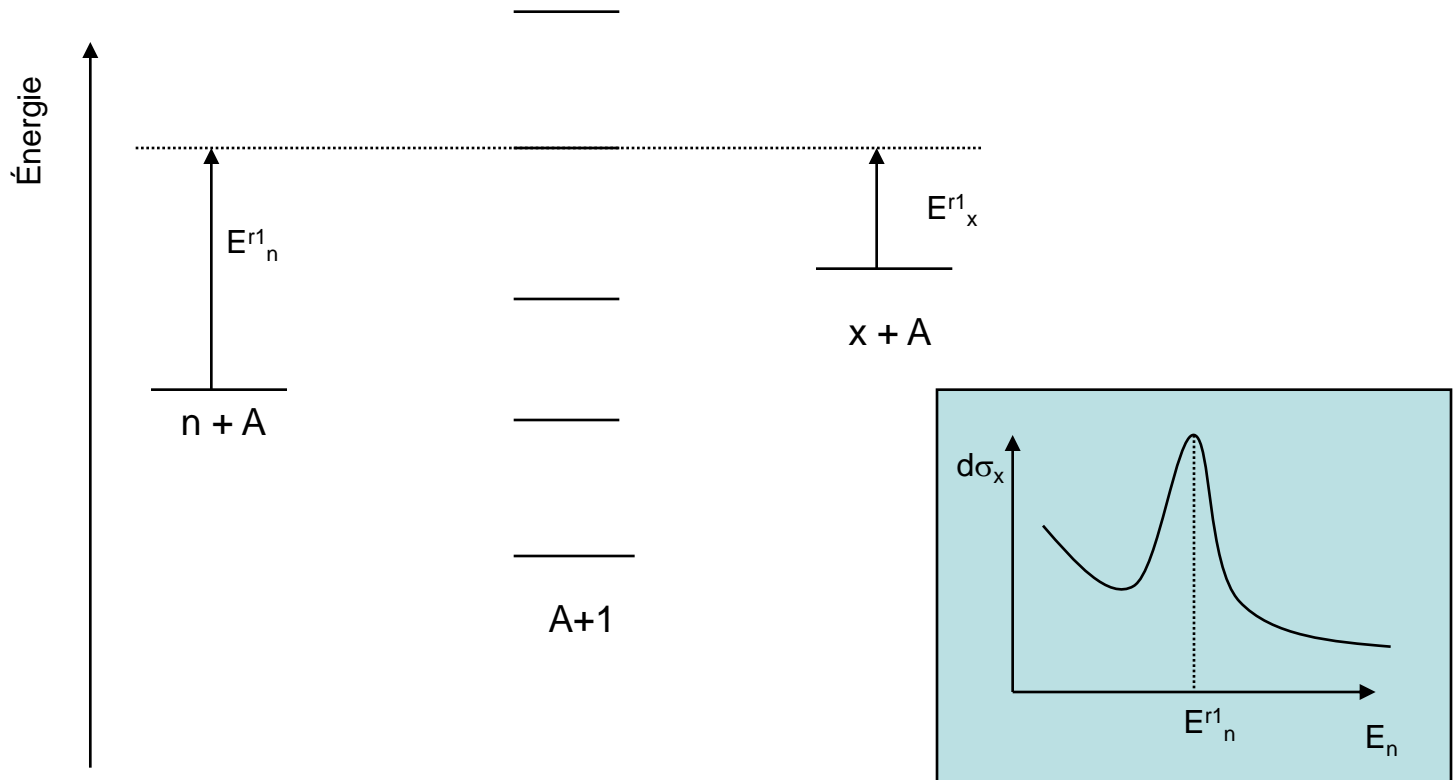


## Modèle de Breit et Wigner

Ce modèle a été développé pour couvrir la zone des **résonances isolées** observées dans les noyaux à basse énergie d'excitation où les gradients en fonction de l'énergie sont parfois très importants. Ces résonances se produisent lorsque l'énergie incidente du neutron correspond exactement à l'énergie d'excitation d'un niveau du noyau composé et lorsque la conservation du moment angulaire total est respectée.

Le formalisme de Breit et Wigner permet de relier les variations des sections efficaces en fonction de l'énergie avec les paramètres caractéristiques des niveaux excités du noyau composé.



## Résonance isolée d'un noyau de spin nul

L'interaction du neutron avec le noyau est approximée avec **l'interaction d'une onde avec un potentiel central**. Nous sommes amené à résoudre l'équation de Schrödinger dont la solution  $\varphi(r)$  est reliée à la fonction d'onde de la particule incidente  $\Psi(r)$  par la relation :

$$\varphi(r) = r \Psi(r)$$

La fonction d'onde  $\Psi(r)$  se décompose en ondes partielles de moment angulaire  $\ell$

$$\psi(r) = \sum_{\ell} (2\ell + 1) i^{\ell} j_{\ell}(kr)$$

où  $j_{\ell}(kr)$  est la fonction de Bessel sphérique d'ordre  $\ell$  dont le comportement asymptotique pour  $r \rightarrow \infty$  est  $1/r \cdot \exp[-i(kr - l\pi/2)]$ . **L'onde incidente partielle** peut être représentée par une fonction

$$u_{\ell}(r) = r j_{\ell}(kr)$$

qui se comporte à l'infini comme  $\exp[-i(kr - l\pi/2)]$ .

De même l'onde réfléchie par le potentiel peut être représentée par la fonction  $v_{\ell}(r)$ , se comportant à l'infini comme  $\exp[+i(kr - l\pi/2)]$ . Les fonctions  $u_{\ell}(r)$  et  $v_{\ell}(r)$  ont donc le même module mais des arguments opposés. Quand il y a absorption, l'amplitude de l'onde réfléchie est inférieure à celle de l'onde incidente et on peut écrire **l'onde totale associée à la particule incidente** par :

$$|\eta_{\ell}|^2 \leq 1$$

$$\varphi_{\ell}(r) = u_{\ell}(r) + \eta_{\ell} v_{\ell}(r) \quad \text{avec}$$

La surface d'impact de l'onde incidente de moment orbital «  $l$  » avec le noyau est donnée par  $\pi\hat{\lambda}^2(2l+1)$ , ce qui permet d'écrire **la section efficace partielle d'absorption** :

$$\sigma_a^\ell = \pi\hat{\lambda}^2(2l+1)(1-|\eta_\ell|^2)$$

et **la section efficace partielle de diffusion** par :

$$\sigma_s^\ell = \pi\hat{\lambda}^2(2l+1)(|1+\eta_\ell|^2)$$

Ces sections efficaces sont communément exprimées en fonction de la dérivée logarithmique de la fonction d'onde prise à la surface du noyau, et par conséquent on définit une fonction auxiliaire  $f(E)$  par

$$f(E) = a \left[ \frac{1}{\varphi_\ell(r)} \frac{d\varphi_\ell(r)}{dr} \right]_{r=a}$$

La fonction  $f(E)$  est une fonction complexe,

$$f(E) = g - ih.$$

C'est à cette fonction de l'énergie  $f(E)$  que seront reliés les paramètres caractéristiques des résonances, largeurs partielles et énergies.

Nous pouvons exprimer  $\eta$  en fonction de  $f$ , des fonctions d'ondes partielles  $u_l$  et  $v_l$  ainsi que de leurs dérivées  $u_l'$  et  $v_l'$

$$\eta_l = -\frac{ka.u_l' - fu_l}{ka.v_l' - fv_l}$$

Pour poursuivre le calcul, il est commode d'exprimer les fonctions  $u_l$  et  $v_l$  ainsi que leurs dérivées sous forme polaire

$$\begin{aligned} u_l(r) &= \rho e^{-i\delta_l} & v_l(r) &= \rho e^{+i\delta_l} \\ u_l'(r) &= \rho' e^{-i\delta_l'} & v_l'(r) &= \rho' e^{+i\delta_l'} \end{aligned}$$

ce qui permet de réécrire  $\eta$  :

$$\eta_l = -e^{-2i\delta_l} \frac{ka \frac{\rho'}{\rho} e^{-i(\delta_l' - \delta_l)} - f}{ka \frac{\rho'}{\rho} e^{+i(\delta_l' - \delta_l)} - f}$$

En tenant compte de la propriété des fonctions de Bessel sphériques qui pour tout valeur de  $r$  donnent  $\rho\rho' \sin(\delta_l' - \delta_l) = 1$  et en remplaçant  $f$  par son expression complexe  $g-ih$ , on obtient une nouvelle expression de  $\eta$ :

$$\eta_\ell = -e^{-2i\delta_\ell} \frac{ka \frac{\rho'}{\rho} \cos(\delta'_\ell - \delta_\ell) - g + i(h - \frac{ka}{\rho^2})}{ka \frac{\rho'}{\rho} \cos(\delta'_\ell - \delta_\ell) - g + i(h + \frac{ka}{\rho^2})}$$

Cette nouvelle expression de  $\eta$  permet de réécrire la **section efficace d'absorption** :

$$\sigma_a^\ell = 4\pi\hat{\lambda}^2 (2\ell + 1) \frac{h \frac{ka}{\rho^2}}{(h + \frac{ka}{\rho^2})^2 + (ka \frac{\rho'}{\rho} \cos(\delta'_\ell - \delta_\ell) - g)^2}$$

et la **section efficace de diffusion** :

$$\sigma_s^\ell = 4\pi\hat{\lambda}^2 (2\ell + 1) \left| \frac{\frac{ka}{\rho^2}}{i(h + \frac{ka}{\rho^2}) + (ka \frac{\rho'}{\rho} \cos(\delta'_\ell - \delta_\ell) - g)} + e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) \right|^2$$

Les sections efficaces exprimées ci-dessus présentent un phénomène résonnant et passent donc par un maximum lorsque l'énergie est égale à  $E_r$  telle que :

$$k_r a \frac{\rho'}{\rho} \cos(\delta'_\ell - \delta_\ell) - g = 0$$

Comme le déphasage entre les fonctions  $u_l$  ( $v_l$ ) et leurs dérivées sont proches de  $\pi/2$  (il est rigoureusement égal à  $\pi/2$  loin du noyau, c'est-à-dire lorsque  $u_l$  et  $v_l$  peuvent être remplacés par leurs expressions asymptotiques) et  $\cos(\delta'_\ell - \delta_\ell) = \cos \pi / 2 = 0$  ; cela signifie que l'on observe une résonance lorsque la partie réelle de  $f$  - la fonction  $g$  - est proche de zéro.

Si on reste au voisinage de cette énergie de résonance, on peut faire un développement limité au premier ordre de la fonction  $g$  :

$$g = k_r a \frac{\rho'}{\rho} \cos(\delta'_\ell - \delta_\ell) + (E - E_r) \left( \frac{dg}{dE} \right)_{E=E_r}$$

On définit la **largeur neutronique** par :

$$\Gamma_n = \frac{2k_r a}{\rho^2} \left[ \frac{dg}{dE} \right]_{E=E_r}^{-1}$$

et la **largeur partielle d'absorption** par :

$$\Gamma_a = -2h \left[ \frac{dg}{dE} \right]_{E=E_r}^{-1}$$

Dans les expressions précédentes, on remarquera que la largeur neutronique partielle est proportionnelle à  $k$  donc à la racine de l'énergie, alors que la largeur partielle d'absorption ne dépend que de la partie imaginaire de la dérivée logarithmique de la fonction d'onde.

En posant  $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_a$ , et en introduisant les expressions précédentes, on redéfinit les sections efficaces partielles d'absorption et de diffusion par :

$$\sigma_a^\ell = \pi \hat{\lambda}^2 (2\ell + 1) \frac{\Gamma_n \Gamma_a}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

$$\sigma_s^\ell = 4\pi \hat{\lambda}^2 (2\ell + 1) \left| \frac{\frac{\Gamma_n}{2}}{(E - E_r) + i\frac{\Gamma}{2}} + e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) \right|^2$$

Pour simplifier l'écriture de ces expressions, on introduit une nouvelle variable appelée

énergie réduite:

$$x = \frac{2}{\Gamma} (E - E_r)$$

On obtient ainsi une nouvelle formulation des sections efficaces :

$$\sigma_a^\ell = 4\pi\hat{\lambda}^2 (2\ell + 1) \frac{\Gamma_n \Gamma_a}{\Gamma^2} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_s^\ell &= 4\pi\hat{\lambda}^2 (2\ell + 1) \left| \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{x-i}{1+x^2} + e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) \right|^2 = \\ &= 4\pi\hat{\lambda}^2 (2\ell + 1) \left[ \sin^2(\delta_\ell) + \frac{\Gamma_n^2}{\Gamma^2} \frac{1}{1+x^2} + 2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{1}{1+x^2} \cos(\delta_\ell) \sin(\delta_\ell) - 2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{1}{1+x^2} \sin^2(\delta_\ell) \right] \end{aligned}$$

La section efficace totale  $\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s$  s'écrit :

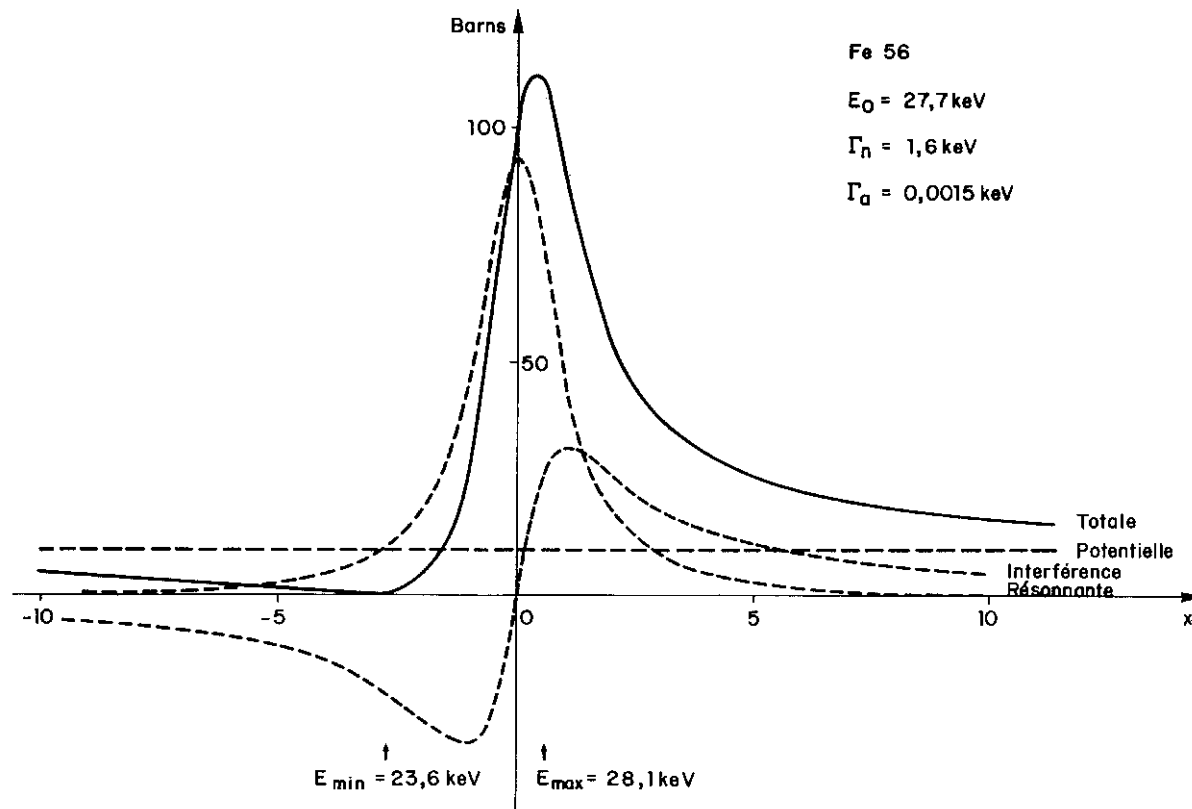
$$\sigma_t^\ell = 4\pi\hat{\lambda}^2 (2\ell + 1) \left[ \sin^2(\delta_\ell) + \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{1}{1+x^2} \cos(2\delta_\ell) + \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{x}{1+x^2} \sin(2\delta_\ell) \right]$$



La section efficace totale est la somme de trois termes :

- Le premier terme, qui dépend peu de l'énergie, représente la **section efficace de diffusion potentielle**.
- Le deuxième terme, qui est symétrique par rapport à l'énergie de la résonance ( $x=0$ ), est le **terme résonnant**.
- Le troisième terme, qui est asymétrique par rapport à l'énergie de la résonance, est le terme d'interférence entre l'onde diffusée et l'onde réémise. On l'appelle donc **terme d'interférence potentiel-résonnant**.

En physique des réacteurs, principalement les neutrons de moment orbital nul contribuent à la section efficace. Les expressions précédentes permettent d'obtenir les sections efficaces totales d'absorption de diffusion et de réaction en prenant le terme  $l = 0$ .



## Résonance à basse énergie

Dans le cas  $ka \ll 1$ , seules les ondes s contribuent. Cette condition se produit pour des énergies de neutron  $E_n \ll 300$  keV pour des masses de noyaux lourds ( $A = 240$ ), ou,  $E_n \ll 1$  MeV pour des noyaux légers ( $A = 40$ ). Pour une onde s,  $\delta_0 = ka$ , ce qui permet d'exprimer la valeur de la section efficace au voisinage de la résonance par :

$$\sigma_t = 4\pi\hat{\lambda}^2 \left[ \sin^2(ka) + \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{1}{1+x^2} \cos(2ka) + \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{x}{1+x^2} \sin(2ka) \right]$$

On pose  $\sigma_p = 4\pi a^2$  et  $\sigma_0 = 4\pi\hat{\lambda}_0^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma}(E_r)$

On peut ainsi ré exprimer les sections efficaces :

$$\sigma_t = \sigma_p + \frac{\sigma_0}{1+x^2} + 2ka\sigma_0 \frac{x}{1+x^2}$$

$$\sigma_a = \sigma_0 \frac{\Gamma_a}{\Gamma} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sigma_s = \sigma_p + \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{\sigma_0}{1+x^2} + 2ka\sigma_0 \frac{x}{1+x^2}$$

## Résonance dans le domaine des énergies thermiques

Les énergies thermiques sont proches de zéro. Dans ce domaine, seule l'onde **s** contribue significativement aux sections efficaces.

Au voisinage de la résonance on suppose que le développement limité au premier ordre est toujours valable et que nous pouvons faire l'approximation  $ka \ll 1$ .

La largeur d'absorption  $\Gamma_a$  est indépendante de l'énergie. Cependant la largeur neutronique  $\Gamma_n$  en dépend. Nous pouvons la réécrire :

$$\Gamma_n(E) = \Gamma_n(E_r) \sqrt{\frac{E}{E_r}}$$

Les sections efficaces d'absorption et de diffusion sont alors obtenues en faisant tendre l'énergie vers zéro.

Trouver  $\sigma_a$  et les trois termes de  $\sigma_s$  dans le cas de neutrons aux énergies thermiques.

## Résonance isolée d'un noyau de spin non nul

Considérons un noyau incident de spin  $s$  et un noyau cible de spin  $I$ . Il y a  $(2s+1)(2I+1)(2\ell+1)$  façons différentes de former un noyau composé. Elles diffèrent toutes par la valeur  $J$  du spin du noyau composé et de son orientation. Comme il n'y a pas de direction azimutale privilégiée, il y a  $(2J+1)$  couplages possibles. La section efficace de formation du noyau composé doit donc être multipliée par le facteur :

$$g_{J\ell} = \frac{2J+1}{(2s+1)(2I+1)(2\ell+1)}$$

La section efficace totale provenant de l'onde  $\ell$  s'écrira :

$$\sigma_t^\ell = 4\pi\hat{\lambda}^2(2\ell+1) \left[ \sin^2(\delta_\ell) + g_{J\ell} \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{1}{1+x^2} \cos(2\delta_\ell) + g_{J\ell} \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{x}{1+x^2} \sin(2\delta_\ell) \right]$$

Le modèle de Breit et Wigner a été développé pour des résonances isolées. Il reste valable dans le cas de plusieurs résonances proches à la condition qu'il n'y ait pas d'influence des unes sur les autres, ce qui est le cas lorsque les résonances sont assez éloignées les unes des autres, et que leur largeur est très étroite.

Lorsqu'il y a recouvrement des résonances, des termes d'interférence interviennent. Dans ce cas, on utilise un modèle statistique tenant compte de la densité de niveaux. Deux modèles ont été développés, le modèle de la matrice R dans le cas de résonances résolues, et le modèle Hauser-Feshbach dans le domaine du continuum.