COURS 4: SIGNAUX DIGITALS

TRAITEMENT NUMÉRIQUE DU SIGNAL

ÉCHANTILLONNAGE

THÉORÈME D'ÉCHANTILLONNAGE

Soit $x(t)$ un signal analogique, à *bande limitée*, ie. de **fréquence de coupure** ν_0. Alors $x(t)$ peut-être reconstruit **parfaitement** à partir de ses échantillons $x(t_n)$ prélevés aux instant

$$t_n = \frac{n}{2\nu_0} = \frac{n}{\nu_e}$$

$\nu_e = 2\nu_0$ est appelé la **fréquence d'échantillonnage.**

La formule de reconstruction est donné par

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t_n)\mathrm{sinc}\left(\nu_e(t - t_n)\right)$$

THÉORÈME D'ÉCHANTILLONNAGE: PREUVE

Soit $x(t)$ un signal analogique de transformée de Fourier $\hat{x}(\nu)$, à *bande limitée*, ie. de **fréquence de coupure** ν_0. La transformée de Fourier étant à support limité, on peut la développer en série de Fourier après périodisation:

$$\hat{x}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\hat{x}) e^{i2\pi \frac{n}{2\nu_0}\nu} \mathbf{1}_{[-\nu_0,\nu_0]},$$

avec les coefficients de Fourier donnés par

$$c_n(\hat{x}) = \frac{1}{2\nu_0}\int_{-\nu_0}^{\nu_0} \hat{x}(\nu) e^{-i2\pi \frac{n}{2\nu_0}\nu} \mathrm{d}\nu$$

Aux instant $t_n = \dfrac{n}{2\nu_0}$, la TF inverse s'écrit

$$x(t_n) = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \hat{x}(\nu) e^{i2\pi t_n \nu} \mathrm{d}\nu \text{ , ie } c_{-n}(\hat{x}) = \frac{1}{2\nu_0} x(t_n)$$

qu'on réinjecte dans $\hat{x}$

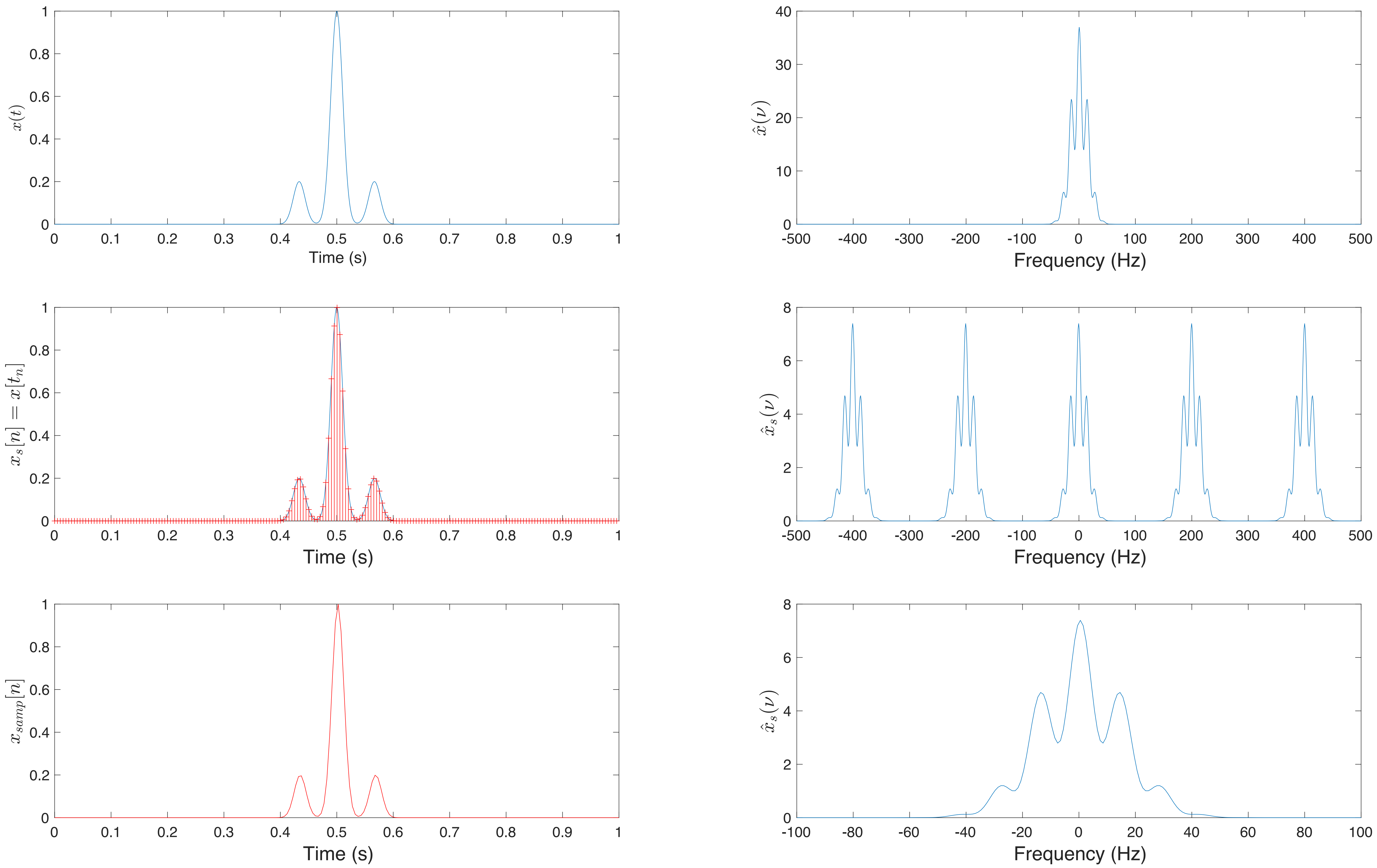
$$\hat{x}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\nu_0} x(t_n) e^{-i2\pi \frac{n}{2\nu_0}\nu} \mathbf{1}_{[-\nu_0,\nu_0]}$$

Enfin, par inversion de la TF:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t_n) \mathrm{sinc}(2\nu_0(t - t_n))$$

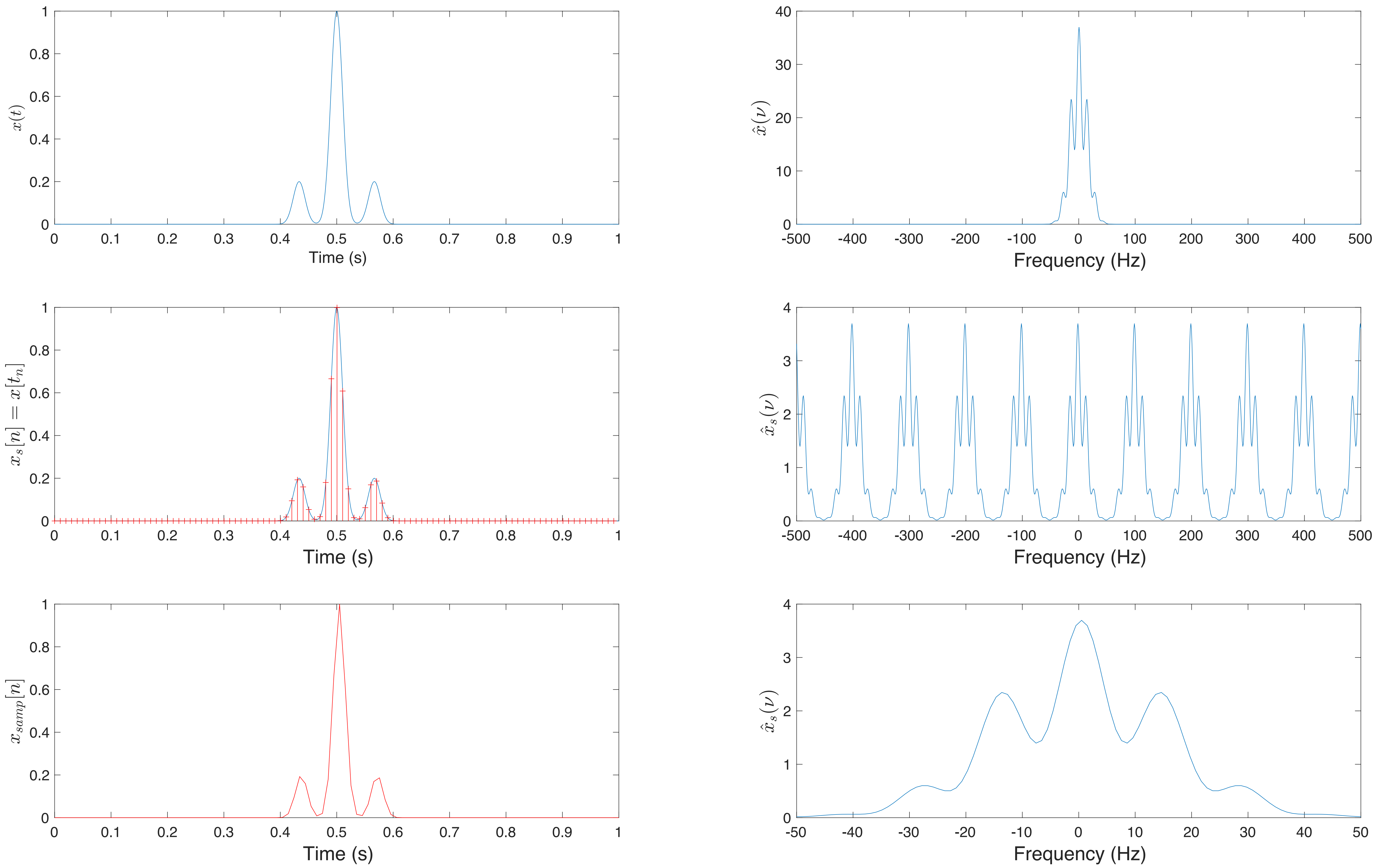
ECHANTILLONNAGE: EXEMPLE 1

- Sampling Frequency: 200 Hz



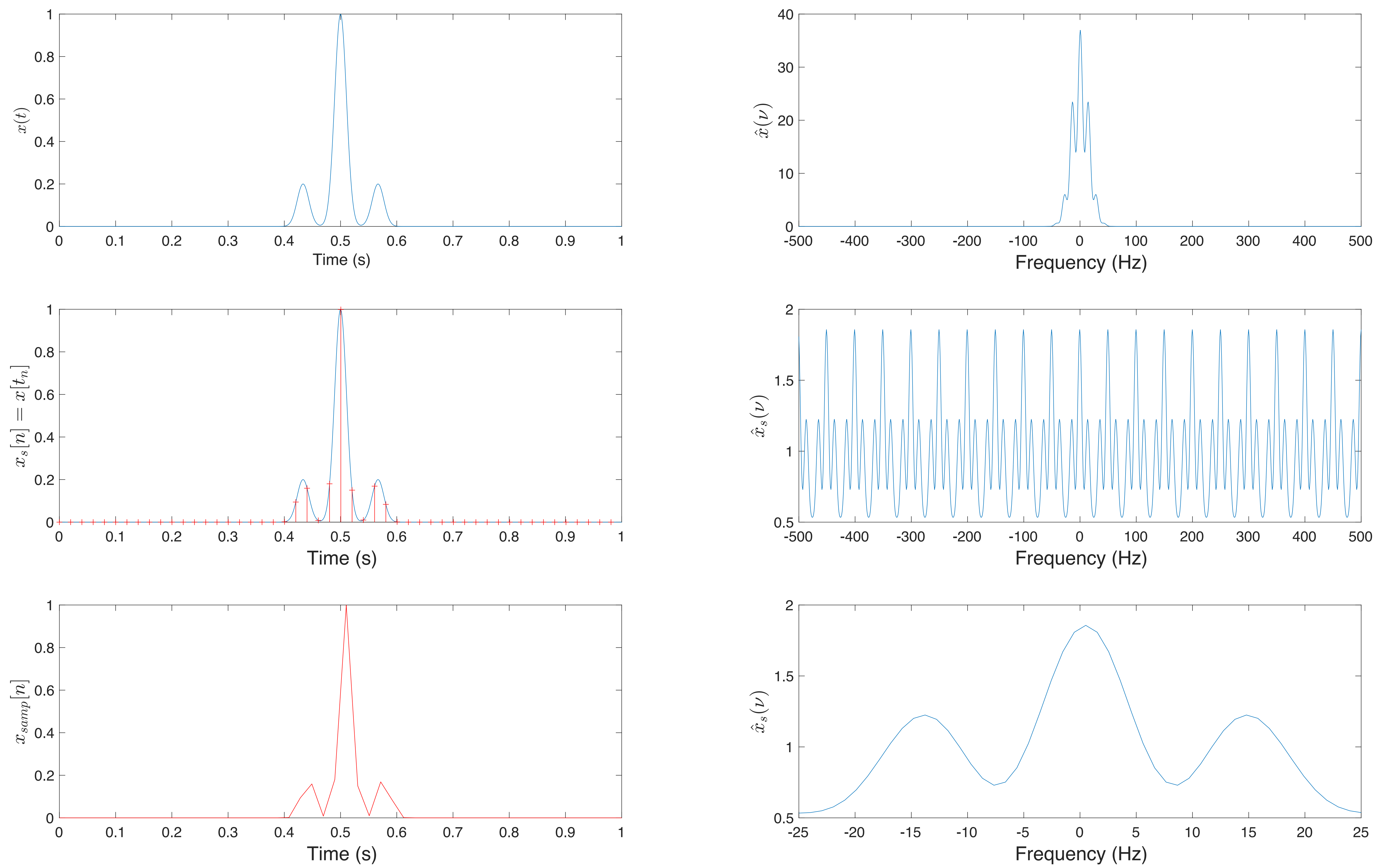
ECHANTILLONNAGE: EXEMPLE 2

- Sampling Frequency: 100 Hz



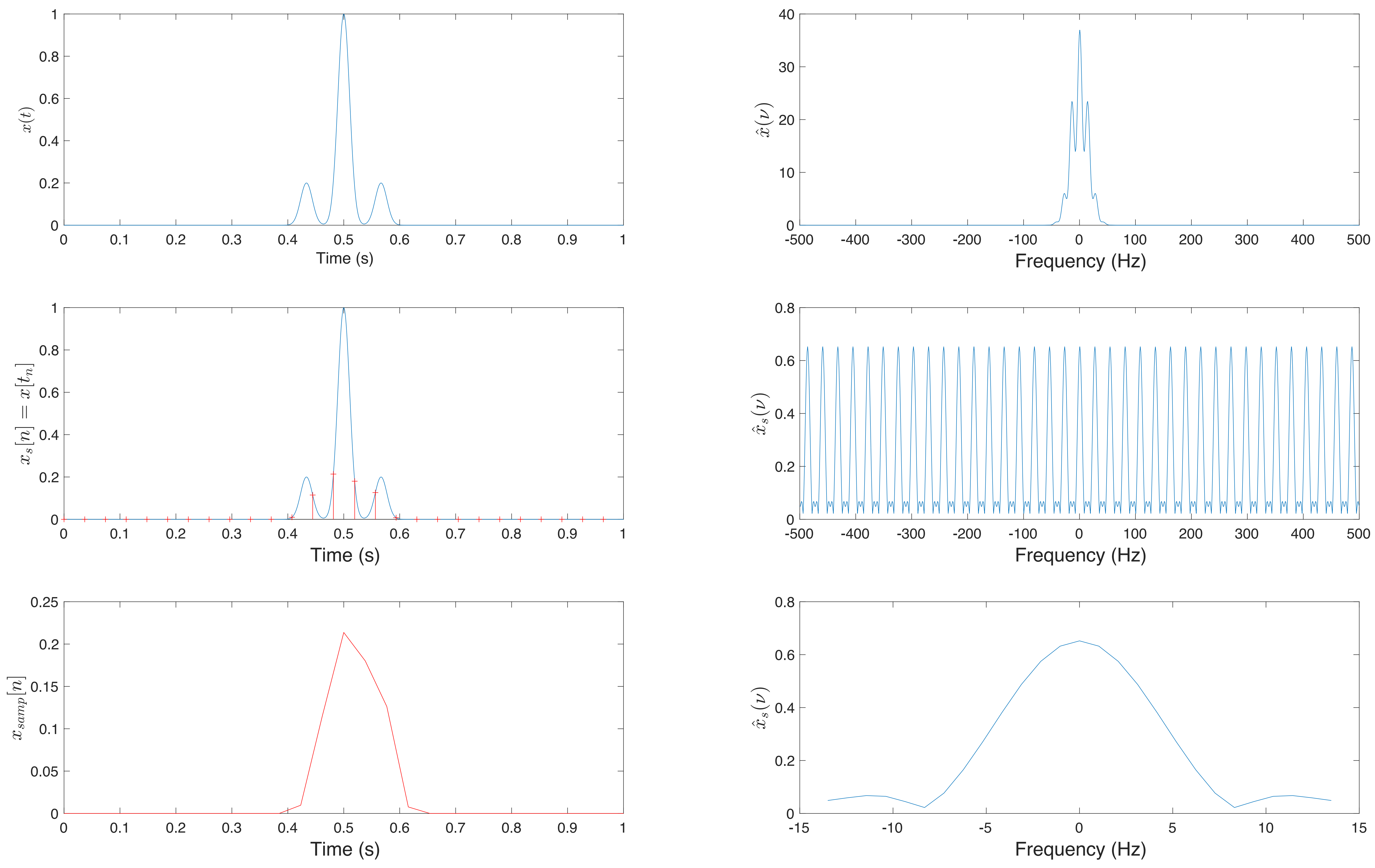
ECHANTILLONNAGE: EXEMPLE 3

- Sampling Frequency: 50 Hz



ECHANTILLONNAGE: EXEMPLE 4

- Sampling Frequency: 27 Hz



SUR/SOUS ÉCHANTILLONNAGE

- Échantillonnage critique: $\nu_e = 2\nu_0 \Longrightarrow$ reconstruction possible
- Sur-échantillonnage: $\nu_e > 2\nu_0 \Longrightarrow$ reconstruction possible
- Sous-échantillonnage: $\nu_e < 2\nu_0 \Longrightarrow$ repliement spectral !

- Comment respecter l'hypothèse « signal à bande limitée » ?

Filtre anti-repliement: Filtrage passe bas de fréquence de coupure ν_0 !

ÉCHANTILLONNAGE ET SIGNAUX NUMÉRIQUES

- Soit $u(t)$ un signal analogique et $v[n] = u(n\nu_e)$ le signal numérique obtenu par échantillonnage. La transformée de Fourier de v est

$$\hat{v}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v[n]e^{-i2\pi\nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n\nu_e]e^{-i2\pi\nu n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]e^{-i2\pi\nu\frac{k}{\nu_e}}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]e^{-i2\pi\frac{\nu}{\nu_e}k}$$

- $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]e^{-i2\pi\frac{\nu}{\nu_e}k}$ est ν_e périodique. Une période est donnée par $\left[-\frac{\nu_e}{2}, \frac{\nu_e}{2}\right]$. On « retrouve » bien que $\frac{\nu_e}{2}$ est la plus haute fréquence possible.

- Lorsque la fréquence d'échantillonnage est inconnue, on considère la fréquence « normalisée » $\nu' = \frac{\nu}{\nu_e}$. La transformée de Fourier est alors 1-périodique (cf. cours sur les signaux numériques)

SIGNAUX NUMÉRIQUES FINIS

SIGNAUX NUMÉRIQUES FINIS

- En pratique, les signaux numériques ont un nombre finis d'échantillons
- La connaissance de la fréquence d'échantillonnage est nécessaire pour connaitre:
  - La durée du signal
  - Sa fréquence de coupure ν_0
- Soit $x = \{x[0], \ldots, x[N-1]\}$ un signal numérique finit, et ν_e sa fréquence d'échantillonnage.
  - Sa durée en seconde est : $\dfrac{N}{\nu_e}$
  - La plus haute fréquence contenue dans le signal est: $\dfrac{\nu_e}{2}$

TRANSFORMÉE DE FOURIER FINIE

- Soit $x = \{x[0], \ldots, x[N-1]\}$ un signal numérique finit. Sa transforme de Fourier Finie est donnée par

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi\frac{k}{N}n}$$

- La transformée de Fourier inverse est donnée par

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] e^{i2\pi\frac{k}{N}n}$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER FINIE: THÉORÈME DE PARSEVAL

- Soit $x = \{x[0], \ldots, x[N-1]\}$ un signal numérique fini, de transformée de Fourier $\hat{x} = \{\hat{x}[0], \ldots, \hat{x}[N-1]\}$. Alors

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{x}[k]|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{x}\|_2^2$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER FINIE: AXE DES FRÉQUENCES

Soit $x = \{x[0], \ldots, x[N-1]\}$ un signal numérique fini, de transformée de Fourier $\hat{x} = \{\hat{x}[0], \ldots, \hat{x}[N-1]\}$.

- La transformée de Fourier Finie correspond à un échantillonnage de la transformée de Fourier discrète. Si on considère le signal numérique $x[t\nu_e]$, on a

$$\hat{x}(\nu) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} x[t\nu_e]e^{-i2\pi\nu t} = \sum_{t=0}^{N-1} x[t]e^{-i2\pi\frac{\nu}{\nu_e}t}$$

- La Transformée de Fourier finie correspond aux points $\nu = \dfrac{k}{N}$.
  - La plus haute fréquence positive présente dans le signal est $\nu = \dfrac{\nu_e}{2}$
  - La plus haute fréquence négative présente dans le signal est $\nu = -\dfrac{\nu_e}{2}$, ou, comme $\hat{x}$ est ν_e-périodique, $\nu = \nu_e$
- Ainsi, l'axe fréquentiel $\{0,\ldots,N-1\}$ correspond à un « découpage » du segment $[0,2\nu_e]$ en N points
  - Les points $\{0,\ldots,N/2\}$ correspondent aux fréquences « positives » $\left[0,\dfrac{\nu_e}{2}\right]$
  - Les points $\{N/2+1,\ldots,N-1\}$ correspondent aux fréquences « négatives » $\left[0,-\dfrac{\nu_2}{2}\right]$ ou $\left[\dfrac{\nu_e}{2},2\nu_e\right]$

ZEROS PADDING

Soit $x = \{x[0], \ldots, x[N-1]\}$ un signal numérique finit de taille N échantillons. On peut considérer le signal de taille $M \geq N$, avec $(M-N)$ zeros. :

$$x_M = \{x[0], \ldots, x[N-1], 0, \ldots, 0\}$$

- Sa TF comporte alors M coefficients

$$\hat{x}_M[k] = \sum_{n=0}^{M-1} x_M[n] e^{-i2\pi \frac{k}{M} n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi \frac{k}{M} n}$$

- Et le théorème de Parseval s'écrit:

$$\|x\|_2^2 = \|x_M\|_2^2$$
$$\frac{1}{N}\|\hat{x}\|_2^2 = \frac{1}{M}\|\hat{x}_M\|_2^2$$

- **Attention**: ajouter des 0 n'ajoute aucune information !

CONVOLUTION

Soit $u = \{u[0], \ldots, u[M-1]\}$ et $v = \{v[0], \ldots, v[N-1]\}$ deux signaux numériques de tailles respectives M et N échantillons.

- Alors, le produit de convolution donne un signal numérique fini de taille $M + N - 1$ échantillons

$$
\begin{aligned}
w[k] = (u * v)[k] &= \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u[\ell]v[k-\ell] \\
&= \sum_{\ell=0}^{M-1} u[\ell]v[k-\ell] \\
&= \sum_{\ell=0}^{N-1} v[\ell]u[k-\ell] \\
&\neq 0 \quad 0 \leq k \leq M + N - 1
\end{aligned}
$$

- Soit $\hat{u}[k] = \sum_{n=0}^{M-1} u[k]e^{-i2\pi\frac{k}{M+N-1}n}$ et $\hat{v}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} v[k]e^{-i2\pi\frac{k}{M+N-1}n}$
  les transformées de Fourier fini calculés sur $M + N - 1$ points après zeros-padding. Alors

$$\hat{w}[k] = \hat{u}[k]\hat{v}[k]$$

CONVOLUTION

Soit $u = \{u[0], \ldots, u[N-1]\}$ et $v = \{v[0], \ldots, v[N-1]\}$ deux signaux numériques de tailles N échantillons.

- Alors, le produit de convolution donne un signal numérique fini de taille $2N-1$ échantillons
- Attention ! Ne pas oublier le zeros padding pour la convolution dans Fourier: soit $\hat{u}_{2N-1}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} u[k]e^{-i2\pi\frac{k}{2N-1}n}$ et $\hat{v}_{2N-1}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} v[k]e^{-i2\pi\frac{k}{2N-1}n}$, alors

$\hat{w}[k] = \hat{u}_{2N-1}[k]\hat{v}_{2N-1}[k]$

CONVOLUTION CIRCULAIRE

Soit $u = \{u[0], \ldots, u[N-1]\}$ et $v = \{v[0], \ldots, v[N-1]\}$ deux signaux numériques de tailles N échantillons. Soit w le signal dont la transformée de Fourier est

$$\hat{w}[k] = \hat{u}_N[k]\hat{v}_N[k]$$

(ici, on a « oublié » de faire le zeros-padding)

Alors, on a

$$w[k] = (u \circledast v)[k]$$

Où $\circledast$ est l'opération de convolution **circulaire.** C'est à dire, le produit de convolution entre les signaux u et v considérés comme **périodique**, de période N

CONCLUSION

- Signaux "digitals" VS Signaux numériques
- Théorème d’échantillonnage et repliement spectral
- Transformée de Fourier Finie
- Convolution numérique et convolution circulaire