δ Expression des vecteurs de la base réciproque

La formule (42) peut être inversée, ce qui s'écrit ici

$$|e_i^*\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} |f_j^*\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} |f_j\rangle$$

où on utilise le fait que la base \mathcal{B}^\perp est orthonormale et vérifie donc $|f_i^*\rangle = |f_i\rangle$.

De façon analogue au calcul fait pour les vecteurs de la base directe, on en déduit que la composante j du vecteur $|e_i^*\rangle$ dans la base orthonormée s'écrit :

$$E_i^{*\perp}]_j = \alpha_{ij};$$

1. On travaille dans \mathbb{R}^n où les vecteurs **sont** les matrices colonne.

toutefois, il est important de pouvoir redémontrer directement ce résultat. Notons donc provisoirement $\tilde{\alpha}_{ij}$ la composante, la formule (12) s'écrit dans la base orthonormée (où la métrique est triviale) :

$$\begin{aligned} \langle e_i^* | e_j \rangle = \delta_{ij} &\iff \sum_k E_i^{*\perp} |_k E_j^\perp |_k = \delta_{ij} \\ &\iff \tilde{\alpha}_{ik} \beta_{kj} = \delta_{ij} \\ &\iff \tilde{\alpha} \beta = I \end{aligned}$$

ce qui implique $\tilde{\alpha} = \beta^{-1} = \alpha$.

Ceci prouve enfin l'unicité de la base réciproque.

ϵ *Volume de la cellule directe*

D'après la formule (37), on peut écrire²

$$\mathcal{V} = \left| \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} E_1^\perp |_i E_2^\perp |_j E_3^\perp |_k \right|;$$

on calcule le volume \mathcal{V} formé par les vecteurs de la base \mathcal{B} , dans cette base \mathcal{B}^\perp . On obtient

$$\mathcal{V} = \left| \det((\beta_{i1} \cdots \beta_{in})_{i=1..n}) \right| = |\det(\beta)|$$

or, comme $g = \beta^\dagger \beta$, on a $\det(g) = \det(\beta)^2$, d'où finalement la formule (29).

Quand la base est orthonormée, son volume vaut $\mathcal{V} = 1$.

ζ *Volume de la cellule réciproque*

Si on note \mathcal{V} le volume de la cellule unitaire définie par les vecteurs $|e_i\rangle$ de la base directe \mathcal{B} , celui de la cellule unitaire définie par les vecteurs $|e_i^*\rangle$ de la base réciproque $\tilde{\mathcal{B}}$ vaut $\tilde{\mathcal{V}} = 1/\mathcal{V}$.

Un calcul analogue s'applique à la cellule définie par les vecteurs $|e_i^*\rangle$. Comme leurs composantes font intervenir, cette fois-ci, la matrice α , on obtient alors

$$\tilde{\mathcal{V}} = |\det(\alpha)|$$

et, comme $\det(\alpha) = 1/\det(\beta)$, on retrouve bien $\tilde{\mathcal{V}} = 1/\mathcal{V}$.

2. Il y a une subtilité, puisqu'en fin de compte, \mathcal{B} et \mathcal{B}^\perp échangent leur rôle par rapport à la formule (37).

C Tableaux récapitulatifs

TABLE I – Résultats vrais en toute base

objet	notation
espace vectoriel	E
vecteurs	$\mathbf{v} = v\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{\equiv} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} \equiv V$
composantes base	U_i (à n dimension, il y a n composantes) $(e_i\rangle)_{i=1..n}$
espace dual	E^*
forme linéaire	$\varphi_u = \langle u \stackrel{\mathcal{B}}{\equiv} (\overline{U_1^*} \quad \dots \quad \overline{U_n^*}) \equiv U^{*\dagger}$
norme et produit scalaire produit hermitien	$\ \mathbf{u}\ = \sqrt{\langle u u\rangle}$ $\langle v u\rangle = \langle u v\rangle$
espace des opérateurs	$E \times E^*$
opérateur	$\mathcal{A} \stackrel{\mathcal{B}}{\equiv} A \equiv (A_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} = ((\mathcal{A}e_1) (\mathcal{A}e_2) \dots (\mathcal{A}e_n))$
composantes d'un opérateur sandwich	$\mathcal{A} e_i\rangle \equiv \sum_j A_{ji} e_j\rangle$ $\langle u \mathcal{A} v\rangle \equiv \langle u \mathcal{A}\mathbf{v}\rangle$
inégalité de Cauchy-Schwarz ¹ angle	$ \langle u v\rangle \leq \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ $ $\cos(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) = \frac{\langle u v\rangle}{\ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ }$
orthogonalité	$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \langle u v\rangle = 0$
parallélisme (à trois dimension)	$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow \langle u v\rangle = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ $ $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$
produit vectoriel produit mixte volume à 3 dimensions	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \det(U V W)$ $V = \det(U V W)$ défini dans \mathcal{B} orthonormale
produit tensoriel (de vecteurs)	$ u\rangle\langle v $ agit sur $ a\rangle$ selon $(u\rangle\langle v) a\rangle \equiv u\rangle\langle v a\rangle$.
Inversibilité vecteur propre et valeur propre ²	\mathcal{A} inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ $\mathcal{A} u_{\lambda\mu}\rangle = \lambda u_{\lambda\mu}\rangle$
adjoint d'un opérateur	$\langle e_i \mathcal{A}^\dagger e_j\rangle = \overline{\langle e_j \mathcal{A} e_i\rangle}$

TABLE II – Nouveaux objets

objet	définition
$g, g_{ij} = g_{ji}$	$\langle e_i e_j \rangle$
$ e_i^*\rangle$	$\langle e_i^* e_j \rangle = \delta_{ij}$
$\mathcal{V} = 1/\tilde{\mathcal{V}}$	$\sqrt{\det(g)} = 1/\sqrt{\det(g^{-1})}$

TABLE III – Rappels sur les opérateurs

nom	propriétés
projecteur	\mathcal{P} projecteur $\Leftrightarrow \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ $\Leftrightarrow P^2 = P$
projecteur orthogonal	\mathcal{P} (projecteur donné) est $\perp \Leftrightarrow \mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$ $\Leftrightarrow P^\dagger = P$ dans une base \perp
valeurs propres d'un projecteur	il a exactement deux valeurs propres 0 et 1 (sauf $\mathcal{P} = \mathcal{O}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{I}$)
opérateurs nilpotents	\mathcal{N} nilpotent $\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} \mathcal{N}^p = \mathcal{O}$ $\Leftrightarrow N^p = 0$
valeurs propres d'un nilpotent	0 est sa seule valeur propre
opérateurs hermitiens	$\mathcal{H}^\dagger = \mathcal{H}$ $\Leftrightarrow H^\dagger = H$ dans une base \perp
valeurs propres d'un hermitien	ses valeurs propres sont réelles
Isométrie	$\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}^\dagger \Leftrightarrow \forall u\rangle \in E \ \mathcal{A}\mathbf{u}\ = \ \mathbf{u}\ $ $\Leftrightarrow \forall u\rangle, v\rangle \in E \langle \mathcal{A}\mathbf{u} \mathcal{A}\mathbf{v} \rangle = \langle u v \rangle$
valeurs propres d'une isométrie	ses valeurs propres vérifient $ \lambda = 1$
opérateurs diagonalisables	les hermitiens (et <i>dans une base \perp</i>) les isométries les projecteurs
opérateurs non diagonalisables	les nilpotents (sauf \mathcal{O})
opérateurs simultanément diagonalisables ³	\mathcal{A} et \mathcal{B} sont diagonalisables <i>et</i> $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \equiv \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{O}$

1. liée à l'inégalité triangulaire $|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
2. μ dégénérescence éventuelle

TABLE IV – Résultats différents en base orthonormale et en base quelconque

formule base \perp	formule générale
$\langle u v\rangle = \sum_i \overline{U_i} V_i$	$\langle u v\rangle = \sum_{ij} \overline{U_i} g_{ij} V_j = \sum_i \overline{U_i^*} V_i = \sum_i \overline{U_i} V_i^*$
$U_i = \langle e_i u\rangle$	$U_i = \langle e_i^* u\rangle$
$A_{ij} = \langle e_i \mathcal{A} e_j\rangle$	$A_{ij} = \langle e_i^* \mathcal{A} e_j\rangle$
$A_{ij}^\dagger = \overline{A_{ji}} \Leftrightarrow A^\dagger = {}^t \overline{A}$	$A^\dagger = g^{-1} {}^t \overline{A} g$
$\mathcal{J} = \sum_i e_i\rangle\langle e_i $	$\mathcal{J} = \sum_i e_i^*\rangle\langle e_i = \sum_i e_i\rangle\langle e_i^* $
$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i \Big _{i=1..3} \stackrel{\mathbb{B}}{=} \begin{pmatrix} U_2 V_3 - U_3 V_2 \\ U_3 V_1 - U_1 V_3 \\ U_1 V_2 - U_2 V_1 \end{pmatrix}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i \Big _{i=1..3} \stackrel{\mathbb{B}}{=} \mathcal{V} \begin{pmatrix} U_2^* V_3^* - U_3^* V_2^* \\ U_3^* V_1^* - U_1^* V_3^* \\ U_1^* V_2^* - U_2^* V_1^* \end{pmatrix} \stackrel{\tilde{\mathbb{B}}}{=} \tilde{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} U_2 V_3 - U_3 V_2 \\ U_3 V_1 - U_1 V_3 \\ U_1 V_2 - U_2 V_1 \end{pmatrix}$
$ u\rangle\langle v \xrightarrow{\mathbb{B} \times \mathbb{B}} U \quad V^\dagger = (U_i V_j) \Big _{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$	$ u\rangle\langle v \xrightarrow{\mathbb{B} \times \tilde{\mathbb{B}}} U \quad V^{*\dagger} = (U_i V_j^*) \Big _{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$
$(\langle e_i)_{i=1..n}$ base canonique de E^*	$(\langle e_i^*)_{i=1..n}$ base canonique de E^*
$(e_i\rangle\langle e_j)_{i,j=1..n}$ base canonique de $E \times E^*$	$(e_i\rangle\langle e_j^*)_{i,j=1..n}$ base canonique de $E \times E^*$

TABLE V – Passage entre bases directe et réciproque

$ e_i^*\rangle = \sum_j g_{ji}^{-1} e_j\rangle$
$ e_i\rangle = \sum_j g_{ji} e_j^*\rangle$
$\tilde{\mathcal{V}} = 1/\mathcal{V}$

TABLE VI – Changements de base

formule matricielle	composante par composante
$(e'_1\rangle \cdots e'_n\rangle) = (e_1\rangle \cdots e_n\rangle)\alpha$	$ e'_i\rangle = \sum_j \alpha_{ji} e_j\rangle$
$(e_1^*\rangle \cdots e_n^*\rangle) = (e_1'^*\rangle \cdots e_n'^*\rangle)\beta^\dagger$	$ e_i^*\rangle = \sum_j \beta_{ij} e_j'^*\rangle$
$U' = \beta U$	$U'_i = \sum_j \beta_{ij} U_j$
$U^{*\dagger} = U^{*\dagger} \alpha$	$U_i'^* = \sum_j \alpha_{ji} U_j^*$
$A' = \beta A \alpha$	$A'_{ij} = \sum_{kl} \beta_{ik} \alpha_{lj} A_{kl}$
$g' = \alpha^\dagger g \alpha$	$g'_{ij} = \sum_{kl} \overline{\alpha_{ki}} \alpha_{lj} g_{kl}$

Il faut savoir que la bijection ket \leftrightarrow bra que l'on a établie n'est pas valable en dimension infinie : à tout vecteur $|u\rangle$ est bien associé une forme linéaire $\langle u|$; par contre, la réciproque n'est pas vraie, l'espace des formes linéaires (noté E^*) est plus grand (en dimension infinie) que E .

3. c'est-à-dire dans une même base

Partie II

Espace de Hilbert

A Espace de fonctions comme exemple de dimension infinie

1 FONCTIONS DE DIRAC

Les fonctions de Dirac sont des objets abstraits, des “métafonctions” qui ne sont pas des fonctions proprement définies, leur appellation correcte est *distributions* de Dirac.

Toutefois, on les emploie dans l’espace des fonctions par abus et commodité. On va en donner une définition non rigoureuse mais suffisante.¹

a Distribution de Dirac

On définit une première fonction de Dirac centrée en $x = 0$.

α Définition

On définit δ la distribution de Dirac comme une fonction nulle sauf en $x = 0$. La valeur $\delta(0)$ est infini et on a

$$\forall c > 0 \quad \int_{-c}^c \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 .$$

β Propriétés

δ est une fonction paire. De plus, soit φ une fonction continue en $x = 0$, on a la propriété fondamentale :

$$\forall c > 0 \quad \int_{-c}^c \delta(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) . \quad (48)$$

γ Autres fonctions de Dirac

Pour définir les autres fonctions de Dirac, il suffit de translater δ . Soit $a > 0$, on définit δ_a par $\delta_a(x) = \delta(x - a)$. La relation (48) s’écrit pour les fonctions δ_a :

$$\forall c > 0 \quad \int_{-c}^c \delta_a(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) \varphi(x) dx = \varphi(a) .$$

Démonstration : $\int_{-c}^c \varphi(x) \delta(x - a) dx = \int_{-c-a}^{c-a} \varphi(y + a) \delta(y) dy = \varphi(0 + a) = \varphi(a)$ en faisant le changement $y = x - a$.

1. Les distributions de Dirac sont définies comme des formes linéaires, ainsi que cela s’écrit au **D3a**. Elles seront étudiées en Math II au S6.

2 ESPACE GÉNÉRAL DE FONCTIONS

L'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est un exemple d'espace de dimension infinie. On lui préférera plutôt des espaces plus restreints comme $L^1(\mathbb{R})$ ou $C^\infty(\mathbb{R})$ qui ont des propriétés plus riches. La structure de l'espace général est particulière et mérite d'être également dévoilée.

a Fonctions continues par morceaux

α Définition

Soit x_1, \dots, x_N, N réels vérifiant $x_1 < \dots < x_N$, on peut définir une fonction continue de la variable réelle sur les intervalles $] -\infty, x_1[,]x_1, x_2[, \dots,]x_{N-1}, x_N[,]x_N, \infty[$. On dit que f est continue par morceaux.

β Décomposition

On considère une fonction $f, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continue par morceaux. Elle peut se décomposer sur la base des fonctions de Dirac, selon la formule

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta_a da \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta_a(x) da .$$

Démonstration : on a $\int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta_a(x) da = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta(x-a) da = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta(a-x) da = f(x)$ en utilisant les résultats précédents.

Cette formule s'interprète comme une décomposition de f définie en chaque point. Chaque point est une dimension séparée et la dimension de l'espace est infinie et même non dénombrable.²

Pour $x = x_i, i = 1..N$, un point de discontinuité, $\int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta_a(x) da$ n'est pas définie. Si on adopte la convention naturelle

$$\forall c > 0 \quad \int_{-c}^0 \delta(x) dx = \int_0^c \delta(x) dx = \int_{-\infty}^0 \delta(x) dx = \int_0^{\infty} \delta(x) dx = \frac{1}{2}$$

on trouve $\int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta_a(x) da = \frac{f(a^+) + f(a^-)}{2}$. Dans ce cas, la décomposition est unique.

γ Partie discontinue

Pour corriger les erreurs éventuelles en les points x_i de discontinuité, on ajoute une base de fonctions de Kronecker généralisées, $x \mapsto \delta_{a,x}$, définie par $\delta_{a,x} = 0 \forall x \neq a$ et $\delta_{a,a} = 1$.

b Cas plus général

On peut décomposer des fonctions plus générales en ajoutant une partie discrète qui s'écrit $\sum_{i \in \mathcal{J}} \alpha_i \delta_{a_i, x}$, où \mathcal{J} est dénombrable et $\alpha_i \in \mathbb{C}$ est la composante discrète sur $\delta_{a_i, x}$.

Il est impossible d'admettre une somme non dénombrable pour cette partie discrète car la séparation entre partie discrète et partie continue ne serait pas unique.

2. La base des fonctions de Dirac n'entre pas dans les catégories de bases présentées dans la section **C2b**. Par dessus le marché, elle est constituée d'objets n'appartenant pas à l'espace qu'ils engendrent. Son introduction a un intérêt pédagogique, d'autant qu'on rencontrera à nouveau des bases constituées d'objets n'appartenant pas à l'espace qu'ils engendrent.

B Intégration

1 MESURE DE LEBESGUE DANS \mathbb{R}

La mesure d'un sous-ensemble de \mathbb{R} permet de quantifier son importance relative. Elle est construite de la façon suivante :

a Mesure d'un intervalle

On définit tout d'abord la mesure de Lebesgue d'un intervalle. La mesure de l'intervalle $[a, b]$ est sa longueur $\mu([a, b]) = \mu([a, b[) = \mu(]a, b]) = \mu(]a, b[) = b - a$; il n'importe pas qu'on choisisse les bornes ouvertes ou fermées.

En particulier, on en déduit que la mesure d'un singleton $\{x_0\}$ vaut $\mu(\{x_0\}) = 0$; un point ne compte pas relativement à la droite réelle. On dit qu'un singleton est **négligeable** pour la mesure de Lebesgue.

b Ensemble négligeable

De façon générale, un ensemble est dit négligeable si sa mesure est nulle. On va étudier deux exemples très différents ci-dessous.

c Mesure d'un ensemble dénombrable

La mesure d'un ensemble dénombrable \mathcal{N} est nulle, $\mu(\mathcal{N}) = 0$, autrement dit, les ensembles dénombrables sont **négligeables** pour la mesure de Lebesgue.

Démonstration : par définition, on a $\mathcal{N} = \{x_i, i \in \mathbb{N}^*\}$, où les x_i sont les éléments de \mathcal{N} que l'on peut énumérer dans l'ordre, x_1, x_2, \dots

Soit $\varepsilon > 0$, montrons dans un premier temps que $\mu(\mathcal{N}) < \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Pour cela, on va plonger \mathcal{N} dans un ensemble plus grand, notons le \mathcal{N}_ε , construit de la façon suivante :

$\mathcal{N}_\varepsilon = \bigcup_{i=1,2,\dots,\infty} [x_i - \varepsilon^i, x_i + \varepsilon^i]$. Les intervalles $[x_i - \varepsilon^i, x_i + \varepsilon^i]$ peuvent se recouper, mais on a

$\mu(\mathcal{N}_\varepsilon) \leq \sum_i \mu([x_i - \varepsilon^i, x_i + \varepsilon^i]) = \sum_{i=1}^{\infty} 2\varepsilon^i = 2\varepsilon/(1 - \varepsilon)$. On a finalement

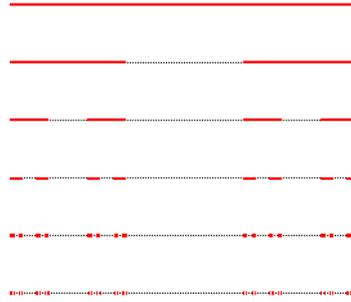
$\mu(\mathcal{N}) \leq \mu(\mathcal{N}_\varepsilon) \leq 2\varepsilon/(1 - \varepsilon)$. Comme l'inégalité est vraie $\forall \varepsilon > 0$, on peut passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, d'où $\mu(\mathcal{N}) \leq 0$, soit finalement $\mu(\mathcal{N}) = 0$.

d Ensemble de Cantor

Il existe également des ensembles **non dénombrables** et négligeables. Le plus caractéristique d'entre eux est l'ensemble de Cantor. On va définir le sous-ensemble de Cantor \mathcal{C}_1 restreint à l'intervalle $[0, 1]$.

Il existe une construction géométrique par récurrence : dans une première étape, on exclut de $[0, 1]$ l'intervalle $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$; il reste donc $[0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{3}, 1]$. Dans chaque intervalle, on réitère la même exclusion, en recalant l'origine sur sa limite inférieure et en appliquant un facteur d'échelle $1/3$:

à la deuxième étape, il y a exactement deux intervalles, on exclut donc $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ et $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ et il reste quatre composantes connexes. À la $n^{\text{ème}}$ étape, on exclut des segments du type $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$ et il reste 2^n composantes. On peut montrer qu'à l'infini, cette construction engendre un espace non dénombrable mais de mesure nulle.



Il existe également une formulation algébrique, plus aisée mais moins parlante. $\mathcal{C}_1 = \{\text{les nombres décimaux s'écrivant } 0, n_1 n_2 \dots n_i \dots \text{ en base 3 tels que } n_i = 0, 2\}$ (autrement dit, $n_i = 1$ est interdit).

e Mesure d'un sous-ensemble quelconque

On considère un sous-espace A de \mathbb{R} qui admet une décomposition en un nombre dénombrable de composantes connexes :

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} I_i \tag{49}$$

où I_i sont des intervalles disjoints.

α Ensemble mesurable

- A peut être ouvert, fermé ou quelconque.
- Il peut arriver que le nombre de composantes connexes d'un ensemble A ne soit pas dénombrable, bien qu'on puisse le mesurer. C'est le cas notamment de l'espace de Cantor \mathcal{C}_1 . Cependant, la démonstration qu'il est de mesure nulle passe par une majoration de la mesure d'un ouvert contenant $[0, 1] \setminus \mathcal{C}_1$.
- Dans le cas général, on ne peut mesurer les ensembles qui ont un nombre non dénombrable de composantes connexes. D'ailleurs, l'existence d'une telle décomposition n'est assurée qu'à l'aide du lemme de Zorn, on peut tout aussi bien considérer qu'elle n'est pas toujours assurée.
- Dans le cas où la décomposition en un nombre dénombrable de composantes connexes existe, on dit que A est un ensemble **mesurable**.

β Longueur

- La longueur d'un ensemble mesurable A est sa mesure (définie à la section **a**).
- En posant $\ell_i = \mu(I_i)$ la longueur de chaque intervalle I_i intervenant dans la formule (49), la mesure de A est donnée par

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell_i \tag{50}$$

- La mesure $\mu(A)$ peut être infinie.
- Dans ce dernier cas, pour mesurer l'importance relative de A dans \mathbb{R} , on calcule la limite

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\mu(A \cap]-L, L[)}{2L}$$

où $2L$ est la mesure de $]-L, L[$.

2 CONVERGENCE D'INTÉGRALES

Dans cette section, on ne considère que l'intégration au sens de Riemann, celle définie au sens de Lebesgue sera étudiée par la suite.

a Pôles d'une fonction quelconque

- Une singularité d'une fonction f est une valeur x_0 au voisinage de laquelle $f(x)$ diverge.
- Il n'existe pas de recensement exhaustif de toutes les singularités possibles. On étudiera le cas

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{c}{|x - x_0|^\alpha (\ln|x - x_0|)^\beta (\ln|\ln|x - x_0||)^\gamma} \quad (51)$$

où c est une constante déterminée.

- La singularité peut être très bien définie séparément à gauche et à droite. Dans ce cas, la constante c doit être remplacée par une constante c_+ ou c_- , et les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, remplacés par des coefficients $\alpha_+, \beta_+, \gamma_+, \dots$, ou $\alpha_-, \beta_-, \gamma_-, \dots$, selon que l'on observe la singularité en x_0^+ ou x_0^- .
- On peut même observer une singularité d'un côté seulement, la fonction étant réglée (en général) de l'autre côté. Dans ce cas, on posera $\alpha_+ = \beta_+ = \gamma_+ = 0$ ou $\alpha_- = \beta_- = \gamma_- = 0$ du côté où la fonction est non singulière.

b Intégrales propre et impropre

- *Stricto sensus*, l'intégrale de Riemann d'une fonction f est toujours définie avec des bornes finies, c'est-à-dire

$$\int_a^b f(x) dx \quad a < b \text{ réels.}$$

- Les intégrales avec au moins une borne infinie sont dites impropres¹ car on doit les définir par les limites :

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx ; \quad (52a)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx ; \quad (52b)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(x) dx . \quad (52c)$$

c Intégrale convergente ou divergente

Soit une intégrale $I = \int_a^b f(x) dx$. Deux types de divergences peuvent surgir, qui font tendre la valeur de l'intégrale I vers $\pm\infty$.

1. En fait, f doit être bornée sur $[a, b]$ et les intégrales convergentes découlant de l'équation (53) sont également des intégrales impropres, qu'il faut définir, en toute rigueur, par une limite.

α Critères de Riemann et de Bertrand pour les singularités

On ne s'intéresse pas ici au cas de divergence à l'infini, soit que a et b soient finis, soit que I soit convergente à l'infini.

- I peut diverger parce qu'il existe une singularité $x_0 \in [a, b]$ (on dit, par abus, un pôle) de la fonction f .
- Si la fonction f possède un comportement singulier du type (51), on peut appliquer le critère de Riemann (cas d'un vrai pôle) généralisé par Bertrand pour toute singularité :

$$\int_a^b f(x)dx \text{ est localement convergente au voisinage de } x_0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha < 1} \\ \text{ou } \alpha = 1 & \text{et } \beta > 1 \\ \text{ou } \alpha = 1 & \beta = 1 \quad \text{et } \gamma > 1 \\ \dots \end{cases} \quad (53)$$

- Au cas où le comportement de f est différent à droite et à gauche, il faut appliquer les critères de Riemann ou Bertrand séparément à droite et à gauche. Pour que I soit convergente, il faut qu'elle le soit des deux côtés.

β Critères de Riemann et de Bertrand pour les divergences à l'infini

On suppose ici que, soit $a = -\infty$, soit $b = +\infty$, soit les deux ensemble.

- On ne s'intéressera, dans ce cours, qu'au comportement d'une intégrale I à l'infini (définie au sens impropre de Riemann) d'une fonction f qui tend vers 0 quand $x \rightarrow \pm\infty$ (le signe étant celui de la borne impropre qu'on étudie).
- I peut diverger à l'infini bien que $|f(x)| \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \pm\infty$.
- Si la fonction f possède un comportement² en $\pm\infty$ donné par

$$f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{c}{|x|^\alpha (\ln|x|)^\beta (\ln|\ln|x||)^\gamma} \quad (54)$$

on peut appliquer le critère de Riemann (cas où seul $\alpha \neq 0$) généralisé par Bertrand :

$$\int_a^b f(x)dx \text{ (} a = -\infty \text{ ou } b = \infty \text{) est convergente en } \pm\infty$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha > 1} \\ \text{ou } \alpha = 1 & \text{et } \beta > 1 \\ \text{ou } \alpha = 1 & \beta = 1 \quad \text{et } \gamma > 1 \\ \dots \end{cases} \quad (55)$$

- Dans le cas $a = -\infty$ et $b = \infty$, si le comportement de la fonction est différent en $+\infty$ et en $-\infty$, il faut appliquer les critères de Riemann ou Bertrand séparément aux deux bornes. Pour que l'intégrale soit convergente, il faut qu'elle le soit en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Malgré la similitude avec le cas d'une singularité en $x = 0$, il s'agit ici d'un comportement convergent.

γ Cas général

Dans le cas général, une fonction peut admettre plusieurs singularités. Pour étudier la convergence, on recense toutes les singularités x_i , puis on étudie la convergence aux différents pôles x_i , ainsi, éventuellement, qu'en $\pm\infty$.

d Majoration d'une intégrale

- Soit une fonction f intégrable au sens de Riemann. On a, en toute généralité (a et b peuvent être $-\infty$ et ∞ , à condition que les intégrales convergent),

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx . \quad (56)$$

- Le cas d'égalité correspond, soit à une fonction f positive ou nulle sur le domaine d'intégration, c'est-à-dire telle que

$$\forall x \in]a, b[\quad f(x) \geq 0 ,$$

soit à une fonction f négative ou nulle sur le domaine d'intégration, c'est-à-dire telle que

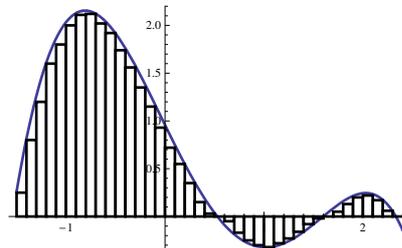
$$\forall x \in]a, b[\quad f(x) \leq 0 .$$

3 INTÉGRALE DE LEBESGUE

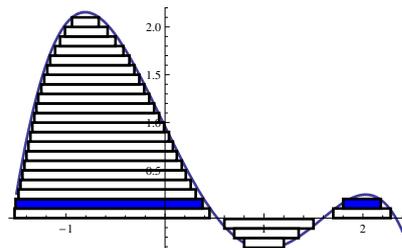
a Principe

Pour calculer l'aire I définie par une fonction réelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dispose de deux méthodes qui, bien qu'elles donnent presque toujours le même résultat, sont radicalement différentes.

Dans l'intégration de Riemann, on découpe l'aire en rectangles verticaux et la somme des aires de ces rectangles tend vers I quand leur largeur de base $\rightarrow 0$.



Dans l'intégration de Lebesgue, on découpe les aires en bandes rectangulaires horizontales (qui ne sont pas nécessairement connexes, comme celle qui est grisée par exemple). Ici encore la somme des aires de ces rectangles tend vers I quand leur hauteur tend vers 0.



Une conséquence de la construction de l'intégrale de Lebesgue est que ses bornes naturelles d'intégration sont toujours $-\infty$ et $+\infty$. On la notera, pour distinguer de l'intégrale de Riemann, $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt$. On rencontre aussi la notation³ $\int f(t) dt$.

L'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (57)$$

signifie que les intégrales de Riemann et de Lebesgue donnent la même aire.

3. Attention à ne pas confondre avec la notation abusive des primitives.

b Propriétés

α Majoration

La formule (56) est valable pour les intégrales de Lebesgue. On a par contre des formules supplémentaires, qui proviennent de la construction de Lebesgue.

β Décomposition en partie positive et négative

- Soit une fonction f intégrable au sens de Lebesgue, on peut décomposer f de façon unique en une partie positive et une partie négative, par :

$$\begin{aligned} f &= f_{>0} - f_{<0} && \text{avec} \\ f_{>0} &= \frac{f + |f|}{2} && f_{<0} = \frac{|f| - f}{2} \end{aligned}$$

et les deux fonctions $f_{>0}$ et $f_{<0}$ sont toutes deux positives ou nulles.

- L'intégrale de Lebesgue de f peut alors s'écrire

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_{>0}(x)dx}_{>0} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_{<0}(x)dx}_{>0} \quad (58)$$

où l'on sépare les aires positives et les aires négatives.

- La formule (58) est *a priori* interdite pour les intégrales de Riemann impropre. Elle provient de la construction de Lebesgue, qui au départ ne s'applique qu'aux fonctions positives, puis est étendue au cas général, justement par la formule (58).
- Cette formule permet d'établir le théorème suivant :

γ Théorème d'existence

- Soit une fonction f , elle est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si son module $|f|$ est intégrable également. Autrement dit

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(t)dt \text{ existe} \iff \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt \text{ existe}} \quad (59)$$

Démonstration : on a $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt = \int_{\mathbb{R}} f_{>0}(x)dx + \int_{\mathbb{R}} f_{<0}(x)dx$.

- Il existe une version analogue de ce théorème pour les intégrales de Riemann définies proprement sur un intervalle fini (cf. la note 1 de la partie A). Par contre, il est faux pour les intégrales dites impropres.

c Intégrale définie sur un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}

α Définition

Soit A un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R} , on définit l'intégrale de Lebesgue d'une fonction f sur A par

$$\boxed{\int_A f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A(x)f(x)dx} \quad (60)$$

où l'on a multiplié f par la fonction caractéristique de A pour annuler l'intégrale sur $\mathbb{R} \setminus A$.

β Égalité des intégrales finies de Riemann et Lebesgue

Pour le cas particulier d'un intervalle⁴ $A = [a, b]$, l'égalité entre intégrales de Riemann et de Lebesgue s'écrit, de façon symbolique,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx} \quad (61)$$

où la dernière intégrale est, par définition, $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{[a,b]}(x)f(x)dx$.

d Changement de variable

α Translation au sens de Riemann

On considère l'intégrale de Riemann

$$I = \int_a^b f(x)dx .$$

- On fait le changement de variable $x' = x + x_o$ dans l'intégrale I , où x_o est une constante réelle. On a alors

$$\boxed{dx' = dx} \quad (62a)$$

et l'intégrale devient

$$I = \int_{a+x_o}^{b+x_o} f(x - x_o)dx ;$$

il est inutile de garder le $'$ car la variable est muette (on l'a donc omis ici).

- On remarque qu'apparaît la translatée $x_o f$ dans l'intégrale.
- Les formules précédentes se généralisent aux cas de bornes infinies $a = -\infty$ ou $b = \infty$, à condition d'utiliser les règles d'addition

$$\infty + x_o = \infty \quad -\infty + x_o = -\infty .$$

β Translation au sens de Lebesgue

On considère maintenant une intégrale de Lebesgue

$$I = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx .$$

- On peut faire le changement de variable $x' = x + x_o$ dans l'intégrale I pour tout $x_o \in \mathbb{R}$. L'équation (62a) pour l'élément différentiel, que l'on a établie pour l'intégrale de Riemann, est valide ici et on a finalement

$$I = \int_{\mathbb{R}} f(x - x_o)dx$$

où on omet systématiquement les primes.

- Les formules précédentes se généralisent aux cas de bornes finies. Il suffit de multiplier f par $\mathbb{I}_{]a,b[}$, où a ou b peuvent être infinis.

Cette fonction caractéristique est modifiée quand on remplace f par $x_o f$ en $\mathbb{I}_{]a+x_o, b+x_o[}$.

4. Il n'importe pas de savoir si les bornes sont fermées ou ouvertes puisqu'une intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt$ est inchangée si on change f sur un ensemble négligeable de points.

γ *Changement d'échelle au sens de Riemann*

On considère l'intégrale de Riemann

$$I = \int_a^b f(x)dx .$$

- On peut faire le changement de variable $x' = \lambda x$ dans l'intégrale I , où λ est une constante réelle non nulle. On a alors

$$\boxed{dx' = \lambda dx} \tag{62b}$$

et l'intégrale devient

$$I = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x/\lambda)dx$$

où on a de nouveau omis le λ .

- On remarque qu'apparaît la dilatée f_λ dans l'intégrale.
- Il faut noter que, dans le cas où $\lambda < 0$, les bornes de l'intégrale sont inversées, de sorte qu'il faudrait mieux écrire alors

$$I = \frac{1}{|\lambda|} \int_{\lambda b}^{\lambda a} f(x/\lambda)dx$$

et $|\lambda| = -\lambda$ dans ce cas.

- Les formules précédentes se généralisent au cas de bornes infinies $a = -\infty$ ou $b = \infty$, à condition d'utiliser les règles de multiplication

$$\begin{array}{lll} \text{si } \lambda > 0 & \infty\lambda = \infty & -\infty\lambda = -\infty ; \\ \text{si } \lambda < 0 & \infty\lambda = -\infty & -\infty\lambda = \infty . \end{array}$$

δ *Changement d'échelle au sens de Lebesgue*

On considère maintenant une intégrale de Lebesgue

$$I = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx .$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on peut faire une inflation $x' = \lambda x$ dans l'intégrale I . La relation (62b) n'est pas valable, on écrit à la place :

$$dx' = |\lambda|dx \tag{62c}$$

et on trouve

$$I = \frac{1}{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx .$$

- Notez bien que les bornes sont inchangées, par définition.
- Pour le cas $\lambda < 0$, cela revient bien au même que par l'intégration de Riemann ; le signe de dx/dx' se compense avec celui provenant de l'inversion des bornes, dans l'intégrale de Riemann :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{+\infty}^{-\infty} f(\lambda x)\lambda dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda x)(-\lambda)dx = |\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda x)dx .$$

Ce résultat est logique puisque le signe d'une aire ne dépend pas de la façon dont on la calcule ; le facteur $|\lambda|$ ne change pas son signe, contrairement à un facteur λ , qui changerait le signe de l'aire !

ε **Cas général**

On considère seulement le cas de l'intégrale de Riemann

$$I = \int_a^b f(x)dx .$$

- Soit le changement de variable général $x' = h(x)$ (on admet que h est une bijection de $]a, b[$ vers $]h(a), h(b)[$), alors

$$\boxed{dx' = h'(x)dx} \tag{62d}$$

et l'intégrale devient

$$I = \int_{h(a)}^{h(b)} f(h^{-1}(x)) \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} dx$$

où on a de nouveau omis le $\boxed{'}.$

- Des problèmes d'inversion des bornes peuvent encore se produire. On peut montrer que cela se produit toujours en coïncidence avec un changement de signe de $h' \circ h^{-1}$.

e **Conditions d'existence**

- Il peut arriver que l'intégrale existe au sens de Lebesgue mais pas au sens de Riemann ; c'est par exemple le cas des fonctions nulles presque partout ; on peut créer d'autres exemples en ajoutant à n'importe quelle fonction intégrable une fonction nulle presque partout.
- À l'inverse, il existe des cas où seule l'intégrale de Riemann est définie (il s'agit toujours alors d'intégrale de Riemann **impropre**). Cela provient du théorème (59).
- Contre-exemple fondamental : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \pi$ est une intégrale convergente, elle est bien définie au sens des intégrales impropres de Riemann. Pour le montrer, il suffit de remarquer que c'est une série alternée de terme général tendant vers 0. Or, $\int_0^{\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ est divergente (à cause du terme en $\frac{1}{t}$). Donc, d'après le théorème (59), $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(t)}{t} dt$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue.
- L'aspect le plus paradoxal de ce contre-exemple est que l'on montre en intégrant par parties que cette intégrale est égale à $\int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$, qui, elle, est bien intégrable au sens de Lebesgue. Ceci prouve simplement que l'intégration par parties est une technique **propre à l'intégration de Riemann**.

4 MÉTRIQUES APPLICABLES AUX FONCTIONS

On considère ici les fonctions définies dans \mathbb{R} et à valeur dans \mathbb{C} , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et on cherche les normes adaptées à ces fonctions.

a **Norme** $\| \cdot \|_p$

α **Définition**

On utilisera les normes $\| \cdot \|_p$, définies par

$$\boxed{\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{63}$$

β Relation entre normes

- On peut montrer la relation

$$\|f\|_p \leq \ell^{\frac{1}{p(p+1)}} \|f\|_{p+1} \tag{64}$$

où ℓ est la longueur du support⁵ de f , donnée par la formule (50).

- Quand ℓ est infini, cette formule est inutilisable et on ne peut pas ordonner ces normes.

γ Cas particulier de la norme $\|\cdot\|_\infty$

- On définit la norme $\|\cdot\|_\infty$ correspondant à la limite $p \rightarrow \infty$ par :

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p . \tag{65}$$

- Si f est une fonction suffisamment continue, on peut montrer

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}}(f) \tag{66}$$

autrement dit, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est égale à la la norme sup des fonctions.

- Cependant, sup est définie au point près, aussi l'égalité entre $\|\cdot\|_\infty$ et la norme sup peut être violée. Voir par exemple **E1c**.

b Produit hermitien

On définit le produit hermitien entre deux fonctions f et g par

$$\langle f|g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}g(x)dx ; \tag{67}$$

toutefois, cette intégrale n'est pas définie pour tout couple de fonctions (f, g) . On verra que le seul espace muni d'un produit hermitien est L^2 .

c Intégrale de Stieltjes

On ne va pas introduire les vraies intégrales de Stieltjes $\text{int}_{\text{St}}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dm(x)$ dans le cas général mais seulement dans le cas où elles peuvent s'écrire :

$$\text{int}_{\text{St}}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)m'(x)dx \tag{68}$$

où $h \equiv m'$ est réglée. La norme $\|\cdot\|_{2h}$ et le produit hermitien $\langle f|g \rangle_h$ associés à h s'écrivent

$$\|f\|_{2h} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 h(x)dx} \quad \text{et} \quad \langle f|g \rangle_h = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}g(x)h(x)dx .$$

h joue le rôle d'une métrique ; si h est constant ($h = 1$), la métrique est plate, sinon elle ne l'est pas. La métrique est euclidienne ssi h est positive,⁶ $h \geq 0$.

5. Remarque, pour une fonction réglée par morceaux, $\text{Support}(f)$ est toujours mesurable, et ℓ est bien défini (mais peut être infini).

6. $h \geq 0$ si pour presque tout x , $h(x) \geq 0$.

C Espace $L^1(\mathbb{R})$

1 GÉNÉRALITÉS

a Définition

On note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Lebesgue, $\mathcal{L}^1 = \{f \text{ telle que } \|f\|_1 < \infty\}$.

b Norme

Par construction, $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Vérifions les relations (7) et (9) requises¹ pour une norme :

α Homogénéité

Soit f une fonction intégrable au sens de Lebesgue et $\lambda \in \mathbb{C}$. Prouvons (7) :

$$\|\lambda f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\lambda f(x)| dx = |\lambda| \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = |\lambda| \|f\|_1 .$$

β Inégalité triangulaire

Soient f et g , deux fonctions intégrables au sens de Lebesgue. Prouvons (9) :

$$\begin{aligned} \|f + g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |f(x) + g(x)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} (|f(x)| + |g(x)|) dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx = \|f\|_1 + \|g\|_1 \\ \text{et } &\geq \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} (|f(x)| - |g(x)|) dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx - \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx = \|f\|_1 - \|g\|_1 \\ \int_{\mathbb{R}} (|g(x)| - |f(x)|) dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx - \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|g\|_1 - \|f\|_1 \end{cases} \\ \text{soit } &\geq \left| \|f\|_1 - \|g\|_1 \right| . \end{aligned}$$

γ Séparabilité

Toutefois, la séparabilité de $\|\cdot\|_1$ n'est pas vérifiée. En effet, soit une fonction f nulle presque partout, sa norme est $\|f\|_1 = 0$. On va définir plus précisément les fonctions nulles presque partout et introduire la correction à ce défaut de séparabilité par la suite.

1. Ces relations ont été introduites pour une norme dérivant d'un produit hermitien mais elles s'appliquent de façon générale, comme ici à $L^1(\mathbb{R})$ qui n'est pas muni d'un tel produit. À l'inverse, (8) n'est pas applicable ici.

c Fonction nulle presque partout

On appelle fonction *nulle presque partout* (ou encore *pour presque tout* x) une fonction f telle que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = 0$. Une telle fonction n'est pas nécessairement nulle, $f \neq 0$, car il peut exister des points x_0, x_1, \dots, x_n , tels que $f(x_i) \neq 0$. L'ensemble des points x_i où la fonction f n'est pas nulle est négligeable, c'est-à-dire de mesure nulle.²

- Un exemple fondamental de fonction nulle presque partout est la fonction caractéristique d'un ensemble de mesure nulle. En effet, pour tout \mathcal{N} de mesure nulle, la fonction $\mathbb{I}_{\mathcal{N}}$ est nulle hors de \mathcal{N} ; or, dans ce cas, mesure et intégrale coïncident.
- Par exemple, soit \mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels. D'après ce qui précède, on définit fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ par $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon. Alors, $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(t) dt = 0$: la fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ est nulle presque partout.

d Classe d'équivalence de fonctions égales presque partout

α Égalité presque partout

Soit f et g deux fonctions, on définit l'*égalité presque partout*, qu'on note $f = g$ pp, par $f - g$ nulle presque partout, $f - g = 0$ pp.

- On a alors

$$\boxed{f = g \text{ pp} \implies \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) dt} . \quad (69)$$

Démonstration : d'après l'équation (56), on a

$$0 \leq \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) - g(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)| dt = 0$$

où la dernière équation est la définition de $f - g = 0$ pp.

- La réciproque est fautive ; par contre, on peut écrire

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)| dt = 0 \implies f = g \text{ pp}} .$$

β Relation d'équivalence

Soit deux fonctions f et g dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit la relation d'équivalence \mathcal{R} et on écrit $f \stackrel{\mathcal{R}}{\sim} g$ si elles sont égales presque partout.

γ Ensemble quotient

On travaillera dans l'ensemble quotient $L^1(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{L}^1/\mathcal{R}$ des classes d'équivalence des fonctions pour la relation \mathcal{R} . Plus simplement, on identifiera deux fonctions si elles sont égales presque partout.³

$L^1(\mathbb{R})$ est bien séparable pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Dans $L^1(\mathbb{R})$, quand une fonction admet une discontinuité ponctuelle, on ne distingue pas selon la valeur de la fonction au point de discontinuité. Par exemple, soit H la fonction de Heaviside, définie par $H(x) = 0 \forall x < 0$ et $H(x) = 1 \forall x \geq 0$; dans $L^1(\mathbb{R})$, la valeur exacte de $H(0)$ ne compte pas et peut être redéfinie sans rien changer.

2. Tandis que la mesure du complémentaire vaut $\mu(\mathbb{R} \setminus \{x_i\}) = \mu(\mathbb{R}) = \infty$, f étant nulle sur ce complémentaire; pour mieux comprendre, on peut restreindre la fonction à l'intervalle $\subset [0, 1]$, on a $\mu(\{x_i \in [0, 1]\}) = 0$ et $\mu([0, 1] \setminus \{x_i \in [0, 1]\}) = \mu([0, 1]) = 1$.

3. Il existe une autre stratégie, qui consiste à ne considérer que les fonctions continues. Toutefois, cela aurait nécessité un bricolage spécifique pour traiter des fonctions continues par morceaux.

e Produit hermitien

Le produit hermitien (67) n'est pas défini pour tout couple de fonctions $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$. Lorsqu'il est bien défini, c'est-à-dire lorsque l'intégrale correspondante est convergente, on pourra l'utiliser.

2 PROPRIÉTÉS

a Espace de Banach

$L^1(\mathbb{R})$ est un espace de Banach. Cela signifie qu'il contient son adhérence.

Pour le prouver, on montre que toute suite de Cauchy définie dans cet espace y converge.

α Suite de Cauchy

Une suite de Cauchy, dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$, est une suite de fonctions f_n vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \text{ tel que} \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, (m > n_\varepsilon \ \& \ n > n_\varepsilon) \implies \|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon ; \quad (70)$$

ce qui signifie que $f_m - f_n \rightarrow 0$, quand $m \rightarrow \infty$ et $n \rightarrow \infty$.

β Limite d'une suite de Cauchy

On montre (hors programme) que toute suite de Cauchy $\{f_n\}$ définie⁴ dans $L^1(\mathbb{R})$ admet une limite f définie presque pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que cette limite $f \in L^1(\mathbb{R})$.

On dit que $L^1(\mathbb{R})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_1$, c'est un espace de Banach.

b Bases

Avant d'étudier le cas particulier des bases de $L^1(\mathbb{R})$, il convient de discuter des bases en dimension infinie.

α Bases en dimension infinie

Définir une base dans un espace vectoriel de dimension infini n'est pas trivial ; il en existe deux façons : une base est certainement une collection \mathcal{B} infinie de vecteurs. Selon une première conception, tout vecteur u peut être décomposé comme une somme **finie** d'éléments de \mathcal{B} :

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \exists (c_i, b_i) \in \mathbb{C} \times \mathcal{B} \text{ pour } i = 1..n \quad u = \sum_{i=1}^n c_i b_i .$$

On dit que la base est algébrique. Selon une seconde conception, la base est dénombrable et peut s'écrire $\mathcal{B} = \{b_i, i \in \mathbb{N}^*\}$, alors la décomposition est infinie, autrement dit elle définit une suite dont u est la limite :

$$\exists c_i \in \mathbb{C} \text{ pour } i \in \mathbb{N}^* \quad u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i b_i \equiv \sum_{i=1}^{\infty} c_i b_i ;$$

4. On peut définir la suite dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, il suffit pour cela d'exhiber un représentant de la suite, qui est défini dans $L^1(\mathbb{R})$.

où on a soit écrit la limite explicitement, soit implicitement.

On prouve que les bases algébriques ne sont jamais dénombrables. Ainsi, ces deux conceptions ne sont pas compatibles. De plus, l'existence de bases algébriques n'est démontrée qu'avec l'axiome du choix, dont l'utilisation en physique est discutable. Aussi, nous étudierons seulement les espaces munis de bases dénombrables.

On notera qu'un vecteur ne peut être obtenu a priori que comme une limite, lorsqu'on le décompose dans une telle base, sauf lorsque la suite c_i devient identiquement nulle à partir d'un certain rang. Toutefois, la décomposition est unique.

β Base de Haar

Une base possible pour la décomposition d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est la base de Haar. Par la suite, nous n'utiliserons pas ces bases, qui constitue l'ingrédient essentiel de la transformée Ondelette.

On construit d'abord une base des fonctions à valeur dans $[0, 1]$. La fonction f_1 est la fonction constante : $\forall x \in [0, 1], f_1(x) = 1$. Ensuite, $\forall n > 1$, on trouve (k, l) unique, vérifiant $k \geq 0$ et $1 \leq l \leq 2^k$, tels que $n = 2^k + l$ et on définit

$$f_n(x) = \mathbb{I}_{\left[\frac{2l-2}{2^{k+1}}, \frac{2l-1}{2^{k+1}}\right]} - \mathbb{I}_{\left[\frac{2l-1}{2^{k+1}}, \frac{2l}{2^{k+1}}\right]} .$$

On peut par exemple observer que f_2 est une fonction créneau, qui vaut $f_2(x) = 1 \forall 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $f_2(x) = -1 \forall \frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Pour tout $n \geq 3$, le support de f_n est strictement inclus dans $[0, 1]$, ce qui signifie qu'il existe au moins un intervalle I de mesure non nulle, $I \subset [0, 1]$, tel que f s'annule sur I .

Pour étendre cette base à \mathbb{R} entier, on peut décomposer la droite réelle en intervalles de mesure 1 selon la procédure décrite au second item du G1d. La base est alors décrite par deux indices entiers, qui peuvent être recomposés en un indice unique selon la procédure décrite à l'item suivant de G1d.

γ Autres bases

Les bases hilbertiennes, que nous définirons dans les espaces L^2 , ne sont pas complètes dans L^1 . Toutefois, cela n'interdit pas de les utiliser au cas par cas : il arrive de façon remarquable qu'une fonction de L^1 soit décomposable dans une base (incomplète), comme dans l'exemple suivant.

On considère $g(x) = 1/\sqrt{x} \forall x \in]0, 1]$ et nulle ailleurs. On choisit la base des fonctions f_n définies⁵ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x) \forall x \in]0, 1]$ et $f_n(x) = 0$ ailleurs.

On observe que les produits hermitiens $c_n = \langle f_n | g \rangle$ sont des intégrales convergentes⁶ et on peut écrire

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

comme si g avait été dans $L^2(]0, 1[)$ alors que $\|g\|_2$ diverge.

L'intérêt d'une telle décomposition est qu'on peut utiliser le produit hermitien pour en obtenir les coefficients, c'est pour cela que les fonctions de base ont été normalisées dans $L^2(]0, 1[)$, afin d'obtenir une formule élégante.

5. C'est une base de $L^2(]0, 1[)$ qui n'engendre que des fonctions à support dans $[0, 1]$, c'est précisément ce qui nous intéresse ici. Ces fonctions sont normalisées pour la norme $\|\cdot\|_2$.

6. Elles s'expriment avec des fonctions spéciales, dites de Fresnel.

3 OPÉRATEURS LINÉAIRES

a Définition

On peut définir toute sorte d'opérateurs dans $L^1(\mathbb{R})$, qui transforment linéairement les fonctions.

α Transformations ordinaires

La translation τ , qui agit selon $f \mapsto \tau f$, avec $\tau f(x) = f(x - \tau)$ est un opérateur linéaire.

L'inflation λ , qui agit selon $f \mapsto f_\lambda$, avec $f_\lambda(x) = f(x/\lambda)$ est un opérateur linéaire.

En particulier, la transposition \checkmark , qui agit selon $f \mapsto \checkmark f$, avec $\checkmark f = f(-x)$, est une inflation de facteur $\lambda = -1$.

β Transformations définies dans un sous-ensemble de $L^1(\mathbb{R})$

La dérivation n'est pas définie pour toutes les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour les fonctions presque partout dérivables de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur $'$, qui agit selon $f \mapsto f'$.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ et tout x_o , on définit F_{x_o} définie par $F_{x_o}(x) = \int_{x_o}^x f(t)dt$. L'application $f \mapsto F_{x_o}$ est linéaire mais n'est pas un opérateur de $L^1(\mathbb{R})$, car rien n'assure que $F_{x_o} \in L^1(\mathbb{R})$. Il arrive qu'il n'existe aucun x_o tel que cela soit le cas.

Soit x_o donné, dans l'ensemble des fonctions telles que $F_{x_o} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ soit définie pour presque tout x , on définit l'opérateur primitive P_{x_o} , qui agit selon $f \mapsto F_{x_o}$.

γ Addition, produit et composition

Soit $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur "addition de g ", qui agit selon $f \mapsto f + g$, avec $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Soit $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur "multiplication par g ", qui agit selon $f \mapsto fg$, avec $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Si on généralise la multiplication pour g non bornée, l'opérateur n'est pas défini pour toutes les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$. Par exemple, $f \mapsto \chi$, avec $\chi(x) = f(x)/x$ est défini sur les fonctions f telles que $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\tilde{f}(x) = xf(x)$.

Soit $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur "convolution par g ", qui agit selon $f \mapsto f * g$, avec $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$. Noter que $f * g$ est défini⁷ pour presque tout x . On peut également définir $f * g$ pour $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Soit g une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pour toute $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on définit $f \circ g$ par $f(g(x))$ mais, selon les fonctions f et g , $f \circ g \in L^1(\mathbb{R})$ ou pas. Pour certaines fonctions g , cela est assuré : par exemple, la translation correspond au cas $g(x) = x - \tau$, l'inflation au cas $g(x) = x/\lambda$ et on peut composer ces deux cas. Pour g donnée, l'opérateur "composition par g " est défini dans l'ensemble des fonctions f telles que $f \circ g \in L^1(\mathbb{R})$.

Soit g une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pour toute $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \circ f$ est définie mais, selon les fonctions f et g , $f \circ g \in L^1(\mathbb{R})$ ou pas. Cela est assuré pour certaines fonctions g , comme celles données au cas précédent. Pour g donnée, l'opérateur "composition de g par la fonction" est défini dans l'ensemble des fonctions f telles que $g \circ f \in L^1(\mathbb{R})$.

7. $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t)dxdt$ existe grâce au théorème de Fubini, on fait le changement de variable $(x, t) \rightarrow (x', t') = (x + t, t)$, dont le Jacobien s'écrit $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial t'} \\ \frac{\partial t}{\partial x'} & \frac{\partial t}{\partial t'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ d'où $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(t)dxdt = \int_{\mathbb{R}^2} f(x' - t')g(t')|J|dx'dt' = \int_{\mathbb{R}} f * g(x)dx$. Ainsi, $f * g$ est intégrable et donc définie pp.

δ *Autres transformations*

Il n'est pas possible de lister l'ensemble des transformations connues en mathématiques.

La transformation de Fourier \mathcal{F} sera définie dans $L^2(\mathbb{R})$. Elle agit sur toutes les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ selon $f \mapsto \widehat{f}$ mais on n'est pas toujours assuré de $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

La transformation de Legendre ℓ est définie dans le cours de physique statistique, elle agit sur toutes les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ selon $f \mapsto \ell(f) = f \circ (f')^{(-1)}$ mais on ne peut rien dire de l'appartenance de $\ell(f)$.

Attention, bien que ℓ soit linéaire, l'opérateur réciproque $f \mapsto f^{(-1)}$ n'est pas linéaire et n'entre pas dans cette discussion.

b Propriétés

Les propriétés des opérateurs linéaires de $L^1(\mathbb{R})$ concernent la norme des opérateurs et leur composition. Leur spectre sera étudié à part.

α *Norme des opérateurs*

La norme d'un opérateur \mathcal{O} est notée $\|\mathcal{O}\|_1$, elle est définie par

$$\|\mathcal{O}\|_1 = \sup_{f \in L^1(\mathbb{R})} \frac{\|\mathcal{O}(f)\|_1}{\|f\|_1}.$$

Les opérateurs translation, inflation, "addition d'une fonction", "multiplication par une fonction bornée" ont une norme finie. Dans le domaine réduit où elle est définie, la multiplication par une fonction non bornée n'est pas bornée (sa norme est infinie). La norme de l'opérateur dérivée est infinie, de même que $\|P_{x_0}\|_1$ dans son domaine de définition.

Dans $L^1(\mathbb{R})$, \mathcal{F} n'est pas bornée ($\|\mathcal{F}\|_1 = \infty$). Notons l'opérateur "produit de convolution par g " par $\cdot * g$. Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, la norme $\|\cdot * g\|_1$ peut être infinie ; si $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, au contraire, $\|\cdot * g\|_1 = \|g\|_\infty$; démonstration :

$$\|f * g\|_1 = \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(t)g(x-t)dxdt \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)dt \right| \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

β *Propriétés de la norme*

La norme $\|\cdot\|_1$ vérifie la propriété de séparation, les relations d'homogénéité (7) et triangulaire (9). Les démonstrations sont identiques au cas d'un espace de dimension finie.

Comme en dimension finie, les opérateurs \mathcal{O} ayant une norme finie, $\|\mathcal{O}\|_1 = K < \infty$, sont les opérateurs continus. Par contre, on constate qu'ils ne le sont pas tous.

On observe que $\|\mathcal{J}\|_1 = 1$.

γ *Composition*

On peut composer les opérateurs de $L^1(\mathbb{R})$ de façon usuelle : Soient \mathcal{O} et \mathcal{P} deux opérateurs, $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{O} \circ \mathcal{P}(f) = \mathcal{O}(\mathcal{P}(f))$.

Quand on utilise des opérateurs \mathcal{O} et \mathcal{P} définis sur un sous-ensemble de $L^1(\mathbb{R})$, on doit éventuellement restreindre le domaine d'application de $\mathcal{O} \circ \mathcal{P}$ de façon à ce que $\mathcal{O}(\mathcal{P}(f)) \in L^1(\mathbb{R})$.

La composée des opérateur vérifie la relation (31). La démonstration est analogue au cas d'un espace de dimension finie.

c Spectre des opérateurs

La théorie spectrale des opérateurs est extrêmement riche en dimension infinie, nous n'en étudierons que quelques éléments.

α Spectre ponctuel

Les valeurs propres des opérateurs peuvent être définies dans un espace de dimension infinie, de façon analogue à leur définition en dimension finie. On appelle spectre ponctuel d'un opérateur \mathcal{O} et on note $S_p(\mathcal{O})$ l'ensemble des nombres complexes λ tels qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathcal{O}(f) = \lambda f$. On appelle parfois les vecteurs propres f *fonctions* propres.

On définit E_λ , l'espace propre comme en dimension finie, $E_\lambda = \{f, \mathcal{O}(f) = \lambda f\}$. C'est un espace vectoriel (éventuellement de dimension infinie).

β Spectre essentiel

Il est apparu en mathématiques que le spectre ponctuel n'est pas l'ensemble le plus pertinent en dimension infinie. On définit le spectre essentiel $S(\mathcal{O})$ comme l'ensemble des nombres complexes λ tels que $\mathcal{O} - \lambda \mathcal{J}$ est non inversible⁸, ou, si $\|\mathcal{O}\|_1 < \infty$, tels que $\|(\mathcal{O} - \lambda \mathcal{J})^{-1}\|_1 = \infty$, c'est à dire que $(\mathcal{O} - \lambda \mathcal{J})^{-1}$ n'est pas continu.⁹

Cet ensemble $S(\mathcal{O})$, également appelé *spectre* ou "ensemble des valeurs spectrales", contient l'ensemble $S_p(\mathcal{O})$ des valeurs propres, $S_p(\mathcal{O}) \subset S(\mathcal{O})$.

Notons $\mathcal{D}(r, z)$ le disque complexe fermé¹⁰ de centre z et de rayon $r \geq 0$.

Si \mathcal{O} est borné (i.e. continu), on a le théorème suivant :

« le spectre est inclus dans le disque $\mathcal{D}(\|\mathcal{O}\|_1, 0)$. »

On note $\mathcal{R}(\mathcal{O}) \in \mathbb{R}_+$ et on appelle rayon spectral le plus petit nombre r tel que $\mathcal{D}(r, 0) \supset S(\mathcal{O})$. Le résultat précédent indique $\mathcal{R}(\mathcal{O}) \leq \|\mathcal{O}\|_1$. On a un résultat plus précis :

$$\mathcal{R}(\mathcal{O}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{O}^n\|_1^{1/n} = \inf_{n \geq 0} \|\mathcal{O}^n\|_1^{1/n}, \quad (71)$$

où la seconde égalité indique que la suite $\|\mathcal{O}^n\|_1^{1/n}$ est décroissante.

En particulier, $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ existe toujours, ce qui implique que $S(\mathcal{O}) \neq \emptyset$: un opérateur a toujours au moins une valeur spectrale. Mais il existe des opérateurs sans valeur propre.

4 FORMES LINÉAIRES

Il est possible de définir des formes linéaires dans tout $L^1(\mathbb{R})$: à toute fonction bornée $h \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, on associe la forme φ_h définie par :

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad f \mapsto \varphi_h(f) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)dx .$$

Si on ne choisit pas h dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, l'intégrale peut diverger et φ_h n'est pas définie pour toute les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. Ceci prouve que le dual de $L^1(\mathbb{R})$ est $L^\infty(\mathbb{R})$.

8. \mathcal{J} est l'identité de $L^1(\mathbb{R})$.

9. En effet, un théorème assure que, s'il existe, l'inverse d'un opérateur continu est continu.

10. Contenant son bord, en l'occurrence le cercle $\mathcal{C}(r, z)$.

D Espace $L^2(\mathbb{R})$

1 GÉNÉRALITÉS

a Définition

On note \mathcal{L}^2 l'ensemble des fonctions de carré sommable¹ au sens de Lebesgue, $\mathcal{L}^2 = \{f \text{ telle que } \|f\|_2 < \infty\}$.

b Produit hermitien et norme

α *Produit hermitien*

L'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est muni du produit hermitien défini par (67).

β *Norme*

L'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$. C'est une norme *euclidienne* car elle est associée au produit hermitien : soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on a

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f \rangle}.$$

γ *Homogénéité et inégalité triangulaire*

$\|\cdot\|_2$ vérifie bien les relations d'homogénéité (7) et l'inégalité triangulaire (9). Les démonstrations sont identiques au cas de l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

δ *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

La formule de Cauchy-Schwarz (8) est vérifiée et s'écrit

$$\forall (f, g) \in L^2 \times L^2 \quad \boxed{\langle f|g \rangle \leq \|f\|_2 \|g\|_2} \quad (72)$$

En conséquence, on a le théorème suivant : si $(f, g) \in L^2 \times L^2$, alors $\langle f|g \rangle$ existe.

ϵ *Séparabilité*

Toutefois, la séparabilité de $\|\cdot\|_2$ n'est pas vérifiée. En effet, soit une fonction f nulle presque partout, sa norme est $\|f\|_2 = 0$. On résout ce problème en passant à l'ensemble quotient comme dans \mathcal{L}^1 .

1. C'est un synonyme de *intégrable* que l'on emploie ici par habitude.

c Définition de $L^2(\mathbb{R})$

On travaillera dans l'ensemble quotient $L^2(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{L}^2/\mathcal{R}$ des classes d'équivalence des fonctions pour la relation \mathcal{R} . $L^2(\mathbb{R})$ est bien séparable pour la norme $\|\cdot\|_2$.

2 PROPRIÉTÉS

a Espace de Banach

$L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Banach. Cela signifie qu'il contient son adhérence.

Pour le prouver, on montre que toute suite de Cauchy définie dans cet espace y converge. Les suites de Cauchy de $L^2(\mathbb{R})$ sont définies comme celle définies dans $L^1(\mathbb{R})$ mais avec la norme $\|\cdot\|_2$.

α Limite d'une suite de Cauchy

On montre (hors programme) que toute suite de Cauchy $\{f_n\}$ définie² dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ admet une limite f définie presque pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que cette limite $f \in L^2(\mathbb{R})$.

β Complétude

On dit que $L^2(\mathbb{R})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_2$, c'est un espace de Banach.

b Structure hilbertienne

La base de Haar, qui a été introduite dans $L^1(\mathbb{R})$, est aussi une base de $L^2(\mathbb{R})$. Cependant, nous ne l'utiliserons pas car, grâce au produit hermitien, $L^2(\mathbb{R})$ est muni d'une structure hilbertienne, beaucoup plus puissante et facile d'utilisation.

α Espace de Hilbert

$L^2(\mathbb{R})$ est muni d'un produit hermitien, sa norme est euclidienne et on peut y généraliser le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et construire, à partir d'une base dénombrable quelconque, une base orthonormée. C'est un *espace de Hilbert*.

β Bases hilbertienne

On se place ainsi directement dans la généralisation d'une métrique plate et euclidienne et on ne considère, dans $L^2(\mathbb{R})$, que les bases dénombrables orthonormées. Une telle base s'écrit $\{f_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}^*\}$, avec

$$\forall m \neq n \quad \langle f_m | f_n \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|f_n\|_2 = 1 .$$

γ Cas d'une métrique euclidienne non plate

On peut généraliser la construction de bases hilbertiennes en la généralisant pour la norme de Stieltjes $\|\cdot\|_{2h}$ quand h n'est pas constante. On étudiera seulement le cas (euclidien) " $h \geq 0$ et $h(x) = 0$ pour un nombre négligeable de points". La relation d'orthonormalisation entre fonctions de la base s'écrit $\langle f_m | f_n \rangle_h = 0 \quad \forall m \neq n$ et la relation de normalisation $\|f_n\|_{2h} = 1$.

2. On peut définir la suite dans $L^2(\mathbb{R})$, il suffit pour cela d'exhiber un représentant de la suite, qui est défini dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

L'espace des fonctions muni de la norme $\|\cdot\|_{2h}$ n'est pas $L^2(\mathbb{R})$. Plutôt que de redéfinir un espace approprié, on utilisera une condition modifiée $f/\sqrt{h} \in L^2(\mathbb{R})$. En un point x_0 où $h(x_0)$ s'annule, on peut avoir une divergence $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)/\sqrt{h(x)}$ à droite ($x \rightarrow x_0^+$) ou à gauche ($x \rightarrow x_0^-$) mais elle est sans influence sur l'intégrabilité éventuelle de f/\sqrt{h} .

δ Décomposition d'une fonction

Toute fonction $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ peut être décomposée de façon unique dans une base hilbertienne $\{f_n\}$ pour la métrique généralisée de Stieltjes $\|\cdot\|_{2h}$, avec $h \geq 0$ réglée, $h \neq 0$ pp. On a alors

$$\text{pour presque tout } x \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n | g \rangle_h f_n(x). \quad (73)$$

Cette formule est valide dans le cas particulier de la norme $\|\cdot\|_2$ ($h = 1$). Notez que la convergence n'est pas garantie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c Convergence

Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$, soit une base hilbertienne $\{f_n, n \in \mathbb{N}^*\}$, on note $a_n = \langle f | f_n \rangle$ les composantes de g dans cette base. On va étudier la convergence des suites associées aux composantes.

α Série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$

La suite $s_n(x) \equiv \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$ est convergente et sa limite est donnée par (73), i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = g(x)$ presque pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut caractériser la convergence de cette suite de façon plus précise. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - g\|_2 = 0,$$

on dit que s_n converge au sens de $L^2(\mathbb{R})$.

β Série des normes

Une conséquence du résultat précédent est que la série converge en norme au sens de L^2 . Comme par définition $\|f_n\|_2 = 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$, cela s'écrit

$$\|g\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}. \quad (74)$$

Plus précisément, le carré de la norme du reste, soit $\|g - s_n\|_2^2$ est égale au reste des carrés des normes, $\|g\|_2^2 - \|s_n\|_2^2$ et tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

γ Cas des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$

On rappelle qu'il existe des fonctions $g \in L^1(\mathbb{R}) \setminus L^2(\mathbb{R})$, telle que $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, sans pouvoir le justifier.

La convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ est exclus, car L^2 étant complet, la suite aurait une limite $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$ nécessairement différente de g .

On définit s_n comme pour $g \in L^2(\mathbb{R})$. Bien que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = g$, cette convergence **ne peut pas être au sens de $L^2(\mathbb{R})$** , sinon la série de terme $|a_n|^2$ convergerait, ce qui vient d'être exclus. Est-ce que s_n converge au sens de $L^1(\mathbb{R})$? cela peut être le cas, comme ne pas l'être, il y a des exemples des deux situations.

3 FORMES LINÉAIRES

a Exemples

On peut définir de nombreuses formes linéaires dans $L^2(\mathbb{R})$.

Par exemple, à tout $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on peut associer la forme linéaire φ_g définie par

$$\forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \quad f \mapsto \varphi_g(f) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx .$$

Si on essaye de définir d'autres formes linéaires, par exemple la distribution de Dirac δ_{x_0} , définie par $f \mapsto f(x_0)$, on tombe sur un écueil : δ_{x_0} n'est pas définie dans tout $L^2(\mathbb{R})$. Par exemple, soit f définie par $f(x) = 1/|x|^{1/4} \forall x \in [-1, 1]$ et $f(x) = 0$ ailleurs, alors $\delta_0(f)$ diverge et n'est pas bien définie bien que $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Cela résulte de la structure de Hilbert, on a le résultat fondamental suivant.

b Théorème de représentation de Riesz

Les espaces de Hilbert vérifie le théorème de représentation : soit $\varphi \in (L^2(\mathbb{R}))^*$ une forme linéaire de $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$, alors il existe $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \varphi_f$, c'est à dire, $\forall g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \varphi(g) = \langle f|g \rangle$.

Cela prouve qu'il y a bijection entre $L^2(\mathbb{R})$ et $(L^2(\mathbb{R}))^*$ comme dans les espaces de dimension finie. C'est faux dans les espaces de Banach qui ne sont pas des espaces de Hilbert, comme $L^1(\mathbb{R})$.

4 OPÉRATEURS LINÉAIRES

a Définition

Tous les opérateurs définis dans la section concernant $L^1(\mathbb{R})$ sont définis dans $L^2(\mathbb{R})$. Il n'y a pas lieu de redéfinir la translation, l'inflation, la transposition, la dérivation et la primitive P_{x_0} .

α Addition, produit et composition

Soit $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur "addition de g ", $f \mapsto f + g$.

La définition de la multiplication par une fonction bornée est identique à celle donnée dans $L^1(\mathbb{R})$, y compris si on utilise une métrique non plate avec $h > 0, h \neq 0$ pp. La multiplication par une fonction g non bornée nécessite une restriction analogue : il faut s'assurer que $fg \in L^2(\mathbb{R})$. Si on travaille avec $h > 0, h \neq 0$ pp, la condition devient $fg/\sqrt{h} \in L^2(\mathbb{R})$.

Soit $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur "convolution par g ", $f \mapsto f * g$. Noter que $f * g$ est défini³ pour presque tout x .

Soit g une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pour toute $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $f \circ g$ est définie mais, selon les fonctions f et g , $f \circ g \in L^2(\mathbb{R})$ ou pas. Cela est assuré pour les fonctions g données dans la section concernant $L^1(\mathbb{R})$. Pour g donnée, l'opérateur "composition par g " est défini dans l'ensemble des fonctions f telles que $f \circ g \in L^2(\mathbb{R})$.

Soit g une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pour toute $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $g \circ f$ est définie mais, selon les fonctions f et g , $f \circ g \in L^2(\mathbb{R})$ ou pas. Cela est assuré pour certaines fonctions g , comme celles données au cas précédent. Pour g donnée, l'opérateur "composition de g par la fonction" est défini dans l'ensemble des fonctions f telles que $g \circ f \in L^2(\mathbb{R})$.

β Autres transformations

La transformation de Fourier \mathcal{F} , $f \mapsto \hat{f}$, où \hat{f} est définie par

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi xt} dt. \quad (75a)$$

On a $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, en particulier elle est définie pour presque tout x . De plus, \mathcal{F} admet une transformation inverse, qui s'écrit

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{2i\pi xt} dt. \quad (75b)$$

\mathcal{F} admet un polynôme minimal $x^4 - 1$, ce qui signifie que ses seules valeurs propres possibles sont 1, -1 , i et $-i$. C'est cohérent avec la norme de \mathcal{F} , qui est donnée plus bas.

Il n'y a pas lieu de redéfinir la transformation de Legendre ℓ , dont la définition dans $L^2(\mathbb{R})$ est identique à celle dans $L^1(\mathbb{R})$. On ne peut rien dire de l'appartenance de $\ell(f) \forall f \in L^2(\mathbb{R})$.

b Adjoint

Comme $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, muni d'un produit hermitien, on définit l'adjoint \mathcal{O}^\dagger d'un opérateur quelconque \mathcal{O} par

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \quad \langle f | \mathcal{O}^\dagger | g \rangle = \overline{\langle g | \mathcal{O} | f \rangle}.$$

Cette définition n'est pas strictement exacte. Pour les opérateurs continus, l'expression précédente est définie pour tout couple $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ et la définition est correcte. Pour les opérateurs non bornée, on définit $\mathcal{D} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{O}(f)$ existe $\forall f \in \mathcal{D}$. Alors, l'écriture précédente est définie pour tous les objets $g \in \mathcal{D}^*$ et $\mathcal{O}^\dagger(g)$ est défini pour toutes ces fonctions g .

c Propriétés

Les propriétés des opérateurs linéaires de $L^2(\mathbb{R})$ concernent la norme des opérateurs et leur composition. Leur spectre sera étudié à part.

3. L'existence découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

α Norme des opérateurs

La norme d'un opérateur \mathcal{O} est notée $\|\mathcal{O}\|_2$, la définition est :

$$\|\mathcal{O}\|_2 = \sup_{f \in L^2(\mathbb{R})} \frac{\|\mathcal{O}(f)\|_2}{\|f\|_2}; \quad \text{ou plus généralement} \quad \|\mathcal{O}\|_2 = \sup_{f/\sqrt{h} \in L^2(\mathbb{R})} \frac{\|\mathcal{O}(f)\|_{2h}}{\|f\|_{2h}},$$

si on introduit $h \geq 0$ réglée, $h \neq 0$ pp.

Les opérateurs translation, inflation, "addition d'une fonction", "multiplication par une fonction g bornée" ont une norme finie. Dans le domaine réduit où elle est définie, la "multiplication par une fonction g non bornée" n'est pas bornée (sa norme est infinie). La norme de l'opérateur dérivée est infinie, de même que $\|P_{x_0}\|_2$ dans son domaine de définition.

Ces résultats sont valides pour la norme généralisée avec $h \neq 1$. Par contre, les résultats suivants ne sont établis que pour la norme standard, $h = 1$.

Dans $L^2(\mathbb{R})$, la norme de \mathcal{F} vaut $\|\mathcal{F}\|_2 = 1$, c'est une isométrie. Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$, notons l'opérateur "produit de convolution par g " par $\cdot * g$, sa norme vaut $\|\cdot * g\|_2 = \|g\|_2$.

β Propriétés de la norme

La norme $\|\cdot\|_2$ vérifient la propriété de séparation, les relations d'homogénéité (7) et triangulaire (9). La démonstration est analogue aux cas précédents.

Comme dans les cas précédents, les opérateurs \mathcal{O} ayant une norme finie, $\|\mathcal{O}\|_2 = K < \infty$, sont les opérateurs continus.

On observe que $\|\mathcal{J}\|_2 = 1$.

γ Composition

On peut composer les opérateurs de $L^2(\mathbb{R})$ de façon usuelle. Soient \mathcal{O} et \mathcal{P} deux opérateurs, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{O} \circ \mathcal{P}(f) = \mathcal{O}(\mathcal{P}(f))$.

Quand on utilise des opérateurs \mathcal{O} et \mathcal{P} définis sur un sous-ensemble de $L^2(\mathbb{R})$, on doit éventuellement restreindre le domaine d'application de $\mathcal{O} \circ \mathcal{P}$ de façon à ce que $\mathcal{O}(\mathcal{P}(f)) \in L^2(\mathbb{R})$.

La composée des opérateur vérifie la relation (31). La démonstration est analogue aux cas précédents.

d Spectre des opérateurs

α Spectre ponctuel

On appelle spectre ponctuel d'un opérateur \mathcal{O} et on note $S_p(\mathcal{O})$ l'ensemble des nombres complexes λ tels qu'il existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ fonction propre vérifiant $\mathcal{O}(f) = \lambda f$.

On définit E_λ , l'espace propre comme en dimension finie, $E_\lambda = \{f, \mathcal{O}(f) = \lambda f\}$. C'est un espace vectoriel (éventuellement de dimension infinie).

β Spectre essentiel

On définit le spectre essentiel $S(\mathcal{O})$ comme l'ensemble des nombres complexes λ tels que $\mathcal{O} - \lambda \mathcal{J}$ est non inversible⁴, ou, si $\|\mathcal{O}\|_2 < \infty$, tels que $\|(\mathcal{O} - \lambda \mathcal{J})^{-1}\|_2 = \infty$, c'est à dire que $(\mathcal{O} - \lambda \mathcal{J})^{-1}$ n'est pas continu.⁵

4. \mathcal{J} est l'identité de $L^2(\mathbb{R})$.

5. Comme dans $L^1(\mathbb{R})$, s'il existe, l'inverse d'un opérateur continu est continu.

Cet ensemble $S(\mathcal{O})$, également appelé *spectre* ou “ensemble des valeurs spectrales”, contient l’ensemble $S_p(\mathcal{O})$ des valeurs propres, $S_p(\mathcal{O}) \subset S(\mathcal{O})$.

Si \mathcal{O} est borné (i.e. continu), comme dans $L^1(\mathbb{R})$ le spectre est inclus dans le disque $\mathcal{D}(\|\mathcal{O}\|_2, 0)$.

Le rayon spectral $\mathcal{R}(\mathcal{O}) \in \mathbb{R}_+$ est défini comme dans $L^1(\mathbb{R})$. Le résultat précédent s’écrit $\mathcal{R}(\mathcal{O}) \leq \|\mathcal{O}\|_2$ et on a la formule (71) :

$$\mathcal{R}(\mathcal{O}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{O}^n\|_2^{1/n} = \inf_{n \geq 0} \|\mathcal{O}^n\|_2^{1/n} .$$

En particulier, $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ existe toujours, ce qui implique que $S(\mathcal{O}) \neq \emptyset$: un opérateur a toujours au moins une valeur spectrale. Mais il existe des opérateurs sans valeur propre.

e Opérateurs normaux

α Définition

Un opérateur \mathcal{O} de $L^2(\mathbb{R})$ est dit normal s’il commute avec son adjoint :

$$\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O} = \mathcal{O} \mathcal{O}^\dagger \iff [\mathcal{O}, \mathcal{O}^\dagger] = 0 . \quad (76)$$

β Rayon spectral d’un opérateur normal

Le rayon spectral d’un opérateur \mathcal{O} normal vaut $\mathcal{R}(\mathcal{O}) = \|\mathcal{O}\|$.

Démonstration : remarquons d’abord que $\mathcal{P} = \mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}$ est hermitien. On calcule $\|\mathcal{P}\|_2$ de deux façons.

D’une part, comme $\mathcal{P}\mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger \mathcal{P}$, on applique⁶ la formule (34), ce qui s’écrit $\|\mathcal{P}\mathcal{P}\|_2 = \|\mathcal{P}\|_2^2$. D’après la définition de \mathcal{P} , on peut également appliquer (34) à $\|\mathcal{O}\|_2$, ce qui s’écrit $\|\mathcal{P}\|_2 = \|\mathcal{O}\|_2^2$, d’où finalement $\|\mathcal{P}\mathcal{P}\|_2 = \|\mathcal{O}\|_2^4$.

Mais, par ailleurs, comme \mathcal{O} et \mathcal{O}^\dagger commutent, $\mathcal{P}\mathcal{P} = \mathcal{O}^\dagger \mathcal{O} \mathcal{O}^\dagger \mathcal{O} = (\mathcal{O}^\dagger)^2 \mathcal{O}^2$. Or, posons $\mathcal{Q} = \mathcal{O}^2$, on vérifie $\mathcal{Q}^\dagger = (\mathcal{O}^\dagger)^2$. Finalement $\mathcal{P}\mathcal{P} = \mathcal{Q}^\dagger \mathcal{Q}$ et on applique à nouveau (34), ce qui donne $\|\mathcal{P}\mathcal{P}\|_2 = \|\mathcal{O}^2\|_2^2$.

On écrit alors l’égalité de ces deux quantités, qu’on met à la puissance 1/4 : $\|\mathcal{O}^2\|_2^{1/2} = \|\mathcal{O}\|_2$. On peut réitérer cette procédure, pour prouver par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\mathcal{O}^{2^n}\|_2^{2^{-n}} = \|\mathcal{O}\|_2 .$$

Or, d’après la formule (71), la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{O}^{2^n}\|_2^{2^{-n}}$ vaut $\mathcal{R}(\mathcal{O})$. D’où le résultat annoncé.

Ce résultat est notamment valide pour les opérateurs auto-adjoints.

f Opérateurs auto-adjoints

α Définition

On définit la propriété d’un opérateur \mathcal{H} symétrique :

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \quad \langle f | \mathcal{H} | g \rangle = \overline{\langle g | \mathcal{H} | f \rangle} . \quad (77)$$

Comme discuté en b, un opérateur \mathcal{H} qui vérifie (77) n’est pas nécessairement auto-adjoint si son domaine de définition est \mathcal{D} strictement inclus dans $L^2(\mathbb{R})$. Si $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$, \mathcal{H} est auto-adjoint, sinon il est simplement symétrique.

6. La démonstration est identique au cas des espaces de dimension finie.

β Spectre d'un opérateur hermitien

Le spectre d'un opérateur auto-adjoint est réel. On ne peut rien dire des valeurs propres dans le cas général, à part le résultat suivant.

γ Espace propre d'un opérateur hermitien

Soit \mathcal{H} un opérateur hermitien. S'il existe une valeur propre λ , alors $\lambda \in \mathbb{R}$ (la démonstration est identique au cas d'un espace de dimension finie). De plus, la dimension de l'espace propre E_λ y attaché est **finie**.

δ Théorème spectral

On ne trouve pas de démonstration de ce théorème, en dehors de la sous-classe des opérateurs hermitiens dits compacts, que nous n'étudierons pas. En pratique, son utilisation dépasse de très loin le cas des opérateurs compacts. Nous en donnons l'énoncé suivant :

Pour de très nombreux opérateurs hermitiens de $L^2(\mathbb{R})$, on peut définir une base hilbertienne formée de fonctions propres de cet opérateur. Soit \mathcal{H} un tel opérateur hermitien, $\{h_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une base hilbertienne de ses fonctions propres et λ_n leur valeur propre,⁷ on a

$$\forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n \quad \text{avec} \quad a_n \equiv \langle h_n | f \rangle \in \mathbb{C} \quad (78)$$

Cette décomposition peut également se faire avec le produit hermitien $\langle \cdot | \cdot \rangle_h$ associé à une fonction $h \geq 0$ et non nulle pp, en adaptant partout les expressions.

Elle est la généralisation de la diagonalisation d'un opérateur dans un espace de dimension finie à laquelle on associe une relation de fermeture.⁸

Pour les opérateurs non bornés, il existe une version continue du théorème spectral, qui s'applique à de nombreux cas : on introduit une base continue de fonction $\varphi[p]$, où $p \in A$, A un intervalle de \mathbb{R} ,⁹ est un paramètre. Dans les exemples connus, $\forall p \in A$, $\varphi[p] \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.¹⁰ La normalisation et l'orthogonalité entre fonctions propres est remplacée par la relation dite d'*orthonormalisation au sens large*¹¹ :

$$\langle \varphi[p] | \varphi[q] \rangle = \delta_{p-q} \iff \forall f \in \mathcal{L}^2(A), \forall p \in A, \int_A \langle \varphi[p] | \varphi[q] \rangle f(q) dq = f(p) . \quad (79)$$

Cette base continue s'additionne d'une base hilbertienne dénombrable h_n définie précédemment, et le théorème spectral s'écrit finalement :

$$\forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \quad \boxed{f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n + \int_A b(p) \varphi[p] dp} \quad a_n \equiv \langle h_n | f \rangle, \quad b(p) = \langle \varphi[p] | f \rangle . \quad (80)$$

7. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}(h_n) = \lambda_n h_n$, $\|h_n\| = 1$ et $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$, $\langle h_m | h_n \rangle = 0$.

8. En dimension finie, les opérateurs sont compacts.

9. $A = [a, b]$ ou $A = [a, b[$ ou $A =]a, b]$ ou $A =]a, b[$ ou $A =] - \infty, b]$ ou $A =] - \infty, b[$ ou $A = [a, \infty[$ ou $A =]a, \infty[$ ou $A = \mathbb{R}$.

10. Vérifions que $\langle \varphi[p] | f \rangle$ existe $\forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Écrire $|\langle \varphi[p] | f \rangle| = |\int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi[p]}(x) f(x) dx| \leq \|\varphi[p]\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$ est faux car f peut appartenir à $L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$. Typiquement, $\varphi[p]$ est une fonction oscillante et $\int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi[p]}(x) f(x) dx$ converge grâce au théorème de convergence alternée. C'est une convergence au sens des intégrales de Riemann impropres et non au sens de Lebesgue. Le fait que $\varphi[p] \notin L^2(\mathbb{R})$ est essentiel : les fonctions propres dans $L^2(\mathbb{R})$ sont toujours dans la base hilbertienne dénombrable.

11. Cette relation est définie au sens des distributions et difficile à établir, notamment aux bords éventuels de A .

$\forall x \in \mathbb{R}$, l'image de f s'écrit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x) + \int_A b(p) \varphi[p](x) dp .$$

La formule de Fourier (75b) peut être interprétée comme la décomposition d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ dans la base **continue** $\varphi[t]$, définie par $\varphi[t](x) = e^{2i\pi tx}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. La base continue $\{\varphi[t]\}$ n'est pas hilbertienne mais c'est bien la base de fonctions propres d'un opérateur, en l'occurrence $-\frac{d^2}{dx^2}$, le Laplacien à une dimension.

ε Contre-exemple

L'opérateur multiplicatif \mathcal{T} , défini $\forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ par $\mathcal{T}(f) = \text{Arctan} f$, où $(\text{Arctan} f)(x) = \text{Arctan}(x)f(x)$ est borné, on a $\|\mathcal{T}\|_2 = \pi/2$.

Démonstration : d'une part, $\|\mathcal{T}(f)\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \text{Arctan}(x)^2 |f(x)|^2 dx} \leq \|\text{Arctan}\|_{\infty} \|f\|_2 = \frac{\pi}{2} \|f\|_2$ implique $\|\mathcal{T}\|_2 \leq \frac{\pi}{2}$.

D'autre part, si on choisit $f(x) = \frac{H(x-x_0)}{\sqrt{1+x^2}}$, où $H = \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}$ est la fonction de Heaviside et $x_0 > 0$, on a $\|\mathcal{T}(f)\|_2 = \sqrt{\int_{x_0}^{\infty} \frac{\text{Arctan}(x)^2}{1+x^2} dx} = \sqrt{\frac{\pi^3}{24} - \frac{\text{Arctan}(x_0)^3}{3}}$ tandis que $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x_0)}$. Pour finir, on calcule

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{\pi^3}{24} - \frac{\text{Arctan}(x_0)^3}{3}}{\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x_0)}} = \frac{\pi}{2} .$$

Or \mathcal{T} n'a aucune valeur propre : de façon générale, les opérateurs multiplicatifs non constants ne peuvent pas en avoir. Supposons par l'absurde f fonction propre de \mathcal{T} de valeur propre λ , alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T}(f)(x) = \text{Arctan}(x)f(x) = \lambda f(x)$ d'où $\lambda = \text{Arctan}(x)$, ce qui est faux car Arctan n'est pas une fonction constante.

Comme \mathcal{T} est hermitien, son spectre est réel et inclus dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mais un théorème précise que, dans ce cas d'un opérateur hermitien, les bornes ne sont pas incluses, sinon elles seraient des valeurs propres. Finalement, $S(\mathcal{T}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

5 DÉCOMPOSITION POLYNÔMIALE

On peut décomposer les fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ grâce à la base hilbertienne de nombreux opérateurs hermitiens. Nous allons étudier plus précisément des bases faisant intervenir des polynômes.

a Polynômes d'Hermite

α Définition

On considère l'opérateur linéaire $\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}$. Il admet une base hilbertienne de fonctions propres H_n de valeur propre respective $2n$. Par définition, on a donc

$$-\frac{dH_n^2}{dx^2}(x) + 2x \frac{dH_n}{dx}(x) = 2nH_n(x) .$$

Ces fonctions propres sont réelles, polynômiales et orthogonales pour le produit hermitien $\langle \rangle_{e^{-x^2}/\sqrt{\pi}}$, autrement dit, on a

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad \langle H_m | H_n \rangle_{e^{-x^2}/\sqrt{\pi}} = \int_{\mathbb{R}} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\pi}} = \delta_{mn} \quad (81)$$

β Expression

L'expression de ces polynômes normalisés est, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \frac{(-1)^n}{2^{n/2}\sqrt{n!}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i \frac{\sqrt{n!}}{2^{n/2}i!(n-2i)!} (2x)^{n-2i} \end{aligned}$$

où la première expression est utile pour démontrer (81) tandis que la seconde est le développement polynômial explicite. Ici $[x]$ est la partie entière (inférieure) de x .

On obtient également les polynômes H_n par le développement en série entière d'une fonction appelée *fonction génératrice*. Pour les polynômes d'Hermite, on peut utiliser :

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!}} t^n .$$

γ Décomposition

Toute $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ peut se décomposer selon

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n \quad \text{avec} \quad a_n = \langle H_n | f \rangle_{e^{-x^2}/\sqrt{\pi}} = \int_{\mathbb{R}} H_n(x) f(x) e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\pi}}$$

b Changements de bases

On peut formellement interpréter le passage entre une décomposition selon une base hilbertienne $\mathcal{F} = \{f_n\}$ vers une autre $\mathcal{G} = \{g_n\}$ comme un changement de base $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$. Comme les décompositions sont normalement convergentes, on peut même introduire une matrice infinie de changement de base, dont les colonnes sont les composantes des g_n dans la base \mathcal{F} .

Toutefois, si on passe d'une base hilbertienne standard à une décomposition selon une base comportant une base continue, cela n'est plus possible et il faut étudier le changement de base à partir des expressions vectorielles.

E Espace L^∞

1 GÉNÉRALITÉS

a Définition

On note L^∞ l'ensemble des fonctions bornées, $\mathcal{L}^\infty = \{f \text{ telle que } \|f\|_\infty < \infty\}$. Ce sont les fonctions pour lesquelles la norme $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie.

b Norme

Par construction, $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Cette norme s'identifie presque toujours avec la norme sup de la valeur absolue, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ pour presque toute les fonctions f (voir après un cas où elles sont différentes).

α Homogénéité et inégalité triangulaire

$\|\cdot\|_\infty$ vérifie bien les relations d'homogénéité (7) et l'inégalité triangulaire (9). Les démonstrations sont identiques au cas de l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

β Séparabilité

Toutefois, la séparabilité de $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas vérifiée. En effet, soit une fonction f nulle presque partout, sa norme est $\|f\|_\infty = 0$. On résout ce problème en passant à l'ensemble quotient comme pour \mathcal{L}^1 .

c Définition de $L^\infty(\mathbb{R})$

On travaillera dans l'ensemble quotient $L^\infty(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{L}^\infty/\mathcal{R}$ des classes d'équivalence des fonctions pour la relation \mathcal{R} . Ce sont les fonctions bornées presque partout. $L^\infty(\mathbb{R})$ est bien séparable pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

On peut montrer dans $L^\infty(\mathbb{R})$ la différence entre $\|\cdot\|_\infty$ et la norme sup. On construit deux fonctions f et g dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, qui sont égales pp, donc correspondent au même élément de $L^\infty(\mathbb{R})$:

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 2; & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

f et g ne diffèrent qu'en $x = 0$. Clairement, f est continue et $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 1$.

Par définition, $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$ tandis que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| = 2$.

On a un cas où ces normes diffèrent. Cet exemple est très artificiel et, dans les situations naturelles, cela n'arrive jamais.

2 PROPRIÉTÉS

a Espace de Banach

$L^\infty(\mathbb{R})$ est un espace de Banach. Cela signifie qu'il contient son adhérence.

Pour le prouver, on montre que toute suite de Cauchy définie dans cet espace y converge. Les suites de Cauchy de $L^\infty(\mathbb{R})$ sont définies comme celle définies dans $L^1(\mathbb{R})$ mais avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.

α Limite d'une suite de Cauchy

On montre (hors programme) que toute suite de Cauchy $\{f_n\}$ définie¹ dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ admet une limite f définie presque pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que cette limite $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

β Complétude

On dit que $L^\infty(\mathbb{R})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, c'est un espace de Banach.

3 OPÉRATEURS LINÉAIRES

a Définition

Tous les opérateurs définis dans la section concernant $L^1(\mathbb{R})$ sont définis dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Il n'y a pas lieu de redéfinir la translation, l'inflation, la transposition, la dérivation et la primitive P_{x_0} .

α Addition, produit et composition

Soit $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur "addition de g ", $f \mapsto f + g$.

Soit $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur "multiplication par g ", $f \mapsto fg$.

Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur "produit de convolution par g ".

Soit g une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pour toute $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, $f \circ g$ est définie mais, selon les fonctions f et g , $f \circ g \in L^\infty(\mathbb{R})$ ou pas. Cela est assuré pour les fonctions g données dans la section concernant $L^1(\mathbb{R})$. Pour g donnée, l'opérateur "composition par g " est défini dans l'ensemble des fonctions f telles que $f \circ g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Soit g une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pour toute $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, $g \circ f$ est définie mais, selon les fonctions f et g , $f \circ g \in L^\infty(\mathbb{R})$ ou pas. Cela est assuré pour certaines fonctions g , comme celles données au cas précédent. Pour g donnée, l'opérateur "composition de g par la fonction" est défini dans l'ensemble des fonctions f telles que $g \circ f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

β Autres transformations

La transformation de Fourier \mathcal{F} n'est pas définie dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

Il n'y a pas lieu de redéfinir la transformation de Legendre ℓ , dont la définition dans $L^\infty(\mathbb{R})$ est identique à celle dans $L^1(\mathbb{R})$. On ne peut rien dire de l'appartenance de $\ell(f)$ $\forall f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

1. On peut définir la suite dans $L^\infty(\mathbb{R})$, il suffit pour cela d'exhiber un représentant de la suite, qui est défini dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.

b Propriétés

Les propriétés des opérateurs linéaires de $L^\infty(\mathbb{R})$ concernent la norme des opérateurs et leur composition. Leur spectre sera étudié à part.

α Norme des opérateurs

La norme d'un opérateur \mathcal{O} est notée $\|\mathcal{O}\|_\infty$, la définition est :

$$\|\mathcal{O}\|_\infty = \sup_{f \in L^\infty(\mathbb{R})} \frac{\|\mathcal{O}(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}.$$

Les opérateurs translation, inflation, "addition d'une fonction", "multiplication par une fonction g " ont une norme finie. La norme de l'opérateur dérivée est infinie, de même que $\|P_{x_0}\|_\infty$ dans son domaine de définition.

Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$, notons l'opérateur "produit de convolution par g " par $\cdot * g$, sa norme vaut $\|\cdot * g\|_\infty = \|g\|_1$.

β Propriétés de la norme

La norme $\|\cdot\|_\infty$ vérifient la propriété de séparation, les relations d'homogénéité (7) et triangulaire (9). La démonstration est analogue aux cas précédents.

Comme dans les cas précédents, les opérateurs \mathcal{O} de norme finie, $\|\mathcal{O}\|_\infty = K < \infty$, sont les opérateurs continus.

On observe que $\|\mathcal{J}\|_\infty = 1$.

γ Composition

On peut composer les opérateurs de $L^\infty(\mathbb{R})$ de façon usuelle. Soient \mathcal{O} et \mathcal{P} deux opérateurs, $\forall f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{O} \circ \mathcal{P}(f) = \mathcal{O}(\mathcal{P}(f))$.

Quand on utilise des opérateurs \mathcal{O} et \mathcal{P} définis sur un sous-ensemble de $L^\infty(\mathbb{R})$, on doit éventuellement restreindre le domaine d'application de $\mathcal{O} \circ \mathcal{P}$ de façon à ce que $\mathcal{O}(\mathcal{P}(f)) \in L^\infty(\mathbb{R})$.

La composée des opérateur vérifie la relation (31). La démonstration est analogue aux cas précédents.

c Spectre des opérateurs

Il n'y a pas lieu de récrire la théorie spectrale dans $L^\infty(\mathbb{R})$, c'est exactement la même, *mutatis mutandis*, que dans $L^1(\mathbb{R})$.

4 FORMES LINÉAIRES

La situation est duale de la situation rencontrée dans $L^1(\mathbb{R})$. On ne sait définir des formes linéaires $f \mapsto \langle h|f \rangle$ définies $\forall f \in L^\infty(\mathbb{R})$ qu'à condition de choisir $h \in L^1(\mathbb{R})$.

Ceci montre que l'espace dual de $L^\infty(\mathbb{R})$ est $L^1(\mathbb{R})$. C'est la réciproque du résultat énoncé dans $L^1(\mathbb{R})$.

F Autres espaces de fonctions

1 INTRODUCTION

Les études des chapitres précédents portent sur des espaces de fonctions définies dans \mathbb{R} . Cependant, on rencontre de nombreuses fonctions définies sur des parties de \mathbb{R} , comme $\sqrt{\cdot}$ ou \ln définies dans \mathbb{R}_+ .

Dans un autre registre, les fonctions périodiques peuvent, dans une approche parcellaire, être étudiées sur une seule période, donc sur un intervalle fini.

La fermeture ou l'ouverture des bords de ces intervalles peut avoir des conséquences sur les propriétés topologiques de ces ensembles, qui se situent cependant à des niveaux trop spécifiques et que nous n'aborderons pas.

On pourrait reprendre les études déjà faites, en remplaçant partout \mathbb{R} par une partie $A \subset \mathbb{R}$. Cependant, il suffit de faire cette substitution partout dans les formules et rien de ce qui est exposé ne varie.

La motivation principale de ces études est d'expliquer les bases hilbertiennes (ou continues) sur lesquelles on peut développer les fonctions. Il a été expliqué, au chapitre concernant $L^1(\mathbb{R})$, qu'on peut éventuellement les y utiliser, au cas par cas. Mais c'est bien l'étude de $L^2(\mathbb{R})$ qui a révélé toute sa richesse et permis de définir ces développements.

Aussi, non seulement on ne va s'intéresser qu'à des ensembles du type $L^2(A)$ avec $A \subset \mathbb{R}$, mais on n'étudiera, dans ces ensembles, que les bases hilbertiennes (ou continues) qui y sont définies.

2 ESPACE DE FONCTIONS $L^2(\mathbb{R}_+)$

a Définitions et propriétés

Les définitions sont identiques au cas de $L^2(\mathbb{R})$, à ceci près que les intégrales sont toutes ici \int_0^∞ implicitement, lorsqu'on écrit $\|f\|_2$ ou $\langle f|g \rangle$ ou $\|f\|_{2h}$ ou $\langle f|g \rangle_h$.

Les propriétés sont également inchangées. En particulier, $L^2(\mathbb{R}_+)$ est un espace de Hilbert et on va rechercher les bases hilbertiennes liées à des opérateurs auto-adjoints. C'est un modèle pour tous les espaces $L^2(A)$ avec A semi-infini.

b Opérateurs linéaires

Tous les opérateurs définis dans $L^2(\mathbb{R})$ sont définis à l'identique dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, leur norme est formellement inchangée (avec la précaution sur l'interprétation de la norme des fonctions et du produit hermitien entre fonctions expliquée ci-dessus). Les développements sur les adjoints, les propriétés des opérateurs normaux et hermitiens et en particulier les propriétés spectrales sont valides dans $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Il existe cependant un opérateur important défini spécifiquement dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, c'est \mathcal{L} , la transformée de Laplace, qui s'écrit, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $f \mapsto \mathcal{L}[f]$, avec

$$\mathcal{L}[f](y) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xy} f(x) dx .$$

On observe qu'elle est définie d'une façon très similaire à la transformée de Fourier. En réalité, ces deux transformations peuvent être étendues dans \mathbb{C} et s'identifier. Par contre, on perd alors les expressions intégrales, qui sont données dans ce cours.

Aussi, malgré la ressemblance, on les traitera séparément, avec leurs spécificités propres. En particulier, la norme de \mathcal{L} est infinie dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, tandis qu'on a toujours $\|\mathcal{F}\|_2 = 1$.

c Polynômes de Laguerre

α *Hamiltonien*

On considère \mathcal{H} défini $\forall f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ par $f \mapsto \mathcal{H}[f]$, avec

$$\mathcal{H}f(x) = x \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + (1-x) \frac{df}{dx}(x) .$$

β *Solutions de l'équation aux valeurs propres*

\mathcal{H} admet deux types de fonctions propres, une base dénombrable constituée des polynômes de Laguerre L_n , $n \in \mathbb{N}$, de valeur propre $-n$, et une base continue¹ constituée des fonctions hypergéométriques confluentes logarithmiques $x \mapsto U(\eta, 1, x)$, de valeur propre $\eta \in \mathbb{R}^+$ et qu'on notera U_η^1 .

Mathématiquement, l'équation différentielle $\mathcal{H}\varphi = e\varphi$ admet d'autres solutions, puisqu'elle est du second ordre. Cependant, ces solutions divergent quand $x \rightarrow \infty$ et n'entrent pas dans la décomposition spectrale. Comme expliqué avant (80), les fonctions U_η^1 sont bornées (mais $\lim_{x \rightarrow \infty} U(\eta, 1, x) \neq 0 \forall \eta \in \mathbb{R}_+$).

Ces fonctions propres sont réelles et orthogonales pour le produit hermitien $\langle \cdot \rangle_{e^{-x}}$, on a, d'une part,

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad \langle L_m | L_n \rangle_{e^{-x}} = \int_{\mathbb{R}_+} L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx = \delta_{mn} \quad (82a)$$

d'autre part

$$\forall \eta, \nu \in \mathbb{R}_+, \quad \langle U_\eta^1 | U_\nu^1 \rangle_{e^{-x}} = \int_{\mathbb{R}_+} U(\eta, 1, x) U(\nu, 1, x) e^{-x} dx = \delta_{\eta-\nu} . \quad (82b)$$

On a également orthogonalité entre les deux familles :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \eta \in \mathbb{R}^+ \quad \langle L_n | U_\eta^1 \rangle_{e^{-x}} = \int_{\mathbb{R}_+} L_n(x) U(\eta, 1, x) e^{-x} dx = 0 \quad (82c)$$

Enfin, on utilise souvent une relation duale pour la base continue :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \int_{\mathbb{R}_+} U(\eta, 1, x) U(\eta, 1, y) d\eta = \delta_{x-y} . \quad (82d)$$

1. On peut considérer les polynômes de Laguerre comme des fonctions hypergéométriques confluentes $x \mapsto U(-n, 1, x)$ et, justement, pour $n \geq 0$, celles-ci ne sont "non divergentes" que pour les valeurs entières de n .

γ **Expression**

L'expression des polynômes L_n normalisés est, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{(i!)^2 (n-i)!} (-x)^i \end{aligned}$$

où la première expression est utile pour démontrer (82a) tandis que la seconde est le développement polynômial explicite. On obtient également les polynômes L_n par le développement en série entière de la fonction génératrice suivante :

$$\frac{e^{-tx/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n .$$

On ne donnera pas l'expression des fonctions U_{η}^1 .

δ **Décomposition**

Toute $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$ peut se décomposer selon

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n + \int_{\mathbb{R}_+} b(\eta) U_{\eta}^1 d\eta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_n = \langle L_n | f \rangle_{e^{-x}} = \int_{\mathbb{R}_+} L_n(x) f(x) e^{-x} dx ; \\ b(\eta) = \langle U_{\eta}^1 | f \rangle_{e^{-x}} = \int_{\mathbb{R}_+} U(\eta, 1, x) f(x) e^{-x} dx ; \end{cases}$$

d'où
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x) + \int_{\mathbb{R}_+} b(\eta) U(\eta, 1, x) d\eta .$$

d Conditions aux bords

On peut imposer des conditions aux bords applicables à l'ensemble des fonctions constituant une base. Cela est utile lorsqu'il y a dégénérescence des valeurs propres de l'opérateur.

Les fonctions propres de Laguerre ne vérifient pas de condition au bord particulière en $x = 0$ ni à l'infini. Toutefois, les polynômes de Laguerre ont une valeur $L_n(0)$ finie tandis que les fonctions hypergéométriques confluentes divergent comme $\ln(x)$, à un facteur près, au voisinage de 0^+ ; les fonctions hypergéométriques confluentes tendent vers une valeur finie quand $x \rightarrow \infty$, tandis que les polynômes divergent.

Voici les conditions aux bords les plus courantes

α **Conditions de Dirichlet**

Il s'agit de la condition $f(a) = 0$, où a est la coordonnée du bord. Cela inclut le cas $a = \pm\infty$. On peut les généraliser en $f(x) = \kappa$, une constante.

β **Conditions de Neumann**

Il s'agit de la condition $f'(a) = 0$, où a est la coordonnée du bord. On peut les généraliser en $f'(a) = \kappa$, une constante.

γ Conditions mixtes

Il s'agit de conditions du type $f'(a)/f(a) = \kappa$, une constante (ici non nulle, sinon on est dans les conditions de Neumann).

Il n'existe pas d'autres types de conditions aux bords, lorsque l'équation est du second ordre, mais on peut mixer les types selon les différents bords.

3 ESPACE FONCTIONS $L^2(] - 1, 1[)$

a Définitions et propriétés

Les définitions sont identiques au cas de $L^2(\mathbb{R})$, à ceci près que les intégrales sont toutes ici \int_{-1}^1 implicitement, lorsqu'on écrit $\|f\|_2$ ou $\langle f|g \rangle$ ou $\|f\|_{2h}$ ou $\langle f|g \rangle_h$.

Les propriétés sont également inchangées. En particulier, $L^2(] - 1, 1[)$ est un espace de Hilbert et on va rechercher les bases hilbertiennes liées à des opérateurs auto-adjoints. C'est un modèle pour tous les espaces $L^2(A)$ avec un intervalle A fini.

b Opérateurs linéaires

Tous les opérateurs définis dans $L^2(\mathbb{R})$ sont définis à l'identique dans $L^2(] - 1, 1[)$, leur norme sont formellement inchangées (avec la précaution sur l'interprétation de la norme des fonctions et du produit hermitien entre fonctions expliquée ci-dessus). Les développements sur les adjoints, les propriétés des opérateurs normaux et hermitiens et en particulier les propriétés spectrales sont valides dans $L^2(] - 1, 1[)$.

La transformée de Fourier dans $L^2(] - 1, 1[)$ est directement reliée aux coefficients des séries de Fourier d'une fonction f périodique de période 2, qui peuvent s'écrire

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-2i\pi n \frac{t}{2}} dt \quad \text{avec} \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\pi n \frac{x}{2}}. \quad (83)$$

Cette formule peut se généraliser pour une fonction de période a en remplaçant partout $/2$ par $/a$.

Par ailleurs, (83) peut également s'interpréter dans $L^2(] - 1, 1[)$ strictement : la famille $\{e^{i\pi n}, n \in \mathbb{N}\}$ constitue une base hilbertienne de cet espace, cela est lié aux bases hilbertiennes $\{\sin(\pi n), n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{\cos(\pi n), n \in \mathbb{N}\}$ de $L^2(]0, 1[)$, dont la première a été étudiée au C2bI.

On va introduire une autre base, formée ici encore de polynômes.

c Polynômes de Legendre

α Hamiltonien

On considère $\mathcal{H} = \frac{d}{dx} \left((x^2 - 1) \frac{d}{dx} \right)$ défini dans $L^2(] - 1, 1[)$. L'équation aux valeurs propres s'écrit, pour une fonction propre f et λ sa valeur propre,

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad \mathcal{H}f(x) = \frac{d}{dx} \left((x^2 - 1) \frac{df}{dx} \right) (x) = (x^2 - 1) \frac{d^2 f}{dx^2} (x) + 2x \frac{df}{dx} = \lambda f(x).$$

β Solutions de l'équation aux valeurs propres

Les solutions de l'équation précédente sont les polynômes de Legendre P_n , définis $\forall n \in \mathbb{N}$, de valeur propre $n(n+1)$. Ces fonctions propres sont réelles et orthogonales pour le produit hermitien ordinaire, on a :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad \langle P_m | P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (84)$$

γ Expression

L'expression des polynômes P_n normalisés est, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n).$$

On ne donne pas le développement explicite, qui se fait pourtant selon une formule analytique exacte, quoique d'écriture lourde. On obtient également les polynômes P_n par le développement en série entière de la fonction génératrice suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

δ Décomposition

Toute $f \in \mathcal{L}^2(]-1, 1[)$ peut se décomposer selon

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n \quad \text{avec} \quad a_n = \langle P_n | f \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx \quad \text{d'où} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x).$$

d Conditions aux bords

On peut introduire exactement les mêmes conditions aux bords que dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. Ici, elles s'appliquent en $a = -1$ ou $a = 1$. Si on considère $L^2(]μ, ν[)$, il faut les appliquer en $a = μ$ ou $a = ν$.

4 AUTRES BASES HILBERTIENNES

Les bases hilbertiennes données ne sont que quelques exemples. Il existe dans la littérature de nombreuses bases qui ne sont pas constituées de polynômes. Certaines sont des produits de polynômes et de fonctions spéciales diverses.

Ces exemples de bases ont été donnés dans les espaces naturels où elles apparaissent. Mais, elles peuvent être transcrites ailleurs, à condition de les renormer. Par exemple, toute base définie dans \mathbb{R} peut être transposée dans \mathbb{R}_+ . Attention toutefois que les conditions aux bords, si on les choisit préalablement, ne sont pas nécessairement compatibles avec la restriction des fonctions f_n de la base définie dans \mathbb{R} .

Cela s'applique pareillement si on plonge une base de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(]-1, 1[)$. Dans ce cas également, les conditions aux bords ne sont pas compatibles avec toute base. Or, elles sont très fréquentes dans ce type d'espace.

À l'inverse, il est possible de construire une base de fonctions propres de $L^2(\mathbb{R})$ à l'aide de bases définies dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, et, selon que l'on choisit des conditions supplémentaires en $x = 0$, le recollement des solutions se déduit. Ceci ne peut pas se généraliser si la base est définie uniquement dans $L^2(]-1, 1[)$.

G Appendice : notions de base

1 TOPOLOGIE DANS \mathbb{R}

a Ensembles

- \mathbb{N}^* est l'ensemble des entiers naturels, de un à l'infini, qui permet de compter les éléments de chaque ensemble.
- \mathbb{N} est le même ensemble auquel est adjoint le zéro.
- \mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs (on peut le construire comme les différences des éléments de \mathbb{N}^*). $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau (ce n'est pas un corps car seul 1 admet un inverse pour la multiplication).
- \mathbb{Q} est l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{Q} = \{\frac{r}{s}, (r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$. $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps.
- \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps complet.¹
- \mathbb{C} est l'ensemble des nombres imaginaires $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps complet intègre² et algébriquement clos.³

b Intervalle

On distinguera sur la droite réelle \mathbb{R} les intervalles $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $[a, b]$, où $a < b$, d'une part, et les intervalles $]a, \infty[$, $[a, \infty[$, $] -\infty, a]$, $] -\infty, a[$ et $\mathbb{R} =] -\infty, \infty[$, d'une autre.

- Les premiers sont des intervalles finis, les bornes sont notées avec un signe $[$ ou $]$ selon qu'elles sont incluses dans l'intervalle ou pas, selon la notation usuelle.
- Les seconds sont des intervalles infinis (on dit parfois semi-infinis sauf pour \mathbb{R} lui-même), avec la même notation pour les bornes finies de ces intervalles.
- Enfin, un singleton $\{a\}$ est un cas particulier d'intervalle fini $[a, a]$.

c Ensemble fini

- On appelle ensemble fini un ensemble de n éléments (n étant un entier naturel) $\{a_1, \dots, a_n\}$ que l'on peut énumérer de 1 à n .
- Le singleton $\{a\}$ est un cas particulier d'ensemble à 1 élément, qui permet d'engendrer tous les ensembles finis par union finie (cf. section suivante).
- Par extension, on inclut le cas particulier $n = 0$, qui correspond à l'ensemble vide.

1. Un ensemble est complet si et seulement si toute suite u_n de Cauchy, c'est à dire telle que $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} |u_m - u_n| = 0$, les deux limites $m \rightarrow \infty$ et $n \rightarrow \infty$ étant a priori indépendantes, est convergente. Intuitivement, cela signifie qu'il n'y a pas de trou dans l'ensemble.

2. Il n'y a pas de diviseur de 0, *i.e.* $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

3. Tous les polynômes sont des produits de polynômes du premier degré.

d Ensemble dénombrable

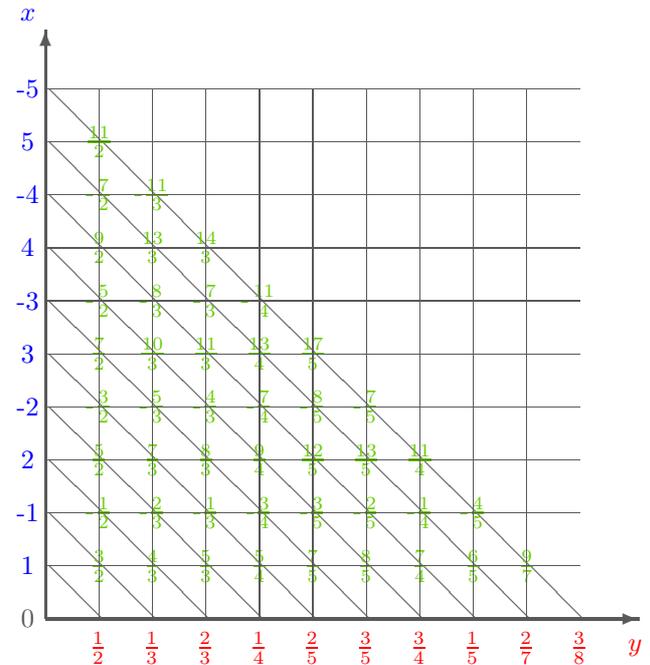
- On appelle ensemble dénombrable un ensemble infini d'éléments $\{a_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ que l'on peut énumérer par les entiers naturels > 0 .
- Dans \mathbb{R} , non seulement \mathbb{N} ou \mathbb{N}^* sont dénombrables, mais également \mathbb{Z} : un ordre naturel, bien que non canonique, s'écrit $\mathbb{Z} = \{r_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ avec $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = -1, r_4 = 2, r_5 = -2, r_6 = 3, \dots, r_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.
- L'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} est également dénombrable. Voici un ordre possible, qu'on représente dans le secteur $0xy$

(voir la figure suivante); sur l'axe *vertical en bleu* x , on représente \mathbb{Z} , selon l'ordre décrit ci-dessus; sur l'axe *horizontal en rouge* y , on écrit les rationnels irréductibles $\sigma_i \in]0, 1[$ ($i \in \mathbb{N}^*$), ordonnés en utilisant les suites de Farey.⁴

L'ensemble des rationnels s'écrit $\mathbb{Q} = \{q_i, i \in \mathbb{N}^*\}$, avec $q_i = r_j + \sigma_k$. Ce sont les sommes $x + y$, où x est l'ordonnée qu'on lit sur l'axe vertical et y est l'abscisse qu'on lit sur l'axe horizontal.

Pour les ordonner (autrement dit pour construire la relation entre i, j et k du § précédent), on lit les rationnels selon les segments de pente -1 , par ordre croissant de taille des segments, puis, pour chaque segment, de haut en bas, ce qui donne :

$q_1 = 0, q_2 = 1, q_3 = \frac{1}{2}, q_4 = -1, q_5 = \frac{3}{2}, q_6 = \frac{1}{3}, q_7 = 2, q_8 = -\frac{1}{2}, q_9 = \frac{4}{3}, q_{10} = \frac{5}{2}, q_{11} = -2, q_{12} = \frac{5}{2}, q_{13} = -\frac{2}{3}, q_{14} = \frac{7}{4}, q_{15} = \frac{1}{4}, \dots$



e Union et intersection

α Union

- L'union de deux ensembles A et B est l'ensemble $A \cup B$ des éléments appartenant à l'un *ou* à l'autre.
- On définit, de façon analogue, l'union d'un nombre *fini* d'ensembles (on écrira plus communément union *finie*).
- L'union s'étend pour un nombre *infini* (même non dénombrable) d'ensembles (on écrira plus communément union *infinie*).

4. Les suites de Farey peuvent se construire ainsi : $S_0, S_1, \dots, S_{n-1} \subset S_n, \dots$, est une suite d'ensembles finis, $S_n = \{\sigma_i^n, i = 0..2^n\}$ de cardinal $2^n + 1$; les σ_i^n sont définis par récurrence sur n : $S_0 = \{0, 1\}$; on distingue les indices pairs : $q = 0..2^n, \sigma_{2q}^{n+1} = \sigma_q^n$; et les indices impairs : $q = 1..2^n, \sigma_{2q-1}^{n+1} = \sigma_{q-1}^n \boxplus \sigma_q^n$; \boxplus est un opérateur défini dans \mathbb{Q} par $\frac{p}{q} \boxplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s}$ ($\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ irréductibles).

Pour finir, on définit $\forall n \in \mathbb{N}^* \delta S_n = S_n \setminus S_{n-1}$ de cardinal 2^{n-1} ; dans chaque ensemble δS_n , les éléments sont ordonnés du plus petit au plus grand; on trouve, pour les premiers, $\delta S_1 = \{\frac{1}{2}\}, \delta S_2 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}, \delta S_3 = \{\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}\}, \delta S_4 = \{\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{4}{5}\}, \delta S_5 = \{\frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{3}{11}, \frac{4}{10}, \frac{5}{11}, \frac{5}{13}, \frac{6}{12}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{7}{12}, \frac{8}{13}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{8}{11}, \frac{7}{9}, \frac{5}{6}\}$; $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \delta S_n$ forme une partition parfaite de $\mathbb{Q} \cap]0, 1[$, qu'on ordonne en énumérant successivement et dans l'ordre les éléments de $\delta S_1, \delta S_2, \dots, \delta S_n, \dots$

β Intersection

- L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble $A \cap B$ des éléments appartenant aux deux ensembles à la fois.
- On définit, de façon analogue, l'intersection d'un nombre *fini* ou *infini* d'ensembles (on écrira plus communément intersection *finie* ou *infinie*).

γ Différence

- La différence entre un ensemble A et un ensemble B est l'ensemble $A \setminus B$ des éléments appartenant à A mais pas à B ; il n'est pas nécessaire que $B \subset A$ car on fait la différence entre A et $A \cap B$.
 $A \setminus B$ est aussi appelé *complémentaire de B dans A* .
- Contrairement à l'union, qui est commutative et associative, ainsi que l'intersection, la différence n'est ni commutative, ni associative.

f Composantes connexes

Par définition, si un sous-ensemble A de \mathbb{R} peut s'écrire comme l'union d'intervalles disjoints, ces intervalles sont appelés les composantes connexes de A .

g Sous-ensemble ouvert

- Par définition, un sous-ensemble ouvert U (on dira simplement un *ouvert*) n'atteint pas ses bornes.⁵
- L'exemple primordial d'ouvert dans \mathbb{R} est l'intervalle fini ouvert $]a, b[$.
- Par ailleurs, si l'on considère les intervalles infinis, $]-\infty, a[$, $]a, \infty[$ et $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ sont également ouverts.
- De façon plus générale, l'union finie ou infinie d'intervalles ouverts (disjoints ou non) est un ouvert.
- L'intersection d'un nombre *fini* d'ouverts est un ouvert.
- Par contre, l'intersection d'un nombre *infini* d'ouverts peut être un fermé (voir la définition au § suivant). Par exemple, on a

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\} .$$

h Sous-ensemble fermé

α Point d'accumulation

Par définition, un point d'accumulation x_o d'un ensemble A est la limite d'une suite convergente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeur dans A , autrement dit

$$x_o = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{avec } x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}^* ;$$

comme par définition la suite est convergente, x_o existe forcément, par contre, il n'appartient pas *a priori* à l'ensemble A .

Par exemple, soit $A =]0, 1]$, et la suite $x_n = \frac{1}{n}$ définie pour tout $n \geq 1$. On a $x_n \equiv \frac{1}{n} \in]0, 1] \equiv A \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \notin A$.

5. ce qui s'écrit mathématiquement $\forall x \in U, \exists \epsilon$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset U$.

β Définition d'un fermé

- Par définition, un sous-ensemble fermé (on dira simplement un *fermé*) contient tous ses points d'accumulation.
- L'exemple primordial de fermé dans \mathbb{R} est l'intervalle fini fermé $[a, b]$.
- Un cas particulier d'intervalle fini fermé est le singleton $\{a\}$.
- Par ailleurs, si l'on considère les intervalles infinis, $]-\infty, a]$, $[a, \infty[$ et $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ sont également fermés.
- De façon plus générale, l'union *finie* de fermés (disjoints ou non) est un fermé.
- Par contre, l'union infinie de fermés peut très bien être un ouvert.
- L'intersection d'un nombre *fini* ou *infini* de fermés est un fermé.

γ Cas de la droite réelle

$\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ est un cas très particulier, puisqu'il est à la fois ouvert et fermé.

i Fermeture d'un ensemble

- La fermeture \overline{A} d'un ensemble A quelconque est, par définition, le plus petit fermé contenant A .
Par exemple, la fermeture des intervalles $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $[a, b]$ est $\overline{]a, b[} = \overline{]a, b]} = \overline{[a, b[} = \overline{[a, b]} = [a, b]$.
- Une définition équivalente est $\overline{A} = \{ \text{points d'accumulation de } A \}$, soit de façon plus explicite : « la fermeture d'un ensemble A est l'ensemble \overline{A} des limites des suites à valeur dans cet ensemble A . »

j Sous-ensemble compact

α Sous-ensemble borné

Par définition, un sous-ensemble borné de \mathbb{R} est inclus dans un intervalle fini $[-L, L]$.

β Définition d'un compact dans \mathbb{R}

- Pour la topologie dans \mathbb{R} , on peut se contenter d'une définition pratique : un sous-ensemble compact (on dira simplement un *compact*) est un ensemble à la fois fermé et borné.
- Les intervalles fermés finis sont donc compacts, mais pas les intervalles infinis.
- Une union *finie* de compacts est un compact.
- Une union *infinie* de compacts n'est *a priori* pas un compact.
- Une intersection *finie* ou *infinie* de compacts est un compact.

k Bornes d'un ensemble

α Minimum et maximum

- Par définition, le minimum d'un ensemble A , que l'on note $\min(A)$, est le plus petit⁶ élément de A .
- Par définition, le maximum d'un ensemble A , que l'on note $\max(A)$, est le plus grand⁶ élément de A .

6. Au sens de $<$ car on étudie ici la topologie de \mathbb{R} .

- $\min(A)$ ou $\max(A)$ n'existent pas toujours, puisque A ne contient pas nécessairement toutes ses bornes.
- Si A est compact, $\min(A)$ et $\max(A)$ sont bien définis.
- Si A est ouvert, on ne peut définir ni $\min(A)$, ni $\max(A)$.
- Si une borne de A est $-\infty$ (resp. $+\infty$), $\min(A)$ (resp. $\max(A)$) n'est pas défini.

β Limites inférieure et supérieure

- Par définition, la limite inférieure d'un ensemble A , que l'on note $\inf(A)$, est, soit $-\infty$ si A n'est pas borné à gauche, soit $\min(\overline{A})$ s'il l'est.
- Par définition, la limite supérieure d'un ensemble A , que l'on note $\sup(A)$, est, soit $+\infty$ si A n'est pas borné à droite, soit $\max(\overline{A})$ s'il l'est.
- $\inf(A)$ et $\sup(A)$ sont toujours définies.
- Si A est compact, $\min(A)$ et $\inf(A)$ coïncident, de même que $\max(A)$ et $\sup(A)$, car la limite est atteinte dans A .
- Si A est ouvert, $\inf(A)$ et $\sup(A)$ n'appartiennent pas à A .

2 FONCTIONS

On ne s'intéresse ici qu'aux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

a Argument

α Définition

Soit une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$, f associe à tout réel x son image complexe $f(x)$. La variable x est appelée l'*argument* de f .

β Variable muette

- Si l'on considère $f(x)$, pour x donné, il n'est pas possible de changer le nom de l'argument.
- Par contre, dans de nombreuses expressions génériques, ainsi que dans toutes les formules de sommation⁷ comme $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$, le nom de l'argument est arbitraire. On dit que la variable est muette.
- Il faut parfois prendre des précautions, par exemple dans $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y)dxdy$ on doit obligatoirement distinguer les variables, quand on transforme le produit d'intégrales simples en intégrale double.
- On respectera toutefois autant que faire se peut les usages de la physique pour les noms de variable : x pour l'espace et k pour les nombres d'onde sont, par exemple, deux variables conjuguées par la transformation de Fourier.

b Support

α Définition

- On appelle support de f : le sous-ensemble $\text{Support}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}}$.
- Pourquoi prend-on la fermeture ? Imaginons, par exemple, que f soit réglée mais pas continue en $x = x_0$, et que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ne soient pas nulles.

7. ou de produit dans les intégrales de chemin.

Même en posant arbitrairement $f(x_0) = 0$, il faut inclure x_0 dans le support. En conséquence, les points d'accumulation (notamment les bords) de $\text{Support}(f)$ sont inclus dans le support.

- Comme on prend la fermeture, f peut être nulle sur son support ; cependant, l'ensemble des points x du support pour lesquels $f(x) = 0$ est négligeable.

β *Fonction à support compact*

On dit que f est à support compact si et seulement si $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\text{Support}(f) \subset [a, b]$.

c *Continuité*

On ne considérera, dans tout ce cours, que le cas de fonctions continues, sauf éventuellement en des points isolés. Les définitions suivantes seront utiles par la suite.

α *Fonction réglée*

*

- On dit qu'une fonction f est réglée à droite (resp. à gauche) en x_0 si sa limite à droite (resp. à gauche)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \equiv f(x_0^\pm)$$

existe ($\pm = +$ si la fonction est réglée à droite, $\pm = -$ si elle l'est à gauche).

- On dit qu'une fonction f est réglée en x_0 si elle est à la fois réglée à droite et à gauche en ce point.
- Une fonction réglée en un point x_0 est prolongeable par continuité en ce point si et seulement si

$$f(x_0^-) = f(x_0^+).$$

Pour la prolonger par continuité, il suffit de poser

$$f(x_0) = f(x_0^-) = f(x_0^+). \quad (85)$$

- Attention toutefois que la relation (85) peut être artificiellement violée ; dans ce cas, la valeur $f(x_0)$ de la fonction au point x_0 n'a aucune signification.

β *Fonction continue*

- Une fonction est continue en un point $x \in \mathbb{R}$ si elle est réglée en x et qu'elle vérifie la condition (85) en x .
- Une fonction continue est une fonction continue en tout point $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles fonctions.
- On peut définir, par extension, $\mathcal{C}^0(A)$ l'ensemble des fonctions continues en tout point de A (on choisira toujours A connexe, c'est à dire un intervalle).

γ *Fonction à dérivée continue*

- Une fonction $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ si $f^{(n)}$ sa dérivée n -ème existe et $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
- On peut définir, par extension, $\mathcal{C}^n(A)$ l'ensemble des fonctions f telles que $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(A)$.

d Opérations sur les fonctions

Les espaces de fonctions sont tous munis de l'addition et de la multiplication, ainsi que des opérations suivantes, définies par

$$\text{addition} \quad f + g \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto \boxed{(f + g)(x) = f(x) + g(x)}; \quad (86a)$$

$$\text{multiplication} \quad f g \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto \boxed{(f g)(x) = f(x)g(x)}; \quad (86b)$$

$$\text{inverse} \quad 1/f \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto \boxed{(1/f)(x) = 1/f(x)}; \quad (86c)$$

$$\text{composition} \quad f \circ g \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto \boxed{(f \circ g)(x) = f(g(x))}. \quad (86d)$$

Le produit de convolution sera étudié au semestre S6. Il ne faut pas confondre $1/f$ et f^{-1} qui va être étudié au § suivant.

e Transformations sur les fonctions

Les définitions suivantes nécessitent des conditions particulières (qu'on n'étudiera pas), quand on les applique à des fonctions définies sur $A \subsetneq \mathbb{R}$. On les utilisera généralement pour des fonctions définies sur \mathbb{R} , pour lesquelles aucune restriction n'est nécessaire.

α Inversion

La réciproque d'une fonction f est notée f^{-1} et définie par

$$\boxed{f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathcal{I}}, \quad (87)$$

ce qui signifie $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

β Translation

Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle translatée de la fonction f et on note ${}^a f$ la fonction

$${}^a f : x \mapsto \boxed{{}^a f(x) = f(x - a)}. \quad (88a)$$

γ Inflation

On définira l'inflation d'un facteur $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et on notera f_λ la fonction ainsi dilatée

$$f_\lambda : x \mapsto \boxed{f_\lambda(x) = f(x/\lambda)}. \quad (88b)$$

δ Transposition

La transposée \check{f} d'une fonction f est définie par une inflation d'un facteur $\lambda = -1$. On dit encore *symétrie* pour transposition et *symétrique* pour transposée. On a donc

$$\check{f} : x \mapsto \boxed{\check{f}(x) = f(-x)}. \quad (88c)$$

f Parité

α Fonction paire

On dit qu'une fonction f définie sur \mathbb{R} est paire si et seulement si elle vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\check{f} = f}. \quad (89a)$$

β Fonction impaire

On dit qu'une fonction f définie sur \mathbb{R} est impaire si et seulement si elle vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\check{f} = -f}. \quad (89b)$$

γ Décomposition en parties paire et impaire

Soit f une fonction quelconque, f admet une décomposition unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$$\begin{array}{l} \boxed{f = f_{\text{pair}} + f_{\text{imp}}} \quad \text{avec} \\ \boxed{f_{\text{pair}} = \frac{f + \check{f}}{2}} \quad \boxed{f_{\text{imp}} = \frac{f - \check{f}}{2}}. \end{array} \quad (89c)$$

g Norme

On considère une norme de fonction $\| \cdot \|$ (sans préciser laquelle).

α Séparation

Rappelons qu'une norme est d'abord une distance, c'est-à-dire qu'elle doit séparer les fonctions différentes : on a

$$\forall f, g \quad \boxed{f \neq g \Leftrightarrow \|f - g\| \neq 0}.$$

β Norme sup

La norme sup est la limite supérieure de $\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$, ce qui s'écrit

$$\boxed{\sup(f) \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|}. \quad (90)$$

h Limite de fonction

α Limite associée à une norme

Contrairement à la limite définie dans \mathbb{R} , il n'existe pas une limite unique dans l'espace des fonctions.

À toute norme de fonction $\| \cdot \|$ est associée une limite par la définition :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| \rightarrow 0 \quad (91a)$$

où la limite dans le terme de droite est prise au sens ordinaire des limites dans \mathbb{R} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions.

β Limite simple

- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions, on dit que f_n tend simplement vers f (ou que f est la limite simple de la suite) quand

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) . \quad (91b)$$

On dit encore que f_n tend vers f **point par point**.

- La limite simple est la limite associée à la norme sup.

i Exemples fondamentaux

α Fonction caractéristique

Soit un sous-ensemble A de \mathbb{R} , on appelle fonction caractéristique de l'ensemble A , et on notera \mathbb{I}_A , la fonction définie par

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (92)$$

β Polynôme

- Un polynôme p est une fonction qui a pour image

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (93a)$$

où n est le degré du polynôme et, par définition, $a_n \neq 0$. Les coefficients a_i sont définis de façon univoque : soient deux polynômes p et q , avec $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ et $q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$, on a

$$p = q \Leftrightarrow a_i = b_i \quad \forall i \text{ en particulier } m = n . \quad (93b)$$

- On distingue les polynômes à coefficients entiers (ou rationnels, cela revient au même, à un facteur global près) : $a_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i = 0..n$. Ils permettent notamment de définir les nombres transcendants.⁸

γ Fraction rationnelle

- Une fraction rationnelle est la fraction de deux polynômes, $f = p/q$; on choisira les deux polynômes p et q premiers entre eux.⁹
- Soit x_1, \dots, x_m , les m racines distinctes de q , alors $f(x)$ diverge quand $x \rightarrow x_i$, pour $i = 1..m$. On dit que les x_i sont les pôles de la fonction f .
- Soit α_i la multiplicité de la racine x_i dans q ; au voisinage de x_i on peut écrire

$$f(x) \underset{x_i}{\sim} \frac{c_i}{|x - x_i|^{\alpha_i}}$$

où c_i est une constante déterminée.

8. Les nombres non transcendants sont les racines de ces polynômes et forment un espace dénombrable.

9. c'est-à-dire qu'ils n'ont aucune racine complexe commune.

δ Décomposition en éléments simples

Soit une fraction rationnelle p/q , avec p et q premiers entre eux. Soient x_1, \dots, x_m , les m racines distinctes de q de sorte que ce polynôme peut s'écrire

$$q(x) = a_n \prod_{i=1}^m (x - x_i)^{\alpha_i}$$

où n est le degré de q , a_n le coefficient de la puissance n , et chaque α_i est la multiplicité de la racine x_i (on a donc $n = \sum_{i=1}^m \alpha_i$).

On rappelle le résultat suivant : la fraction se décompose en éléments simples ; plus précisément, il existe β_i^j des coefficients définis pour $i = 1..m, j = 1..\alpha_i$, tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \sum_{\substack{i=1..m \\ j=1..\alpha_i}} \frac{\beta_i^j}{(x - x_i)^j}} \quad (94)$$

r est le reste polynomial, de degré $k - n$, où k est le degré de p ; quand $k < n$, $r = 0$.

j Primitive

- Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} (il n'est pas nécessaire que son intégrale impropre soit convergente en $\pm\infty$), alors une primitive F est donnée par les formules suivantes :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (95a)$$

ou encore $F(x) = - \int_x^a f(t) dt \quad (95b)$

où a est quelconque et peut même valoir $\pm\infty$ selon les cas.

- On peut montrer la formule réciproque suivante : Soit $F(x)$ définie par

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$$

alors, la dérivée de F vaut

$$\boxed{F'(x) = (h'(x) - g'(x))f(x)}$$

k Intégration par partie

On rappelle que, pour f et g deux fonctions telles que $f'g$ et fg' soient intégrables sur $[a, b]$ (f et g doivent en particulier être continûment dérivables sur $]a, b[$), on a :

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b} \equiv f(b^-)g(b^-) - f(a^+)g(a^+) \quad (96)$$

où on a précisé de quel côté on prend les limites au cas où f ou g ne serait pas continue en a ou b .

Index des équations

Eq. 1	Puissance du zéro.....	9
Eq. 2	Vecteur opposé.....	9
Eq. 3	Sesquilinearité.....	12
Eq. 4	Forme symétrique.....	12
Eq. 5	Forme positive.....	12
Eq. 6	Forme définie.....	12
Eq. 7	Norme produit scalaire/vecteur....	13
Eq. 8	Inégalité Cauchy-Schwarz.....	13
Eq. 9	Inégalité triangulaire.....	13
Eq. 10	Identité polarisation.....	13
Eq. 11	Théorème Riesz.....	13
Eq. 12	Orthonormalité base/réciproque...	15
Eq. 13	Décomposition vecteur.....	15
Eq. 14	" " base réciproque.....	15
Eq. 15	Composantes vecteur.....	15
Eq. 16	" " base réciproque.....	15
Eq. 17	Composantes forme linéaire.....	16
Eq. 18	" " base réciproque.....	16
Eq. 19	Décomposition opérateur.....	16
Eq. 20	Action opérateur.....	16
Eq. 21	Composantes opérateur.....	17
Eq. 22	Définition trace.....	18
Eq. 23	Définition déterminant.....	18
Eq. 24	Décomposition forme sesquilinéaire	19
Eq. 25	Composantes " ".....	20
Eq. 26	Action " ".....	20
Eq. 27	Définition métrique.....	20
Eq. 28	Produit hermitien.....	21
Eq. 29	Volume cellule unitaire.....	22
Eq. 30	Produit adjoints.....	22
Eq. 31	Norme produit opérateurs.....	23
Eq. 32	Norme opérateur.....	23
Eq. 33	Norme adjoint.....	24
Eq. 34	Norme produit opérateur/adjoint..	24
Eq. 35	Décomposition base réciproque....	24
Eq. 36	" " directe.....	25

Eq.	37	Volume paralléloéde	27
Eq.	38	Définition cosinus	28
Eq.	39	Matrice adjoint	29
Eq.	40	Matrice changement base	34
Eq.	41	" inverse " "	34
Eq.	42	" changement base réciproque	35
Eq.	43	" inverse " " "	35
Eq.	44	Changement base vecteur	35
Eq.	45	" " forme linéaire	36
Eq.	46	" " opérateur	36
Eq.	47	" " forme sesquilinéaire	36
Eq.	48	Définition fonction Dirac	47
Eq.	49	Décomposition composantes connexes . . .	50
Eq.	50	Mesure somme " "	50
Eq.	51	Singularité	51
Eqs.	52	Intégrales impropres	51
Eq.	53	Critères convergence singularité	52
Eq.	54	Comportement à l'infini	52
Eq.	55	Critères convergence " "	52
Eq.	56	Majoration intégrale	53
Eq.	57	Égalité des intégrales	53
Eq.	58	Décomposition parties > 0 et < 0	54
Eq.	59	Critère existence Lebesgue	54
Eq.	60	Intégrale intervalle compact	54
Eq.	61	Égalité des intégrales " "	55
Eqs.	62	Changement variable intégrale	55
Eq.	63	Normes de fonctions	57
Eq.	64	Inégalité entre normes	58
Eq.	65	Norme L^∞	58
Eq.	66	Égalité " " norme sup	58
Eq.	67	Produit hermitien de fonctions	58
Eq.	68	Intégrale de Stieltjes	58
Eq.	69	Égalité presque partout	60
Eq.	70	Suite de Cauchy	61
Eq.	71	Rayon spectral	65
Eq.	72	Inégalité Cauchy-Schwarz pour fonctions	66
Eq.	73	Décomposition fonction	68
Eq.	74	" norme "	68
Eqs.	75	Définition Fourier	70
Eq.	76	" opérateur normal	72
Eq.	77	Opérateur symétrique	72
Eq.	78	Théorème spectral	73
Eq.	79	Orthonormalisation sens large	73
Eq.	80	Théorème spectral partie continue	73
Eq.	81	Orthonormalisation polynômes d'Hermite	74
Eqs.	82	" " Laguerre	80

Eq. 83	Définition série Fourier.....	82
Eq. 84	Orthonormalisation polynômes Legendre	83
Eq. 85	Continuité en un point.....	89
Eqs. 86	Opérations sur les fonctions.....	90
Eq. 87	Réciproque fonction.....	90
Eqs. 88	Transformations de fonctions.....	90
Eqs. 89	Parité des fonctions.....	91
Eq. 90	Définition norme sup.....	91
Eqs. 91	Limites de fonctions.....	92
Eq. 92	Fonction caractéristique.....	92
Eqs. 93	Définition polynôme.....	92
Eq. 94	Décomposition en éléments simples.....	93
Eqs. 95	Primitive de fonction.....	93
Eq. 96	Intégration par partie.....	93

Index

- Addition
 - de fonctions, 63, 69, 77, 90
 - de vecteurs, 9
- Adjoints
 - d'un opérateur, 22, 29, 70
 - d'un produit, 22
 - d'un scalaire, 22
 - d'un vecteur, 22
 - d'une forme linéaire, 22
 - d'une matrice, 16
 - norme, 24
- Angles, 28
- Argument, 88
- auto-adjoint, *voir* Opérateurs hermitiens

- Banach, *voir* Espace
- Base, 14, 61
 - algébrique, 61
 - canonique, 21, 29
 - continue, 48, 73
 - décomposition, 14, 48, 61, 62, 68, 74
 - hilbertienne, 67
 - orientée, 28
 - orthonormée, 26, 39
 - réciproque, 15, 24, 26
- Bertrand, *voir* Critères
- Borné(e), *voir* Fonctions *ou* Opérateurs *ou* Ensemble
- Bra, *voir* Formes linéaires
- bra, *voir* Formes linéaires

- Cantor, *voir* Ensemble
- Cauchy, *voir* Suites
- Cauchy-Schwarz, *voir* Inégalité
- Cellule unitaire, 27, 41
 - volume, 22
- Changement, *voir* Variable
- Changement d'échelle
 - d'intégrale, 56
 - de fonction, 90
- Changements de base, 34, 39, 75
 - d'un opérateur, 36
 - d'un vecteur, 35
 - d'une forme linéaire, 36
 - d'une forme sesquilinéaire, 36
 - d'une métrique, 37
 - invariants, 38, 38
 - réciproque, 35
- Colonne, *voir* Vecteurs
- compact, *voir* Ensemble
- Complémentaire, 86
- Complétude, *voir* Espace
- Composition
 - d'opérateurs, 23, 64, 71, 78
 - de fonctions, 63, 69, 77, 90
- Conditions
 - de Dirichlet, 81
 - de Neumann, 81
- Connexe, 86
- Continuité
 - d'opérateurs, 64, 65, 70, 71, 71, 78
 - de fonctions, 48, 89
- Critères (de Riemann ou Bertrand), 52

- Décomposition en éléments simples, 93
- Décomposition polaire, 21
- Déterminant, 18, 38
- Diagonalisation, 18, 19, 24, 33, 36, 73
- Différence, *voir* Complémentaire
- Dilatation, *voir* Changement d'échelle
- Dirac
 - distributions de, 47, 48, 69
 - notations de, 9, 10–12, 13, 58, 70, 72
- Dirichlet, *voir* Conditions
- Distance, 12, 91
- Distributivité, 9

- Einstein (convention d'), 26
- Élément neutre, 9
- Ensemble, 84
 - borné, 87
 - Bornes inf. ou sup., 81, 83, 88

compact, 87
 dénombrable, 49, 85
 de Cantor, 49
 fermé, 86, 87
 fini, 84
 mesurable, 50
 négligeable, 49
 ouvert, 86

Entier
 naturel, 84
 relatif, 84

Espace
 (partition de l'), 32
 complet, 67, 77
 de Banach, 61, 67, 77
 de fonctions, 47, 59, 61, 66, 76, 79, 82
 de Hilbert, 69
 dual, 11, 78
 hermitien, 12
 vectoriel, 9
 vectoriel réel, 25, 28, 30

Espace propre, 65, 71, 73

Farey, *voir* Suites

Fermeture, *voir* Ensemble

Fonction caractéristique, 92

Fonctions
 à support compact, 89
 bornées, 76
 continues, 89
 dérivables, 89
 impaires ou paires, 91
 primitives, 93
 réglées, 89
 support, 88

Formes
 bilinéaires, 25
 définies positives, 11
 hermitiennes, 11
 linéaire, 13
 linéaires, 11, 65, 69, 78
 sesquilineaires, 11
 action, 20

Fourier
 série de, 82
 transformation de, 70, 74, 82

Gram-Schmidt, *voir* Bases orthonormées

Haar, *voir* Bases

hermitien, *voir* Opérateurs ou Produits

Hilbert, *voir* Espace

Homogénéité, 23, 59

impropre, *voir* Intégrales

Inégalité
 de Cauchy-Schwarz, 13, 14, 66
 triangulaire, 13, 23, 59, 66, 76

inf, 88

Inflation, *voir* Changement d'échelle

Intégrables (fonctions), 59

Intégrales
 convergence alternée, 73
 convergentes ou divergentes, 51, 51
 de Lebesgue, 53
 de Riemann, 51, 53
 de Stieltjes, 58
 majoration, 53
 propres ou impropres, 51, 54

Intégration par partie, 93

Intègre, 84

Intersection, 86

Intervalle, 84, 86
 fermé, 87
 fermeture, 87
 fini ou infini, 84
 Intégrale définie sur, 55
 ouvert, 86

Invariants, *voir* Changements de base

Inverse (de fonction), 90

Isométries, 30, 33
 réelles, 30

ket, *voir* Vecteurs

Legendre
 polynômes de, 82
 transformation de, 64

Limite, *voir* Ensemble
 d'une fonction, 89, 91
 d'une suite, 61, 92

linéaire, *voir* Opérateurs vectoriels

Longueur, 50

Matrices
 de changement de base, 34, 75
 représentant un opérateur, 16, 17
 représentant un vecteur, 15, 17, 24
 représentant une forme linéaire, 16, 16
 représentant une forme sesquilineaire,
 19, 19, 20

max, 87
 Mesure, *voir* Ensemble, 49
 d'un intervalle, 49
 Métrique de Minkovski, 11
 Métriques, 26, 39, 57, 58
 définies positives, 21, 24, 40
 euclidiennes, 20, 67
 plates, 67
 min, 87
 Multiplication, *voir* Produit
 Multiplication par un scalaire, 9, 13

 Négative ou nulle (fonction), 53
 Négligeable, *voir* Ensemble
 Neumann, *voir* Conditions
 Nombre
 imaginaire, 84
 rationnel, 84
 réel, 84, 87
 transcendant, 92
 Norme, 12, 27
 d'opérateurs, 22, 24, 64, 71, 78
 d'un produit d'opérateurs, 23
 de fonctions, 57, 58, 59, 66, 76
 Norme sup, 91

 Opérateurs, *voir aussi* Rayon spectral
 élémentaires, 31
 action, 16, 17, 30
 bornés, 65, 70, 72
 compositions des, 18
 hermitiens, 24, 32, 72
 spectre, 73
 nilpotents, 24, 32, 33
 non bornés, 73
 normaux, 72
 rayon spectral, 72
 vectoriels, 10, 29, 63, 69, 77, 79, 82
 Orientation de l'espace, 28, 28
 orthogonaux, *voir* Vecteurs
 Ouvert, *voir* Ensemble

 parallèles, *voir* Vecteurs
 Parité de fonction, 91
 Point d'accumulation, 86
 Polarisation (identité de), 13
 Pôle, *voir* Singularités
 Polynômes, 84, 92
 caractéristiques, 10
 d'Hermite, 74
 de Laguerre, 80
 minimals, 31, 33
 Positive ou nulle (fonction), 53
 presque partout, 60
 Primitive, *voir* Fonctions
 Produit
 de convolution, 63, 70, 77
 de fonctions, 63, 69, 77, 90
 hermitien, 12, 21, 25, 27, 39, 58, 61
 matriciel, 17, 18, 20
 scalaire, 25
 tensoriel, 28
 vectoriel, 14, 27
 Projecteurs, 31, 33, 33
 orthogonaux, 31
 Prolongement par continuité, 89
 propre, *voir* Intégrales

 Rationnelle (fraction), 92
 Rayon spectral, 65
 d'un opérateur normal, 72
 Réciproque (de fonction), 90
 Réciproques, *voir* Bases
 Réglée, *voir* Fonctions
 Relation de fermeture, 32
 théorème spectral, 73
 Représentation (théorème de), 13, 69
 Riemann, *voir* Intégrales *ou* Critères
 Riesz, *voir* Représentation
 Rotations, 30, 33

 scalaire (produit), *voir* Produit
 Scalaire, 20, 25
 semi-linéarité, *voir* Formes sesquilinéaires
 Séparation, 12, 23, 59, 66, 76, 91
 sesquilinéaires, *voir* Formes
 Singleton, 84, 87
 Singularité, 51, 92
 Spectre
 essentiel, 65, 71
 ponctuel, *voir* Valeurs propres
 Stieltjes, *voir* Intégrales
 Suites
 Convergence en norme, 68
 de Cauchy, 61, 61, 67, 77
 de Farey, 85
 sup, 88
 Support, *voir* Fonctions
 Symétrie, *voir* Transposition

 Théorème spectral, *voir* Relation de fermeture

Topologie, 84
Trace, 18, 38
Translation
 de fonction, 90
 intégrale, 55
Transposition
 d'une matrice, 16
 de fonction, 90

Unicité
 Base réciproque, 15, 25, 41
 décomposition, 14, 16, 48, 62, 68
Union, 85

Valeurs propres, 10, 18, 19, 24, 30, 32, 33,
 65, 71, 74
Variable
 changement, 55–57
 muette, 88
Vecteurs, 9
 normalisés, 39, 67, 73
 nuls, 10
 orthogonaux, 14, 67, 73
 parallèles, 14
Vecteurs propres, 10, 65, 71, 83

Références

- Pierre Meunier, *Exercices d'algèbre et d'analyse corrigés et commentés : classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques, premiers cycles universitaires*, ed. P.U.F. (1997).