Partiel de Mécanique des Fluides

Mercredi 6 novembre 2019, durée 3h

Le barème affiché est à titre indicatif uniquement et pourra être modifié.

I. Caractérisation d'écoulements (5 points)

On considère les deux écoulements plans ci-dessous

1. $\vec{u}_1 = A\,(-y\,\vec{e_x} + x\,\vec{e_y})$,
2. $\vec{u}_2 = B\left(\dfrac{-y\,\vec{e_x} + x\,\vec{e_y}}{x^2+y^2}\right)$,

où A et B sont des constantes. Déterminer, pour ces deux écoulements, s'ils sont stationnaires, incompressibles et irrotationnels. Déterminer ensuite les équations des lignes de courant dans ces deux cas et schématiser quelques lignes de courant et vecteurs vitesses. Déterminer le vecteur accélération dans le premier cas uniquement.

II. La balance hydrostatique (4 points)

Le roi Hiéron II de Syracuse aurait demandé à son ami Archimède (âgé alors de 22 ans) de vérifier si une couronne d'or, qu'il s'était fait confectionner comme offrande à Zeus, était totalement en or ou si l'artisan y avait mis de l'argent. La vérification avait bien sûr pour contrainte de ne pas détériorer la couronne. La forme de celle-ci était en outre trop complexe pour effectuer un calcul du volume de l'ornement. Archimède a alors trouvé le moyen de vérifier si la couronne était vraiment en or en inventant à cette occasion une balance hydrostatique destinée à mesurer la masse volumique de la couronne et de la comparer ainsi à la mase volumique de l'or. De

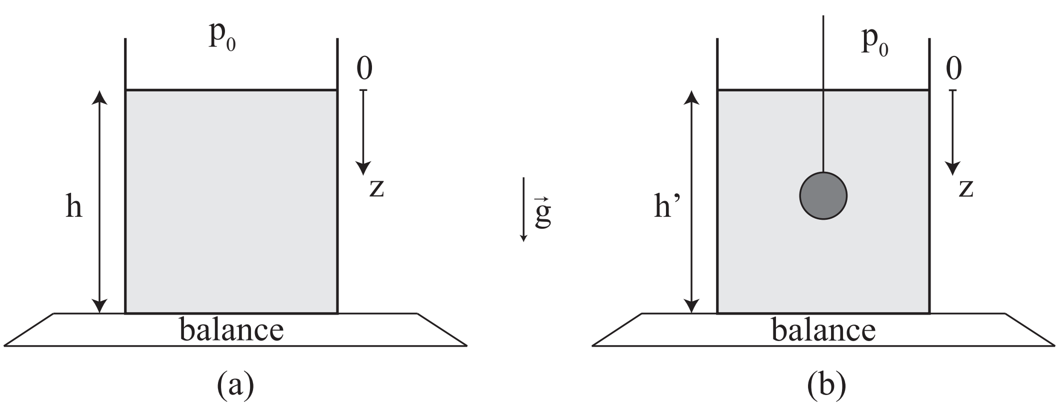

FIGURE 1 – (a) Récipient rempli d'eau sur une hauteur h. (b) On immerge la pierre précieuse dans l'eau en la suspendant par un fil. Le niveau de la surface libre est en h'

nos jours, les balances hydrostatiques sont utilisées en gemmologie pour tester la qualité d'une gemme (pierre précieuse ou ornementale). C'est ce qu'on propose d'étudier dans ce problème.
On considère pour cela un récipient cylindrique de rayon constant $R = 5$ cm rempli d'eau sur une hauteur h (figure 1 (a)). La surface libre de l'eau en $z = 0$ est à la pression atmosphérique p_0. On note $\rho_{eau} = 10^3$ kg/m^3 la masse volumique de l'eau, $g = 10$ m/s^2 l'accélération de la pesanteur et on oriente l'axe Oz vers le bas. Le récipient rempli d'eau est posé sur une balance et la masse de référence (tare de la balance) est prise une fois que le récipient vide est posé sur la balance.

1. Rappeler l'équation de l'hydrostatique et déterminer l'expression de la pression avec la profondeur z.
2. Exprimer la force de pression résultante s'exerçant sur le fond du récipient. Faire l'application numérique dans le cas où le récipient contient 1 litre d'eau.
3. Le gemmologue immerge cette fois la gemme, de volume $\mathcal{V}$ et de masse volumique ρ, dans l'eau en la suspendant par un fil (la pierre ne repose pas sur le fond du verre) comme le montre la figure 1 (b). Le récipient contient toujours 1 litre d'eau, la nouvelle hauteur d'eau est notée h' et on néglige le volume du fil.

   (a) Exprimer le volume de la pierre $\mathcal{V}$ en fonction de h et h'.

   (b) Exprimer la nouvelle pression qu'exerce l'eau sur le fond du récipient en $z = h'$ en fonction de h et $\mathcal{V}$. En déduire que la force de pression résultante peut s'écrire sous la forme

   $$F_{p_z} = (M_1 + M_2)\, g.$$

   Identifier M_1 et M_2. En déduire l'excès de masse mesurée par la balance en présence de la gemme dans l'eau si $h' - h = 5\ 10^{-1}$ mm.

   (c) En déduire la densité de la gemme si sa masse est de 20 g.

III. Vase de Tantale (7 points)

Le vase de Tantale est un dispositif qui peut, dans certains cas, présenter des oscillations de relaxation périodiques. Le réservoir, de section S constante et de hauteur H_3, est alimenté en permanence par un robinet R imposant un débit volumique d'eau Q_0 constant (figure 2 (a)). Un siphon, de section constante s, permet de vidanger le réservoir (figure 2 (b)). On oriente l'axe Oz vers le haut, l'origine $z = 0$ étant prise au niveau du fond du réservoir. L'entrée du siphon est située en $z = H_1$, le haut du siphon en $z = H_2$ et la sortie du siphon en $z = -H_0$. L'ensemble est plongé dans l'air de pression atmosphérique p_0 et l'accélération de la pesanteur est notée g.
La figure 2 (a) illustre la phase de remplissage du réservoir à débit constant. Une fois que le siphon est amorcé (figure 2 (b)), l'eau s'écoule dans le tube de section $s \ll S$, de sorte que le réservoir peut se remplir puis se vider selon les débits d'alimentation Q_0 et de vidange Q_v. On note A un point de la surface libre de l'eau dans le réservoir et B un point à la sortie du siphon. On suppose l'écoulement d'un fluide parfait et incompressible comme quasi-stationnaire dans cet exercice.
L'objectif de ce problème est de déterminer la hauteur d'eau dans le réservoir en fonction du débit d'alimentation Q_0.

1. Le réservoir est initialement vide (figure 2 (a)). On s'intéresse à la phase de remplissage du réservoir.

   (a) Déterminer la loi d'évolution de $h(t)$.

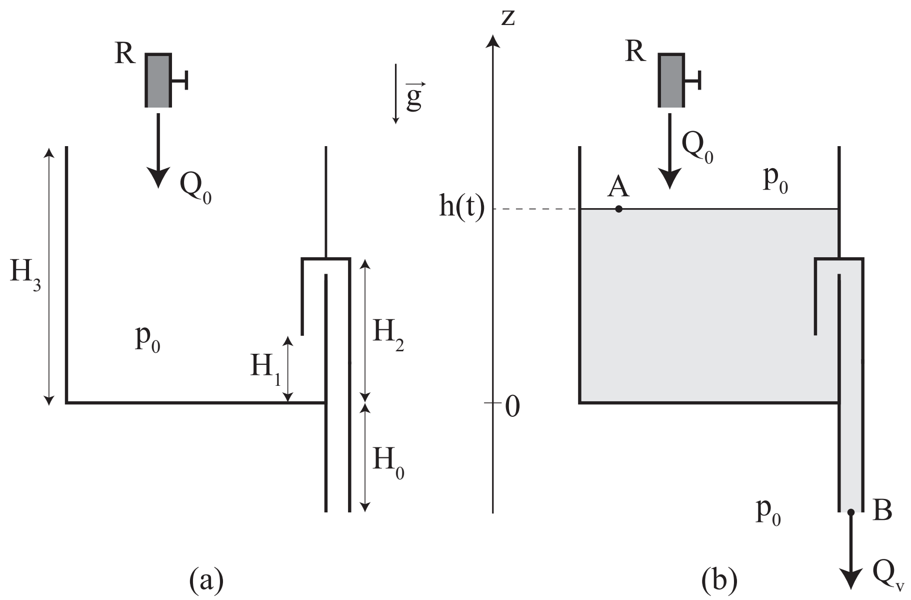

FIGURE 2 – Vase de tantale : (a) phase de remplissage avec un débit d'alimentation Q_0 et (b) le siphon est amorcé de sorte que l'eau s'écoule au point B à un débit de vidange Q_v.

(b) Exprimer la condition sur la hauteur d'eau h au point A pour que le siphon s'amorce en phase de remplissage (c'est-à-dire qu'un écoulement prenne place dans le siphon sans intervention extérieure) et en déduire le temps de remplissage τ_R pour amorcer le siphon.

2. On considère maintenant que le siphon est amorcé et la hauteur d'eau $h(t)$ est quelconque (figure 2 (b)).

   (a) Justifier que la vitesse au point A est négligeable. Exprimer la vitesse de vidange au point B et le débit de vidange associé Q_v.

   (b) Montrer que la variation de la hauteur d'eau au cours du temps est donnée par une équation différentielle sur $h(t)$ de la forme

$$\frac{dh}{dt} = C - D.$$

   Identifier C et D.

3. Le siphon est tout juste amorcé (c'est-à-dire que la hauteur d'eau est initialement égale à la hauteur d'amorçage une fois la phase de remplissage terminée) et on suppose que le débit d'alimentation est $Q_0 = Q_2$.

   (a) Exprimer le débit de vidange $Q_v = Q_2$ quand $h(t) = H_2$.

   (b) Que se passe-t-il si $Q_0 = Q_2$?

4. Le siphon est tout juste amorcé et on suppose que le débit d'alimentation est $Q_0 > Q_2$.

   (a) Quel est le signe de dh/dt ?

   (b) Exprimer le débit de vidange $Q_v = Q_3$ quand $h(t) = H_3$.

   (c) A quelle condition sur Q_0 l'eau déborde du réservoir et à quelle condition h va se stabiliser à une hauteur d'eau intermédiaire H_{eq} ? Justifiez vos réponses.

5. Le siphon est tout juste amorcé et on suppose cette fois que le débit d'alimentation est $Q_0 < Q_2$.
   (a) Quel est le signe de dh/dt ?
   (b) Exprimer le débit de vidange $Q_v = Q_1$ quand $h(t) = H_1$ et la condition pour que le siphon se désamorce.
   (c) A quelle condition sur Q_0 des oscillations de relaxation apparaissent dans le réservoir et à quelle condition h va se stabiliser à une hauteur d'eau intermédiaire H'_{eq} ? Justifiez vos réponses.
6. Représenter sur un schéma la variation de la hauteur d'eau dans le réservoir en fonction du temps pour les cinq cas de figures que nous avons vu dans cet exercice.

IV. Barrage cylindrique (4 points)

On considère un barrage de forme cylindrique d'axe Oz. Dans le système de coordonnées cylindriques (r,θ,z), le barrage correspond à la partie $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ du cylindre de rayon R. On suppose que le barrage a une épaisseur négligeable devant son rayon de courbure $e \ll R$. La hauteur d'eau est notée H, on note p_0 la pression atmosphérique et on néglige les variations de pression de l'air avec l'altitude.

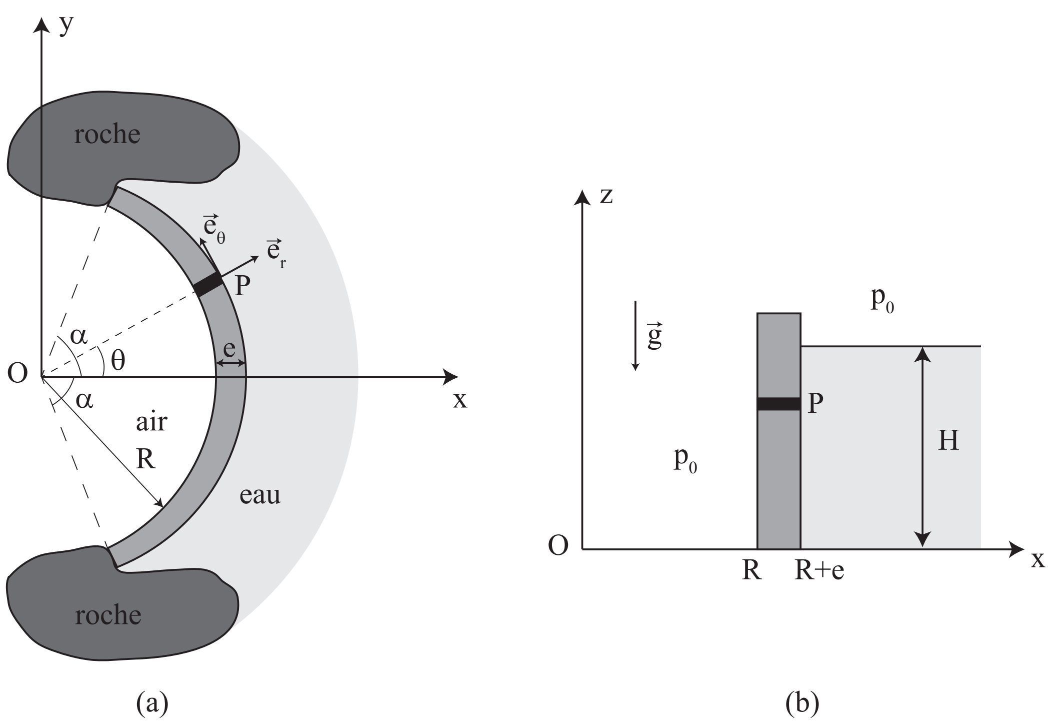

FIGURE 3 – Barrage cylindrique : (a) vue de dessus et (b) coupe verticale en $y = 0$.

Déterminer les expressions des composantes selon Ox et Oy de la force de pression résultante totale sur le barrage.