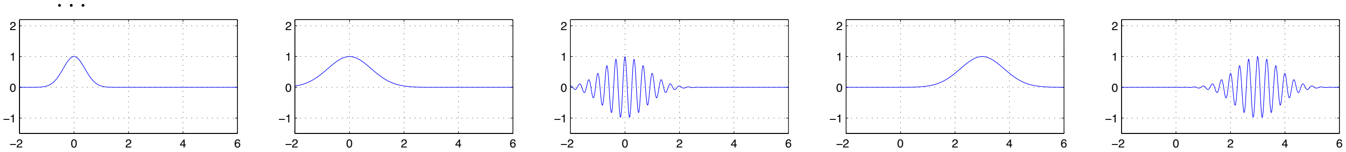
TD

Table des matières

Exercice 1. — *Quizz des transformée de Fourier*.L

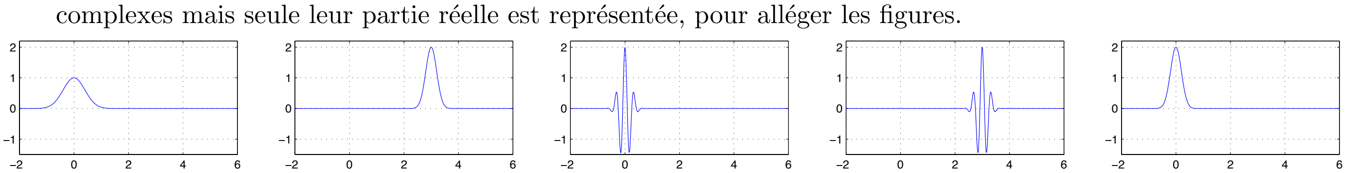
a figure suivante représente cinq signaux temporels réels à temps continu s_0 à s_4. Les signaux s_1 à s_4 ont été obtenus par des transformations simples du signal s_0 : modulation, décalage, dilatation, ...



s_0 s_1 s_2 s_3 s_4

(1) Identifier ces transformations, i.e. expliquer comment chacun des signaux s_1 à s_4 a été obtenu à partir de s_0.

La figure suivante représente leur transformée de Fourier ($\hat{s}_a$ à $\hat{s}_e$), *dans le désordre*...On sait cependant que $\hat{s}_a$ est la transformée de Fourier de s_0. NB : certaines transformées de Fourier sont complexes mais seule leur partie réelle est représentée, pour alléger les figures.



$\hat{s}_a$ $\hat{s}_b$ $\hat{s}_c$ $\hat{s}_d$ $\hat{s}_e$

(2) Reformer les couples (s_i, S_j), i.e. retrouvez la transformée de Fourier des signaux s_1, s_2, s_3, s_4 dans l'ensemble $\hat{s}_b, \hat{s}_c, \hat{s}_d, \hat{s}_e$. Justifier.

Exercice 2. — *Transformées de Fourier à temps discret.*

Calculer les transformées de Fourier des signaux suivants :

(1) $x[t] = c_1\delta_a[t] + c_2\delta_b[t]$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$

(2) $x[t] = \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k\delta_k[t]$ avec $c_k \in \mathbb{R}\ \forall k$

(3) $x[t] = a^t\theta[t]$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $|a| < 1$

(4) $x[t] = a^t\theta[t]$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $|a| > 1$

(5) $x[t] = \frac{1}{4^t}\theta[t-2]$

Exercice 3. — *Transformée de Fourier des doubles exponentielles (à temps discret).*

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier des signaux :

$$x(n) = \alpha^{|n|}\,, n \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha \in]-1, 1[\ , \alpha \neq 0$$

ainsi qu'à quelques-unes de leurs propriétés.

(1) Calculez $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(n)$.

(2) Vérifiez les propriétés de symétrie de $\hat{x}$. Vérifiez également que :

$$\hat{x}(0) = \sum_{\mathbb{Z}} x(n)\,.$$

(3) Étudiez en détail le comportement de $\hat{x}(\nu)$. Que dire du contenu spectral du signal $x(n)$: plutôt basse fréquence, haute fréquence, ... ?

(4) Que se passe-t-il lorsque α tend vers -1, 1, ou 0 ?

Exercice 4. — *Effet d'écho par filtrage FIR.*

Soit le système donné par l'équation suivante :

$$s[n] = e[n] + \alpha e[n-D]$$

où $e[n]$ est l'entrée et $s[n]$ la sortie. $\alpha \geq 0$ est appelé le facteur d'atténuation et $D \in \mathbb{Z}$ le delay. Ce système permet d'implémenter un simple écho.

(1) Le système est-il linéaire ? Invariant ?

(2) À quelle condition sur D le système est-il causal ?

(3) Déterminer la réponse impulstionnelle h du système. Le système est-il toujours stable ?

(4) Donner la fonction de transfert $H(z)$ de h avec sa région de convergence.

(5) Donner la transformée de Fourier $\hat{h}(\nu)$ du système et son module au carré.

(6) **question facultative :** Étudier $|\hat{h}(\nu)|^2$, en donner une représentation graphique sommaire pour deux valeurs de D. Quelle est l'effet de D ?

Exercice 5. — *Étude d'un filtre dérivateur à temsp discret.*

On considère le filtre $\mathcal{F}$ défini par la relation de entrée-sortie suivante (e est l'entrée s la sortie) :

$$s(n) = e(n) - e(n-1) \ , \forall n \in \mathbb{Z} \ ,$$

(1) $\mathcal{F}$ est-il causal ?

(2) Déterminez sa réponse impulsionnelle $h[t]$. Le filtre est-il stable ?

(3) Si elle existe, donner la réponse en fréquence $\hat{h}(\nu)$

(4) S'il existe, donner le spectre d'amplitude $|\hat{h}(\nu)|$. Le filtre est-il passe-bas, passe-haut ou passe-bande ?

(5) Calculez la sortie de $\mathcal{F}$ lorsqu'il est attaqué par le signal :

$$e(n) = \begin{cases} 1 - |n|/N & \text{si} \quad n = -N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$