## COURS 3: FILTRAGE

# TRAITEMENT DU SIGNAL

# SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS

# SIGNAUX ET SYSTÈMES

- Un signal est enregistré, et déformé, par un capteur
- Un signal est (presque) toujours lié à la notion de « système »
- Système: Bloc fonctionnel qui réagit à un signal d'excitation en entrée et produit un signal de réponse après avoir appliqué une fonction au signal d'entrée


- S est une « fonctionnelle » qui s'applique à un signal, et retourne un autre signal

# SYSTÈMES LINÉAIRES

- Un système linéaire est une fonction linéaire par rapport aux entrées
- Soit un système $S$ et deux signaux d'entrées $x_1$ et $x_2$, tel que $y_1 = S\{x_1\}$ et $y_2 = S\{x_2\}$. $S$ est linéaire ssi

$$\begin{aligned} S\{ax_1 + x_2\} &= aS\{x_1\} + S\{x_2\} \\ &= ay_1 + y_2 \end{aligned}$$

- Soit $S$ un système linéaire. Alors il existe une fonction $h$ tel que la relation entrée/sortie s'écrit:

$$y[t] = S\{x\}[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k, t]x[k]$$

# SYSTÈMES INVARIANTS DANS LE TEMPS

- Un système invariant dans le temps est stable par translation temporelle
- Soit un système $S$ invariant dans le temps tel que $y[t] = S\{x\}[t]$. Soit $u_k[t] = x[t-k]$. Alors

$$S\{u_k\}[t] = y[t-k]$$

- Soit $S$ un système linéaire. Alors il existe une fonction $h$ tel que la relation entrée/sortie s'écrit:

$$y[t] = S\{x\}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[t-k]x[k]$$

# FILTRES: SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS DANS LE TEMPS

- Un filtre est un systèmes linéaires invariant dans le temps
- Soit $S$ un filtre. Alors il existe une fonction $h$ appelée ***réponse impulsionnelle*** telle que la relation entrée/sortie s'écrit:

$$\begin{aligned} y[t] &= S\{x\}[t] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[t-k]x[k] \\ &= (h * x)[t] \end{aligned}$$

- la réponse impulsionnelle $h$ caractérise complètement le filtre
- C'est une opération de **convolution**

# RAPPEL: PRODUIT DE CONVOLUTION

- Soit $u$ et $v$ deux signaux numériques réels. Leur produit de convolution s'écrit

$$(u * v)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[t-k]v[k]$$

- Le produit de convolution est commutatif

$$(u * v)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[t-k]v[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]v[t-k] = (v * u)[t]$$

- Le Dirac est l'élément neutre de la convolution

$$(\delta * u)[t] = (u * \delta)[t] = u[t]$$

# FILTRES

- Soit un filtre $S$ de réponse impulsionnelle $h$. Alors

$$\begin{aligned} S\{\delta\}[t] = (h * \delta)[t] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[t-k]h[k] \\ &= h[t] \end{aligned}$$

- La réponse impulsionnelle est la réponse du filtre au signal impulsion de Dirac

# FILTRES

Soit un filtre de réponse impulsionnelle $h$. On dit que le filtre est

- Causal ssi $h$ est causal
- Stable ssi $h$ est stable
- Réalisable ssi $h$ est réalisable

# FILTRE CAUSAL

Soit un filtre causal de réponse impulsionnelle $h$. Alors l'équation de filtrage (appelée aussi équation aux différences) s'écrit

$$\begin{aligned} y[t] = (h * x)(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[t-k] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[t-k] \\ &= h[0]x[t] + h[1]x[t-1] + \ldots + h[n]x[t-n] + \ldots \end{aligned}$$

- On voit que la réponse au temps $t$ ne dépend que du signal d'entrée aux **temps précédents. Il n'y a pas besoin de connaitre le futur de x pour calculer y.**
- Il y a bien un rapport de **causalité** entre l'entrée $x$ et la sortie $y$

# FILTRE STABLE

Soit un filtre stable de réponse impulsionnelle $h$.

- Soit un signal d'entrée $x$ stable. Alors le signal de sortie $y$ est stable

$$
\begin{aligned}
\|y\|_1 = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} |y[t]| &= \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[t-k] \right| \\
&\leq \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]||x[t-k]| \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \sum_{t=-\infty}^{+\infty} |x[t-k]| \\
&\leq \|h\|_1 \|x\|_1 \\
&< +\infty
\end{aligned}
$$

- De même, si l'entrée $x$ est bornée (i.e. $|x[t]| < B \forall t$), alors la sortie $y$ est bornée

# RÉPONSE EN FRÉQUENCE

- Soit un filtre **stable** de réponse impulsionnelle $h[t]$. La réponse en fréquence du filtre est la transformée de Fourier $\hat{h}(\nu)$ de la réponse impusionnelle.

- Soit

  $$y[t] = (h * x)[t]$$

  Alors

  $$\hat{y}(\nu) = \hat{h}(\nu)\hat{x}(\nu)$$

  - Filtrer un signal revient à modifier son spectre. Exemple: un equalizer

# FILTRES IDÉAUX

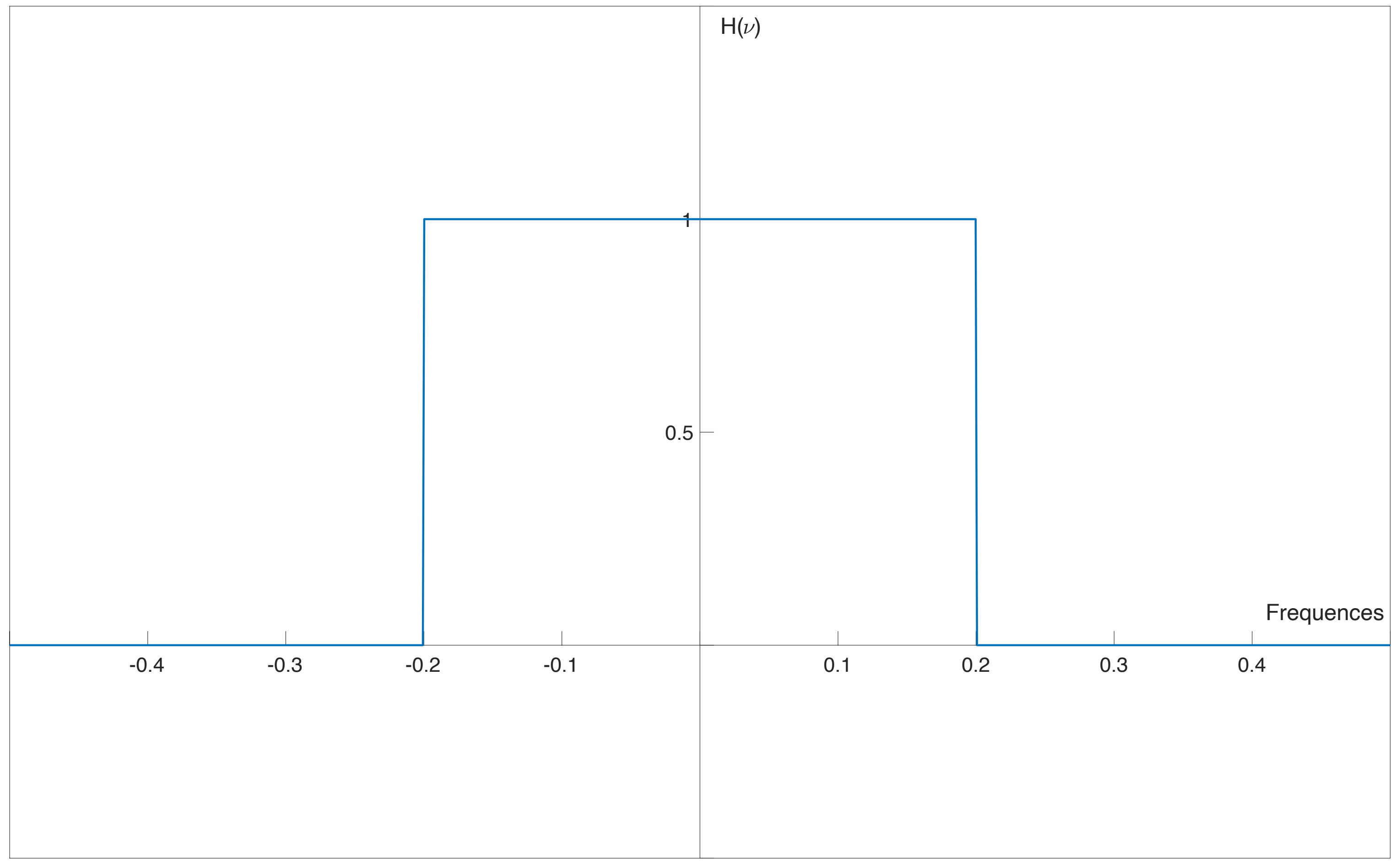
# PASSE-BAS IDÉAL

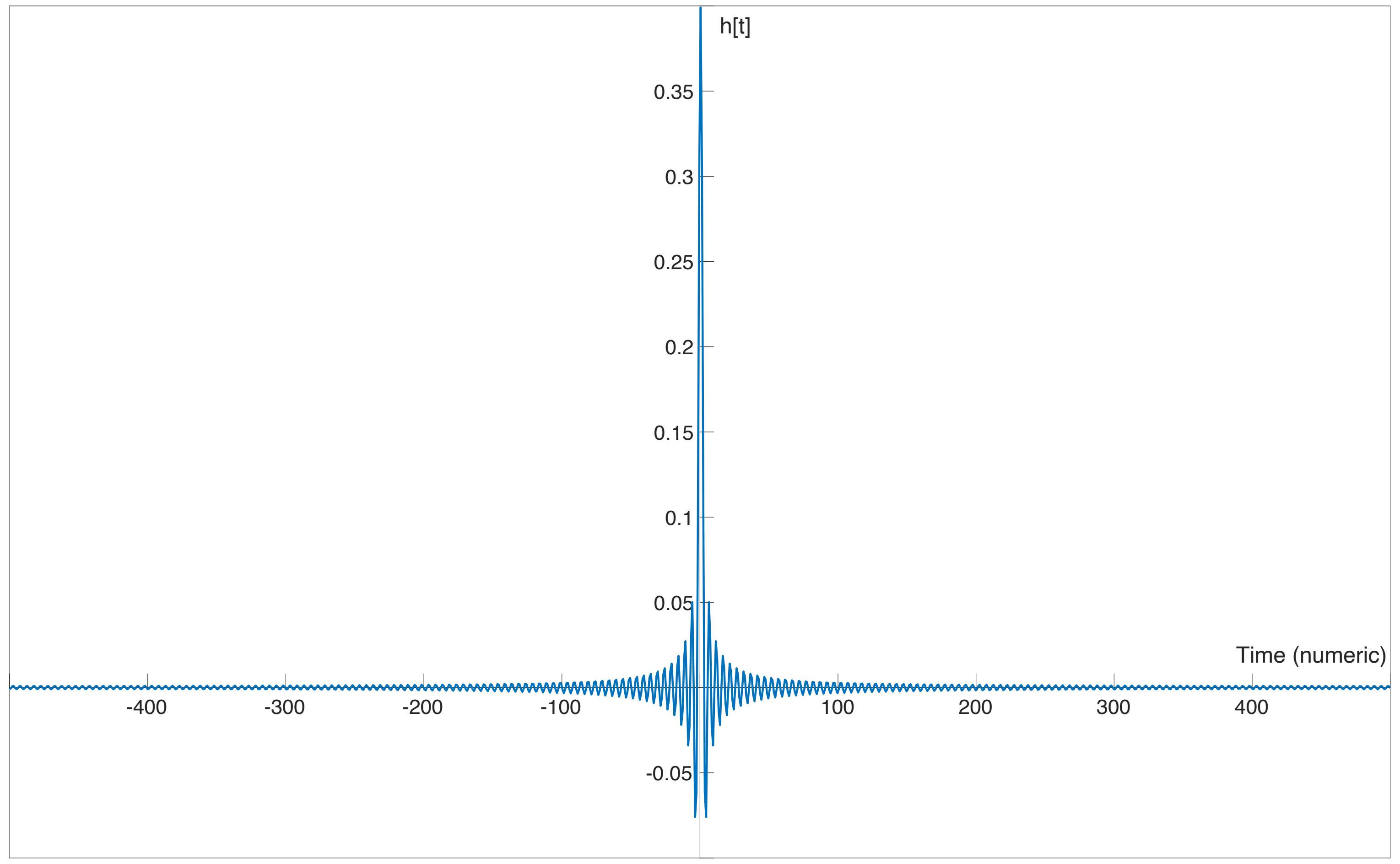
- Le filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $\nu_0$ es

$$\hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \in [-\nu_0, \nu_0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Sa réponse impulsionnelle est

$$h^{PB}_{\nu_0}[t] = 2\nu_0 \mathrm{sinc}[2\nu_0 t]$$



# PASSE-HAUT IDÉAL

- Le filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure $\nu_0$ e

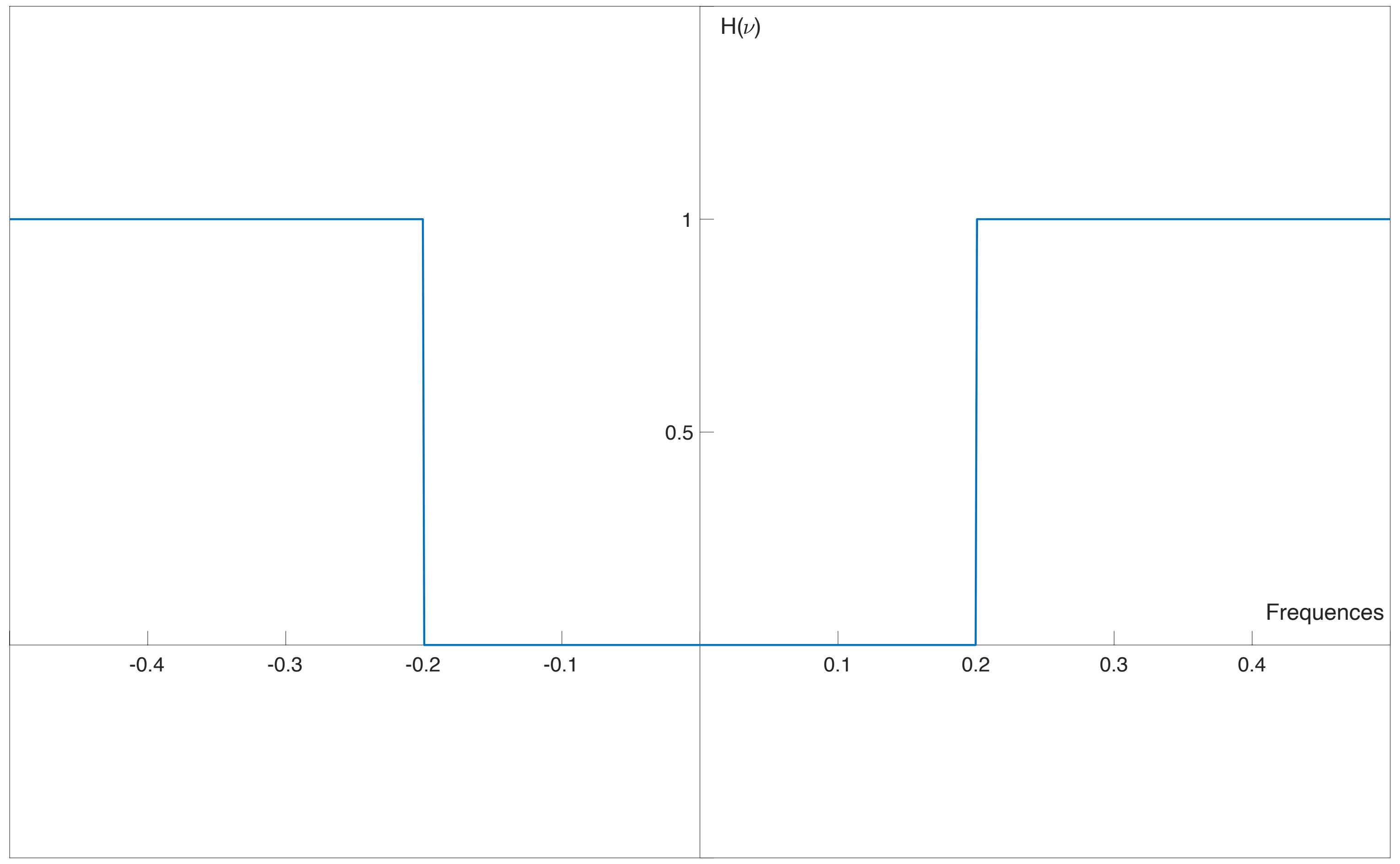
$$\hat{h}^{PH}_{\nu_0}(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \in [-\nu_0, \nu_0] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

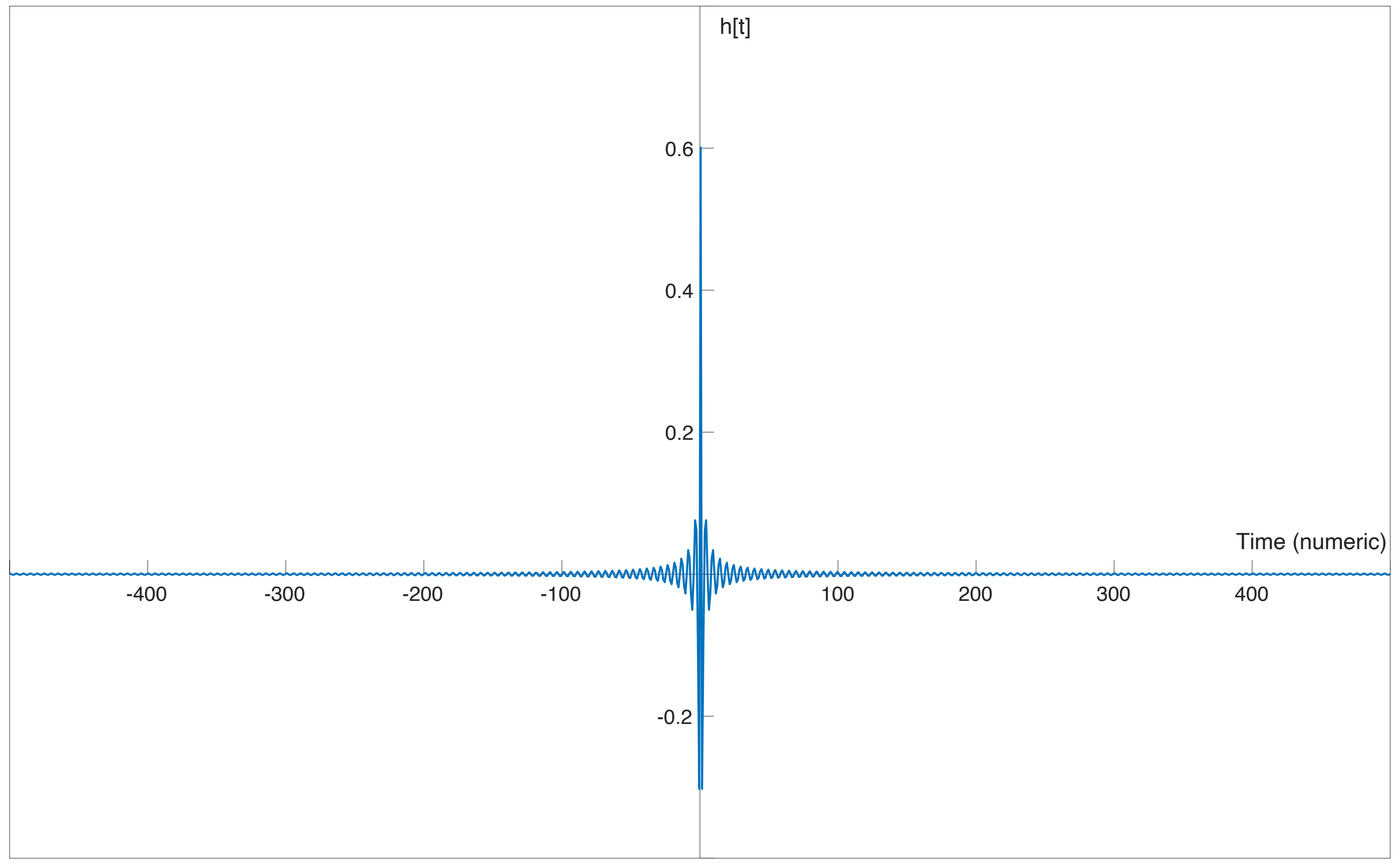
- Il s'exprime à l'aide d'un passe-bas

$$\hat{h}^{PH}_{\nu_0}(\nu) = 1 - \hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu)$$

- Sa réponse impulsionnelle est

$$h^{PH}_{\nu_0}[t] = \delta_0[t] - 2\nu_0 \text{sinc}(2\nu_0 t)$$

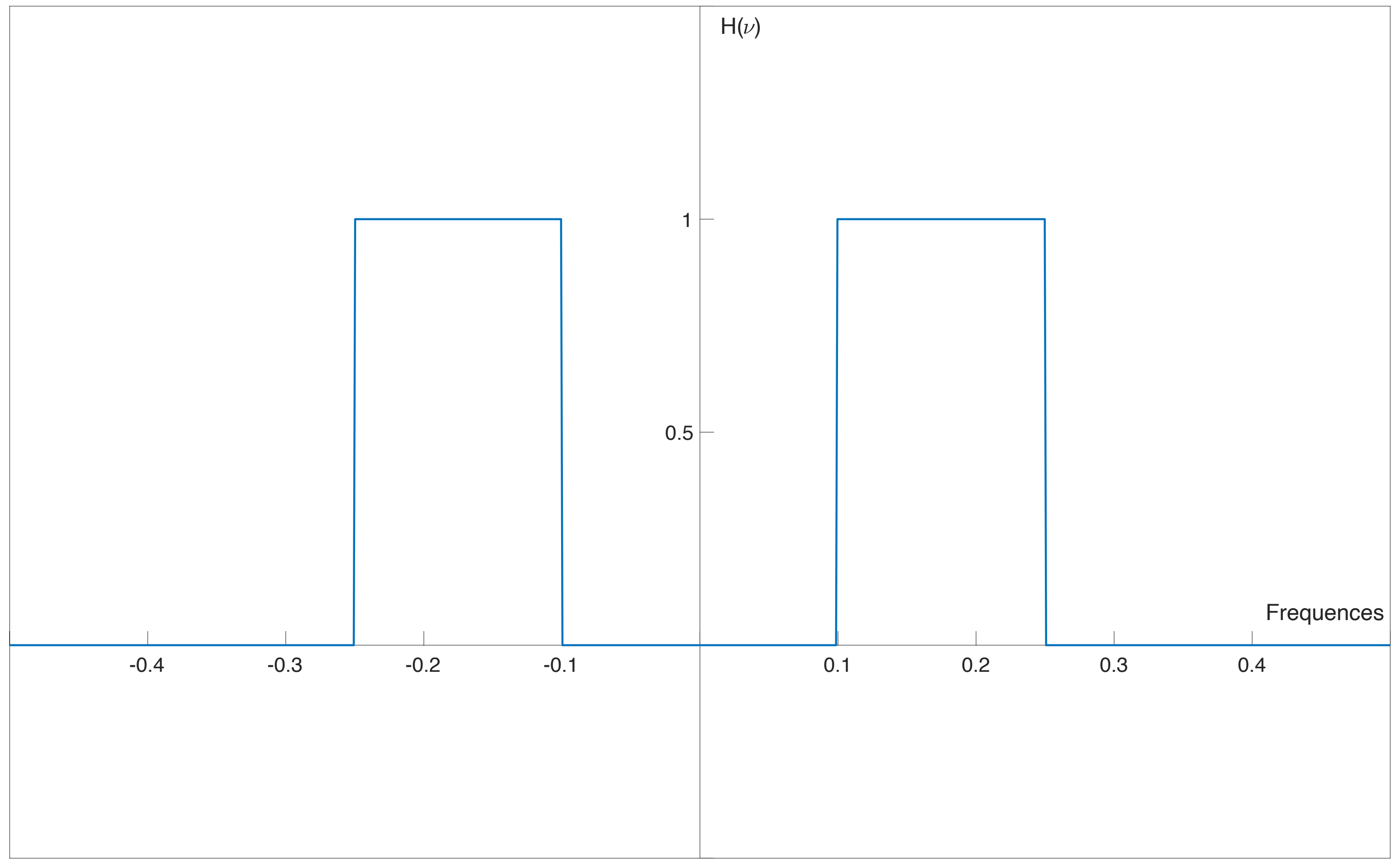


# PASSE-BANDE IDÉAL

- Le filtre passe-bande idéal de fréquences de coupure ı fréquence

$$\hat{h}^{Pbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \in [-\nu_1, -\nu_0] \cup [\nu_0, \nu_1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

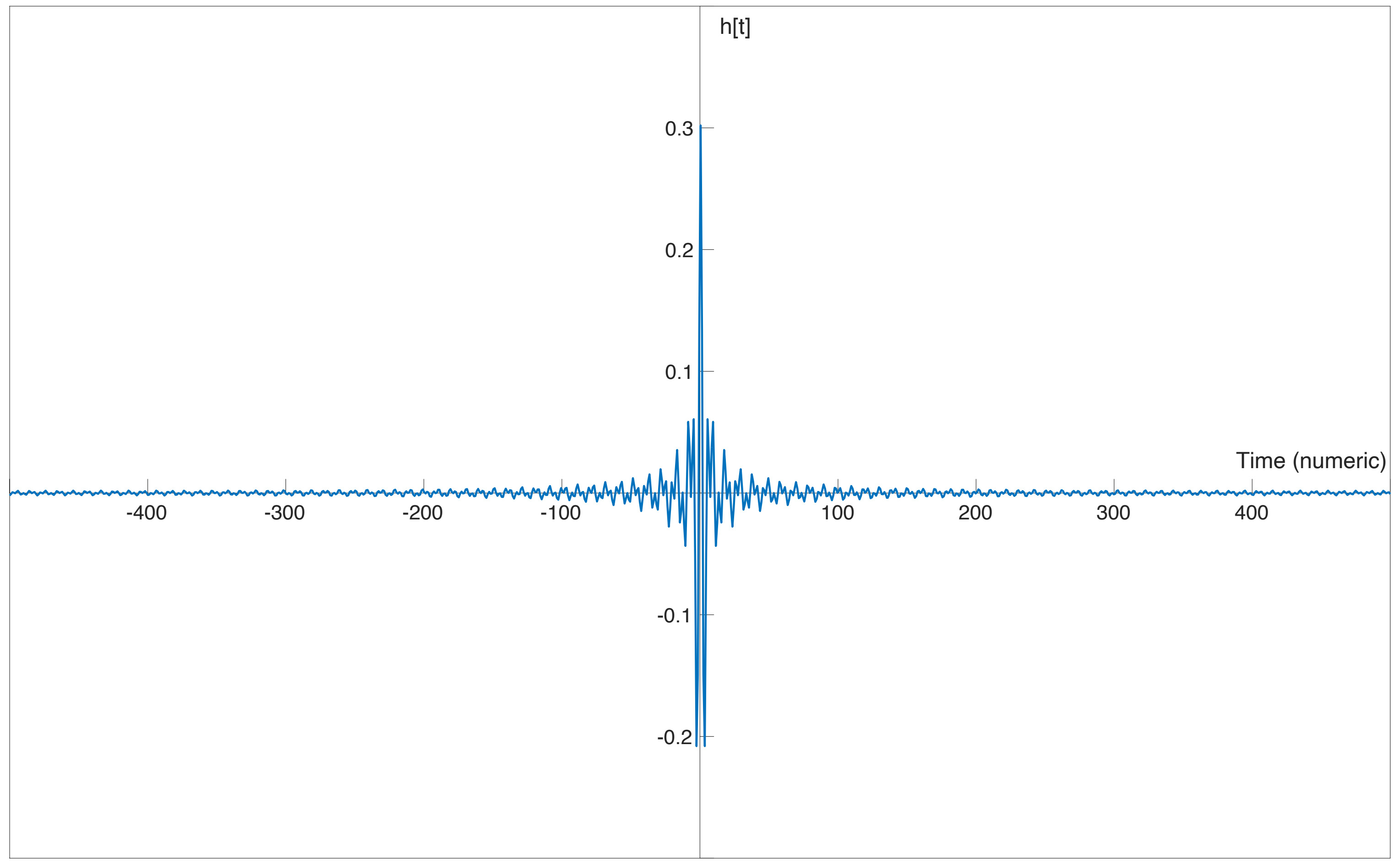



- Il s'exprime comme la différence de 2 passe-bas

$$\hat{h}^{Pbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = \hat{h}^{PB}_{\nu_1}(\nu) - \hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu)$$

- Sa réponse impulsionnelle est

$$h^{Pbande}_{\nu_0,\nu_1}[t] = 2\nu_1 \mathrm{sinc}[2\nu_1 t] - 2\nu_0 \mathrm{sinc}[2\nu_0 t]$$



# COUPE-BANDE IDÉAL

- Le filtre coupe-bande idéal de fréquences de coupure fréquence

$$\hat{h}^{Cbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \in [-\nu_1, -\nu_0] \cup [\nu_0, \nu_1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Il s'exprime à l'aide de 2 passe-bas

$$\hat{h}^{Cbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = 1 - \hat{h}^{PB}_{\nu_1}(\nu) + \hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu)$$

- Sa réponse impulsionnelle est

$$h^{Cbande}_{\nu_0,\nu_1}[t] = \delta_0[t] - 2\nu_1 \text{sinc}[2\nu_1 t] + 2\nu_0 \text{sinc}[2\nu_0 t]$$