COURS 3: SYNTHÈSE DE FILTRES IIR

TRAITEMENT DU SIGNAL

PRÉLIMINAIRES

SOUS MATLAB

- Lire le fichier audio
- Représenter ses échantillons sur une échelle adaptée
- Représenter son spectre sur une échelle adaptée
- Créer un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c choisie, dans le domaine fréquentiel.
- Représenter le spectre du filtre passe bas idéal.

FILTRE, FONCTION DE TRANSFERT ET RÉPONSE IMPULSIONNELLE

- Rappeler le lien entre la fonction de transfert du filtre et sa réponse impulsionnelle.
- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici?
- Calculer à la main la réponse impulsionnelle idéale de ce filtre.
- Cette réponse impulsionnelle est-elle finie ? stable ? causale?

FILTRE, FONCTION DE TRANSFERT ET RÉPONSE IMPULSIONNELLE

- Rappeler le lien entre la fonction de transfert du filtre et sa réponse impulsionnelle.
  - *la fonction de transfert est la TZ de la RI. Si la RI admet une TF, la fonction de transfert peut être confondue avec la réponse en fréquence.*

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k} \quad ; \quad \hat{h}(\nu) = H(e^{i2\pi k\nu}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-i2\pi k\nu}$$

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici?
  - *par inversion de la réponse en fréquence (ie, de sa TF)*

FILTRE, FONCTION DE TRANSFERT ET RÉPONSE IMPULSIONNELLE

- Calculer à la main la réponse impulsionnelle idéale de ce filtre.

$$h_{\nu_0}^{\mathrm{pb}}[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(\nu) e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu$$

$$= \left[\frac{1}{i2\pi n} e^{i2\pi n\nu}\right]_{-\nu_0}^{\nu_0}$$

$$= \frac{e^{i2\pi n\nu_0} - e^{-i2\pi n\nu_0}}{i2\pi n}$$

$$= \frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n}$$

- Cette réponse impulsionnelle est-elle finie ? stable ? causale?
  - *Cette RI est à support infini, est stable (elle admet une TF), mais n'est pas causal (définie pour* $n < 0$*)*

RAPPELS: FILTRES FIR

RAPPELS ET DÉFINITIONS

- Soit un filtre de réponse impulsionnelle$h$. Alors le signal$y$, version filtrée du signal x par h, est donnée par l'***équation de filtrage*** ou ***équation aux différences***:

$$y[n] = (h \star x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

- Comment réaliser un tel filtre en "temps réel" ?

FILTRES FIR

- Soit un filtre de réponse impulsionnelle h. Le filtre est dit "***à réponse impulsionnelle finie***" (FIR) si h est finie:

$$h = \{h[-k_1], \ldots, h[0], \ldots, h[k_2]\}$$

- L'équation aux différences s'écrit alors:

$$y[n] = \sum_{k=-k_1}^{k_2} h[k]x[n-k]$$

- On appelle ***ordre*** du filtre, le nombre d'échantillons de sa réponse impulsionnelle.

FILTRES FIR

- Un filtre FIR est forcément **stable**
- Il n'est pas forcément **causal**
- Un filtre FIR est **réalisable *ssi il est causal***

APPLICATION: ANALYSE DU FILTRE IDÉAL

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel
- Quels problèmes va-t-on rencontrer si l'on échantillonne la réponse impulsionnelle actuelle pour établir l'équation aux différences du filtre FIR?
- Le filtre sera-t-il réalisable? Pourquoi?

APPLICATION: ANALYSE DU FILTRE IDÉAL

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

- Quels problèmes va-t-on rencontrer si l'on échantillonne la réponse impulsionnelle actuelle pour établir l'équation aux différences du filtre FIR?
  - *La réponse impulsionnelle est à support infini: on ne peut pas stocker une infinité d'échantillons en mémoire.*
- Le filtre sera-t-il réalisable? Pourquoi?
  - *Le filtre n'est pas réalisable car il n'est pas causal.*

FILTRE FIR VS FILTRE IDEAL

- **But:** Synthétiser un filtre RIF **causal**, qui s'approche le plus possible du filtre idéal recherché.
- RI du filtre RIF recherché VS RI du filtre idéal
  - Le filtre idéal a une RI h a support infini, non causal:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

  - Le filtre RIF que l'on cherche étant causal, sa réponse impulsionnelle h doit être causale:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{K} h[k]x[n-k]$$

MÉTHODE PAR TRONCATURE

- Soit un filtre idéal de fonction de transfert H et de réponse impulsionnelle h. Une méthodologie simple de synthèse d'un filtre RIF causal d'ordre $N+1$ est:

1. Calcul de la RI idéal par TF inverse:

$$h^{\text{ideal}}[n] = \int_{-1/2}^{1/2} H(\nu) e^{i2\pi n\nu}\,\mathrm{d}\nu$$

2. Troncature de la RI idéal

$$h^{\text{tronc}} = \left\{h^{\text{ideal}}[-N/2], \ldots, h^{\text{ideal}}[N/2]\right\}$$

3. Application d'un retard sur h^{tronc}, afin de décaler les indices pour rendre le filtre causal

$$h^{\text{RIF}}[n] = h^{\text{tronc}}[n - N/2]$$

APPLICATION

SYNTHÈSE D'UN FILTRE FIR PASSE-BAS : FENÊTRAGE

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage à h^{ideal}
- Afficher avec une échelle adaptée le gain fréquentiel du filtre FIR obtenu, en dB.
- Comparer au gain du filtre idéal
- Proposer une implémentation compatible avec le temps réel du filtre FIR ainsi obtenu.

RETOUR SUR LE FILTRAGE NUMÉRIQUE

ANALYSE DE L'APPROCHE FIR

- On approche un filtre idéal par un filtre FIR:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \simeq \sum_{k=0}^{K-1} h[k]x[n-k] \ .$$

- Exemple du Passe-Bas:

$$h^{ideal}[n] = \frac{\sin(2\pi\xi_0 n)}{\pi n} \ .$$

  - Les coefficients de la réponse impulsionnelle de ce filtre décroissent en $\frac{1}{N}$.
  - Si l'on veut approcher ce filtre avec une erreur d'environ 10^{-6}, il faudra de l'ordre de un million de coefficients !
  - Il faut donc compter dix milliard d'opérations par secondes pour traiter un signal de paroles échantillonné à 10kHz.

FILTRES RÉCURSIFS

- Idée: utiliser des filtres récursifs.
- On cherche y sous la forme:
- $$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a[k]y[n-k]$$
- Le coefficient de sortie $y[n]$ dépends des coefficients précédents déjà calculé !
- Le coefficient $y[n]$ est obtenu par filtrage des $x[m]$ **antérieurs** à n **et** filtrage des$y[m]$ **antérieur** à n en utilisant les filtres de RI $\{b[0], \ldots, b[M]\}$et $\{a[1], \ldots, a[N]\}$.
- Si cette équation a une solution unique, alors c'est un filtre récursif.
- On suppose $M \leq N$. N est l'ordre du filtre.

FILTRES RÉCURSIFS: ANALYSE

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a[k]y[n-k]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a[k]y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b[k]x[n-k]$$

- Après TZ:

$$Y(z)\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) = X(z)\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)$$

$$\Leftrightarrow V(z) = H(z)U(z) \ .$$

- Avec

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b[k]z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a[k]z^{-k}} \ .$$

- La fonction de transfert est une **fraction rationnelle**. Le filtre existe ssi le dénominateur ne s'annule jamais

FILTRES RÉCURSIFS: AR VS ARMA

- Filtre autorégressif ou AR

$$H(z) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} a[k] z^{-k}} .$$

$$y[n] = x[n] - \sum_{k=1}^{N} a[k] y[n-k]$$

- Filtre autorégressif à moyenne mobile ou ARMA

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b[k] z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a[k] z^{-k}} .$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b[k] x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a[k] y[n-k]$$

FILTRES IIR RÉALISABLES

- Causalité: Un filtre est causal ssi H est défini pour tout $|z| > r$
- Stabilité:
  - Un filtre est stable ssi H est défini pour tout $|z| = 1$.
  - Un filtre IIR est stable ssi les pôles z_d sont tels que $|z_d| \neq 1$

- Un filtre IIR est réalisable ssi H est défini pour tout $|z| > r$ avec $r < 1$

SYNTHESE DE FILTRE IIR

MÉTHODE GÉNÉRALE

- Principales étapes
  - Définir un gabarit de filtre analogique
  - Approcher ce gabarit par la fonction de transfert d'un filtre de type donné (Butterworth, Tchebychev, …)
  - Transformer la fonction de transfert analogique en fonction de transfert numérique

FILTRAGE ANALOGIQUE

- Domaine temporel

$$y(t) = h(t) * x(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)x(t-s)\mathrm{d}\, s$$

- Transformée de Laplace

$$Y(p) = H(p)X(p)$$

- Avec

$$H(p) = \int_{0}^{+\infty} h(t)e^{-ipt}\mathrm{d}\, t$$

- H est la fonction de transfert du filtre de RI h

MÉTHODES DE CONVERSION D'UN FILTRE ANALOGIQUE EN NUMÉRIQUE

- Invariances impulsionnelle (on cherche $h[n]$ comme l'échantillonnage de $h(t)$)
- Transformation d'Euler (Approximation d'une dérivée continue en discret)
- Transformation bilinéaire (la plus classique)

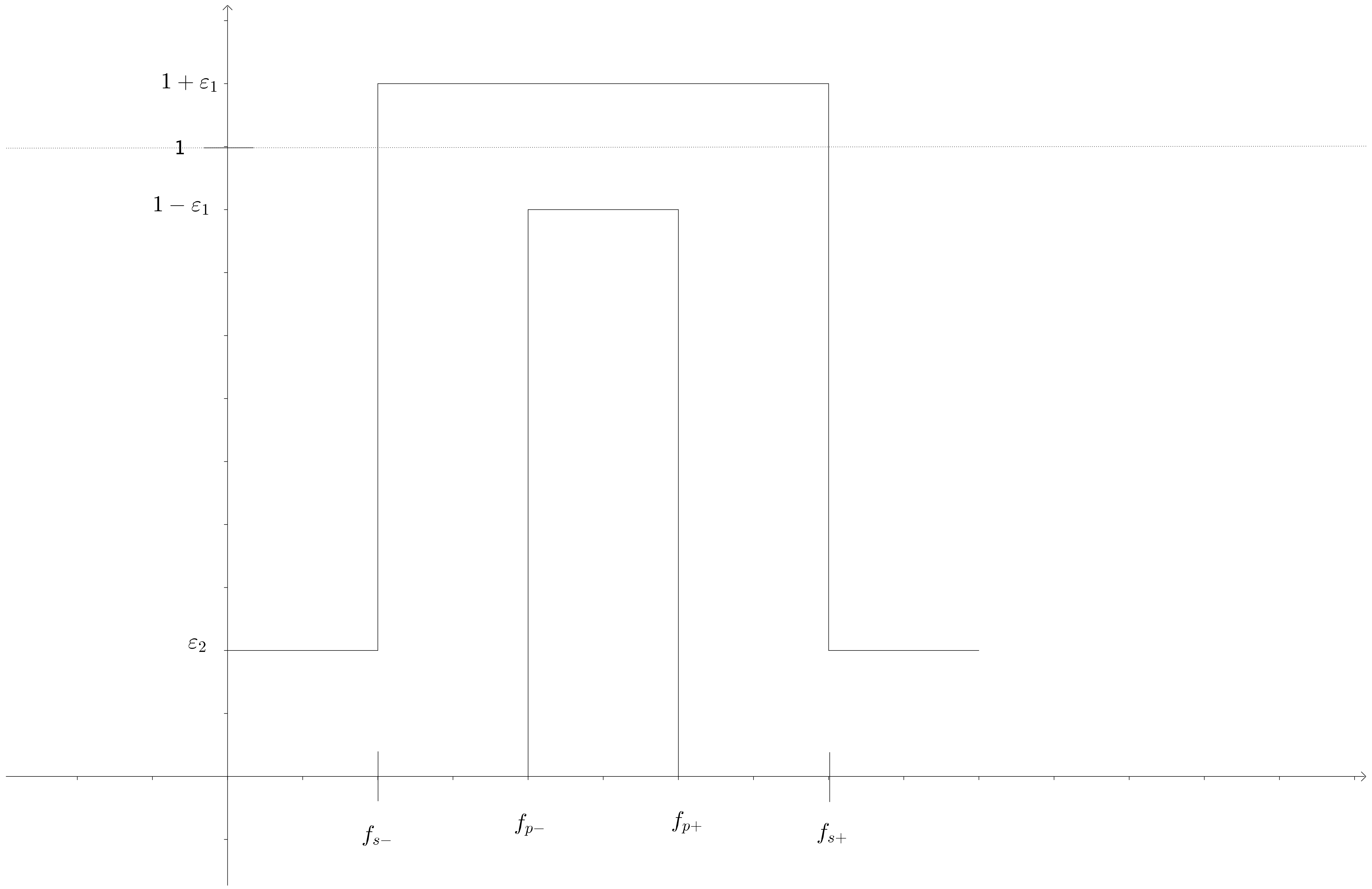
CHOIX DU FILTRE IIR ET GRANDES FAMILLES

SPÉCIFICATIONS

- Spécification générale
  - Choix du type: passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande…
  - Choix du Gabarit
- Spécifications particulières
  - Bande passante $[f_{p-}, f_{p+}]$
  - Bande atténuée $[0, f_{a-}]$ $[f_{a+}, 0.5]$
  - Ondulation en bande passante ε_1
  - Ondulation en bande atténuée ε_2

SPÉCIFICATION

- Spécifications particulières
  - Bande passante $[f_{p-}, f_{p+}]$
  - Bande atténuée $[0, f_{a-}]$ $[f_{a+}, 0.5]$
  - Ondulation en bande passante ε_1
  - Ondulation en bande atténuée ε_2



3 GRANDES FAMILLES

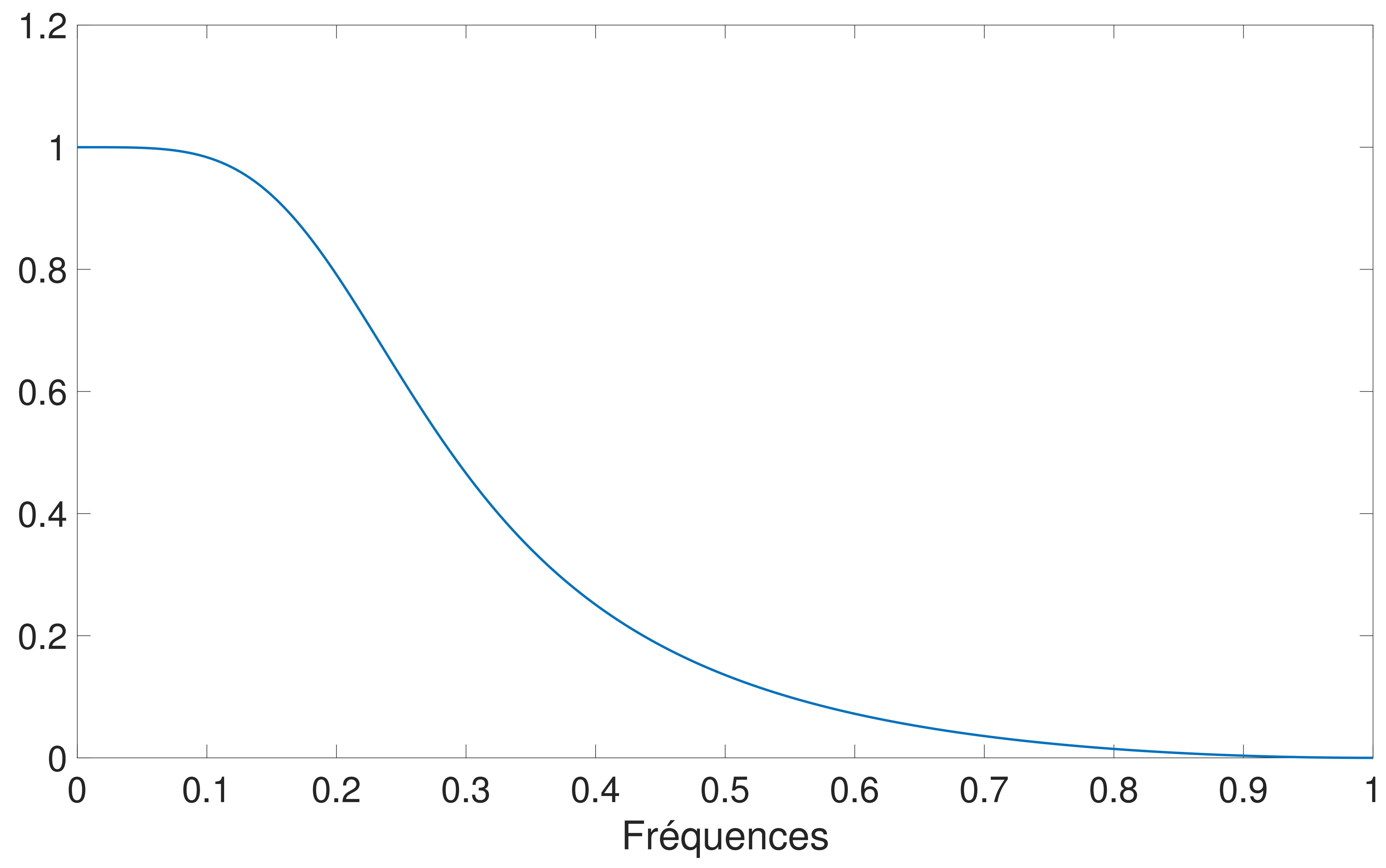
- Filtres de Butterworth
- Filtres de Tchebychev I et II
- Filtre Elliptique
- (+ Filtres de Bessel)

FILTRES DE BUTTERWORTH

- Fonction de tranfert

$$\left|H(f)\right|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2N}}$$

- Caractéristiques
  - Fréquence de coupure f_c
  - Ordre N
  - Module de la fonction de transfert monotone



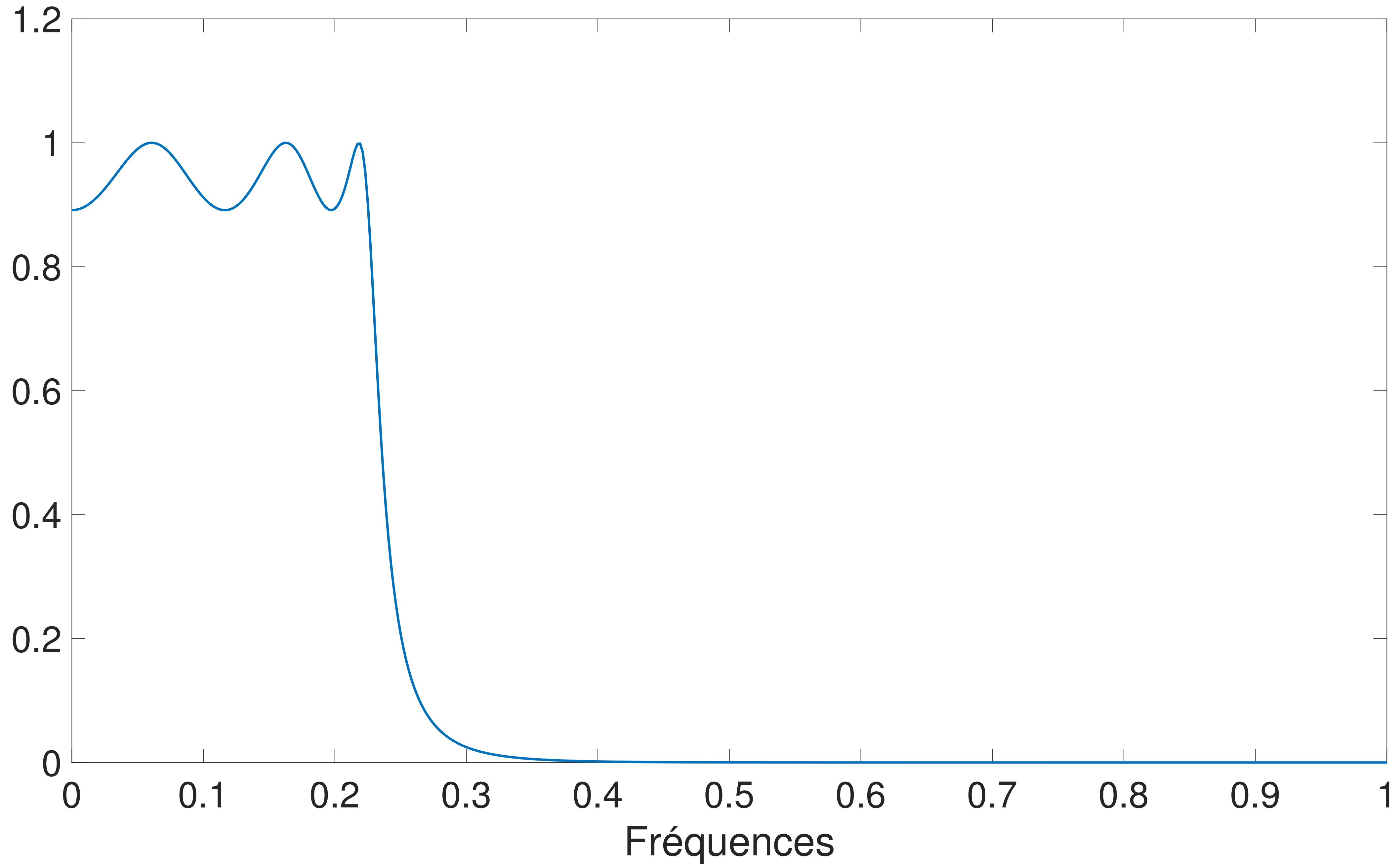
FILTRES DE TCHEBYCHEV I

- Fonction de tranfert

$$\left|H(f)\right|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{f}{f_p}\right)}$$

où T_N est un polynôme de Tchebychev de degré N

- Caractéristiques
  - Bande passante f_p
  - Ondulation en bande passante ε
  - Ordre N
  - Monotone en bande atténuée



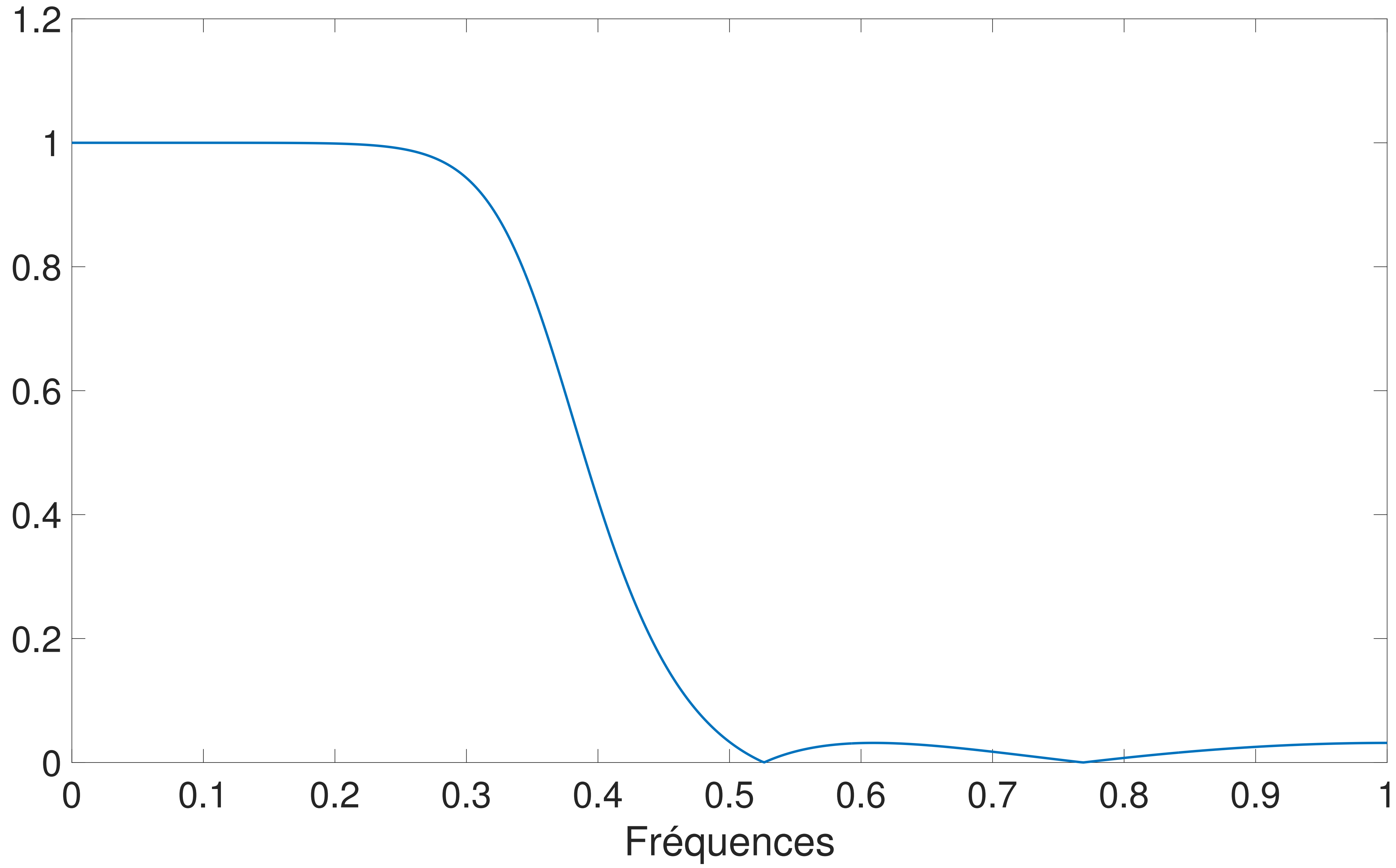
FILTRES DE TCHEBYCHEV II

- Fonction de tranfert

$$\left|H(f)\right|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{f_s}{f}\right)}$$

où T_N est un polynôme de Tchebychev de degré N

- Caractéristiques
  - Bande atténuée f_s
  - Ondulation en bande atténuée ε
  - Ordre N
  - Monotone en bande passante

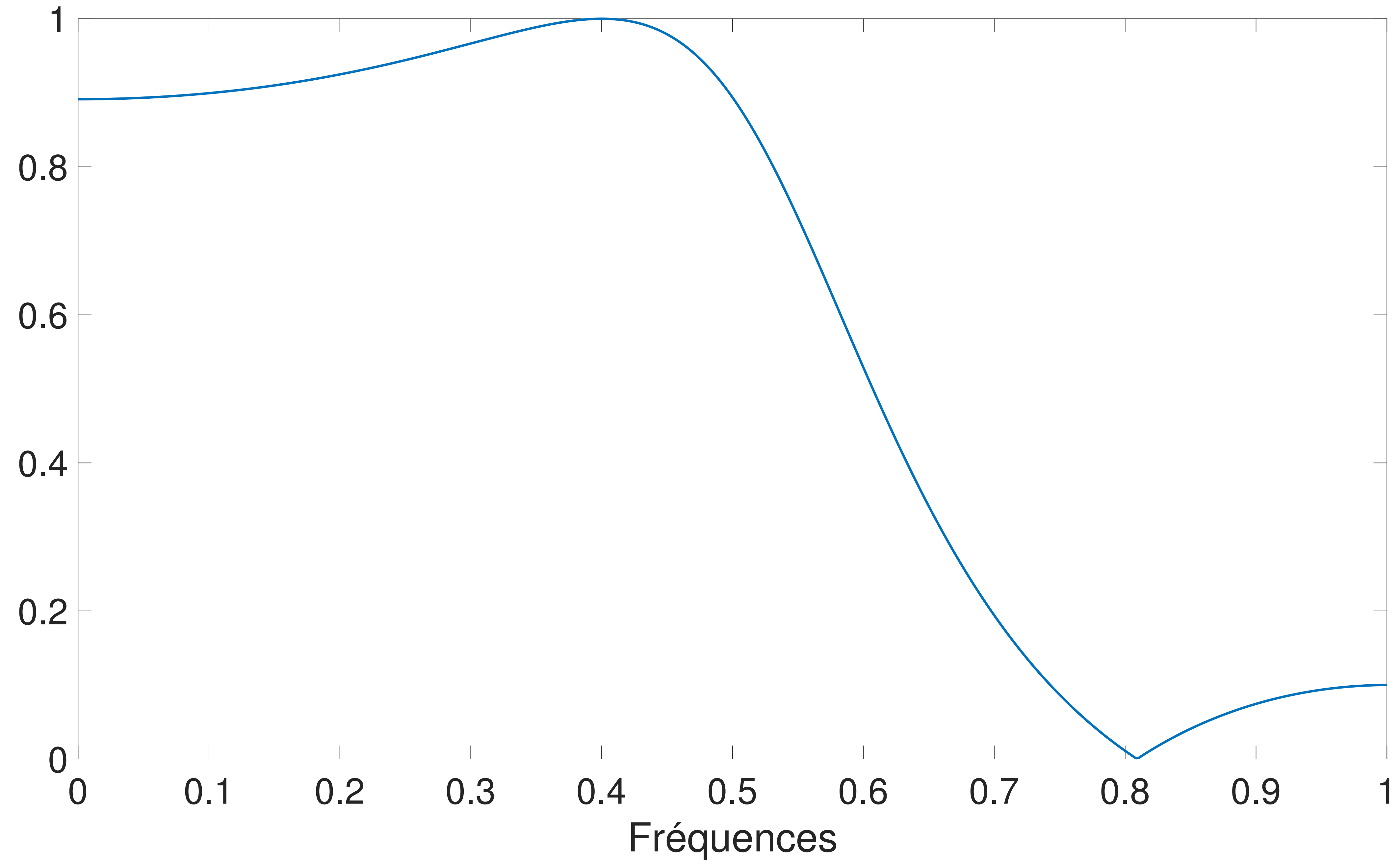


FILTRES ELLIPTIQUES

- Fonction de tranfert

$$\left|H(f)\right|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_N^2\left(\frac{f}{\sqrt{f_p f_s}}\right)}$$

- Caractéristiques
  - Bande passante f_p
  - Bande atténuée f_s
  - Ondulation en bande passante et en bande atténuée ε
  - Ordre N



FILTRES FIR OU IIR ?

- Particularités des filtres FIR
  - Bande de transition large
  - Synthèse simple
  - Stabilité
  - Facilité d’implémentation
- Particularités des filtres IIR
  - Bande de transition étroite
  - Synthèse à partir d'un filtre analogique
  - Peut être instable