COURS 1: ANALYSE SPECTRALE ET FILTRAGE IDEAL

TRAITEMENT DU SIGNAL

PRÉLIMINAIRES

SOUS MATLAB

- Lire le fichier audio stereo et le convertir en un signal mono. Penser à enregistrer la fréquence d'échantillonnage !
- Après écoute du signal
  - Estimez sa durée approximative
  - Repérez les caractéristiques remarquables de ce son (répétition de motif, sons graves, sons aigus)
- Représentez les échantillons temporels selon un axe adapté en seconde.

ETUDE SPECTRALE

RAPPELS: TRANSFORMÉE DE FOURIER A TEMPS DISCRET

- Soit $\mathbf{x} = (x[0], \ldots, x[t], \ldots)$, un signal à temps discret.
- Sa transformée de Fourier à temps discret est donnée par:

$$\hat{\mathbf{x}}(\nu) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} x[t] e^{-i2\pi\nu t}$$

- $\hat{x}(\nu)$ est une fonction de la variable **continue ν, 1-périodique**
- Transformée de Fourier inverse:

$$x[t] = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\mathbf{x}}(\nu) e^{i2\pi\nu t} \, \mathrm{d}\,\nu$$

RAPPELS: THÉORÈME DE PLANCHEREL-PARSEVAL

Soit $u[t], v[t] \in \ell^2(\mathbb{Z})$ deux signaux numériques d'énergie finie, de transformée de Fourier $\hat{u}(\nu)$ et $\hat{v}(\nu)$. Alors

$$\langle u[t], v[t] \rangle = \langle \hat{u}(\nu), \hat{v}(\nu) \rangle$$

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} u[t]v[t] = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{u}(\nu)\overline{\hat{v}(\nu)}\ \mathrm{d}\nu$$

$$\|u\|_2^2 = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \left| u[t] \right|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \left| \hat{u}(\nu) \right|^2\ \mathrm{d}\nu = \|\hat{u}\|_2^2$$

Il y a conservation de l'énergie dans le domaine fréquentiel

RAPPELS: SPECTRE D'UN SIGNAL

Soit $x[t]$ un signal à temps discret et $\hat{x}(\nu)$ sa transformée de Fourier. On définit

- Le spectre d'amplitude de $x[t]$:

$$\nu \mapsto \left|\hat{x}(\nu)\right|$$

- Le spectre de puissance de $x[t]$:

$$\nu \mapsto \left|\hat{x}(\nu)\right|^2$$

Le spectre du signal nous renseigne directement sur son contenu fréquentiel (forte présence ou quasi-absence d'une fréquence ν)

RAPPELS: QUELQUES PROPRIÉTÉS DE CALCULS

- Symétrie: si $\forall t,\ u[t] \in \mathbb{R}$, alors

$$\hat{u}(\nu) = \overline{\hat{u}(-\nu)} \text{ et } \left|\hat{u}(\nu)\right| = \left|\hat{u}(-\nu)\right|$$

- Linéarité: $v[t] = au_1[t] + u_2[t]$

$$\hat{v}(\nu) = a\hat{u}_1(\nu) + \hat{u}_2(\nu)$$

- Translation: $v[t] = u[t-k]$

$$\hat{v}(\nu) = e^{-i2\pi k}\hat{u}(\nu)$$

- Convolution: soit $w[t] = (u * v)[t]$, alors

$$\hat{w}(\nu) = \hat{u}(\nu)\,\hat{v}(\nu)$$

RAPPELS: SIGNAUX DIGITAL

CF. Cours APP 3 Signaux DIGITALs

APPLICATION

ETUDE SPECTRALE

- Que représente le spectre d'un signal ?
- Quel outil mathématique utilise-t-on pour l'obtenir à partir du signal temporel ?
- Pourquoi cet outil est adaptée à la représentation spectrale ?
- Quelle est la fréquence max contenue dans le signal ?
- Quel algorithme permet de calculer ce spectre ?
- Représentez le spectre du signal, avec un échelle adaptée en Hz

ETUDE SPECTRALE

- Que représente le spectre d'un signal ?
  - *son contenu fréquentiel (penser aux notes de musiques !)*
- Quel outil mathématique utilise-t-on pour l'obtenir à partir du signal temporel ?
  - *la transformée de Fourier*
- Quelle est la fréquence max contenue dans le signal ?
  - *D'après le théorème d'échantillonnage:* $f_{max} = \frac{f_e}{2}$
- Quel algorithme permet de calculer ce spectre ?
  - *la FFT*
- Représentez le spectre du signal, avec un échelle adaptée en Hz

FILTRAGE IDEAL

DÉFINITIONS

- Un filtre est un système ***linéaire*** et ***invariant dans le temps***. Il peut donc s'écrire comme une ***convolution***.

- Soit $\mathcal{S}$ un filtre. La réponse impulsionnelle h de $\mathcal{S}$ correspond à la sortie du système à l'impulsion unité (Dirac). Ainsi

$$h = \mathcal{S}(\delta)$$

- Et l'on a pour tout signal x :

$$y = \mathcal{S}(x) = h * x = x * h \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

- Pour les signaux finis, la convolution suppose les signaux périodiques, de même période!

FILTRES RÉALISABLES

- Un filtre de réponse impulsionnelle h est réalisable ssi il est ***stable*** et ***causal***.
- Si un filtre est ***stable***, alors il admet une transformée de Fourier
- Réciproquement, si un filtre admet une transformée de Fourier inversible, alors il est ***stable***.
- Un filtre ***réalisable*** admet forcément une transformée de Fourier
- Si un filtre admet une transformée de Fourier il n'est pas forcément réalisable, car il peut ne pas être causal

FILTRES RÉALISABLES

- Un filtre de réponse impulsionnelle h est stable ssi

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < +\infty$$

- Un filtre de réponse impulsionnelle h est causal ssi h est causal, ie

$$h[k] = 0 \ \forall k < 0$$

- Un filtre de réponse impulsionnelle h est réalisable ssi il est stable et causal.

FILTRAGE ET TRANSFORMÉE DE FOURIER

- La réponse en fréquence, ou gain complexe, d'un filtre est sa transformée de Fourier (quand elle existe !).
- Soit $\mathcal{S}$ un filtre de impulsionnelle h et x un signal. On a

$$y = \mathcal{S}(x) = h * x$$

- Si h et x admettent une transformée de Fourier, on a dans le domaine fréquentiel:

$$\hat{y}(\nu) = \hat{h}(\nu) \cdot \hat{x}(\nu)$$

- filtrer un signal, c'est agir directement sur son spectre !

TRANSFORMÉE EN Z: INTRODUCTION

- Transformée de Fourier discrète: Soit un h un signal numérique (non nécessairement fini).

$$\hat{h}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-i2\pi k\nu}$$

- si on pose $z = e^{i2\pi\nu}$, la TF devient:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k}$$

- qui généralise la TF pour tout $z \in \mathbb{C}$ et donne la transformée en z

TRANSFORMÉE EN Z: DEFINITION

- Soit un h un signal numérique (non nécessairement fini). Sa transformée en z est donnée par

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

- pour tout $z \in \mathbb{C}$ telle que la série converge.
- On note $\mathscr{R}(z) = \left\{z \,|\, H(z) < +\infty\right\}$ **sa région de convergence**

TRANSFORMÉE EN Z ET FILTRAGE

- Soient x et y deux signaux numériques et soit h la réponse impulsionnelle d'un filtre, tels que

$$y = h * x$$

- On note $X(z)$, $Y(z)$, $H(z)$ leurs transformée en z, alors on a

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

- On appel ***fonction de transfert*** d'un filtre de réponse impulsionnelle h, sa transformée en z.

TRANSFORMÉE EN Z

- On se étudiera majoritairement dans ce cours les filtres stables. On confondra donc souvent sa fonction de transfert et sa réponse en fréquence
- Les propriétés de la TF s'adaptent directement à la TZ. En particulier, le décalage:
  - Soit $y[n] = x[n-k]$, alors

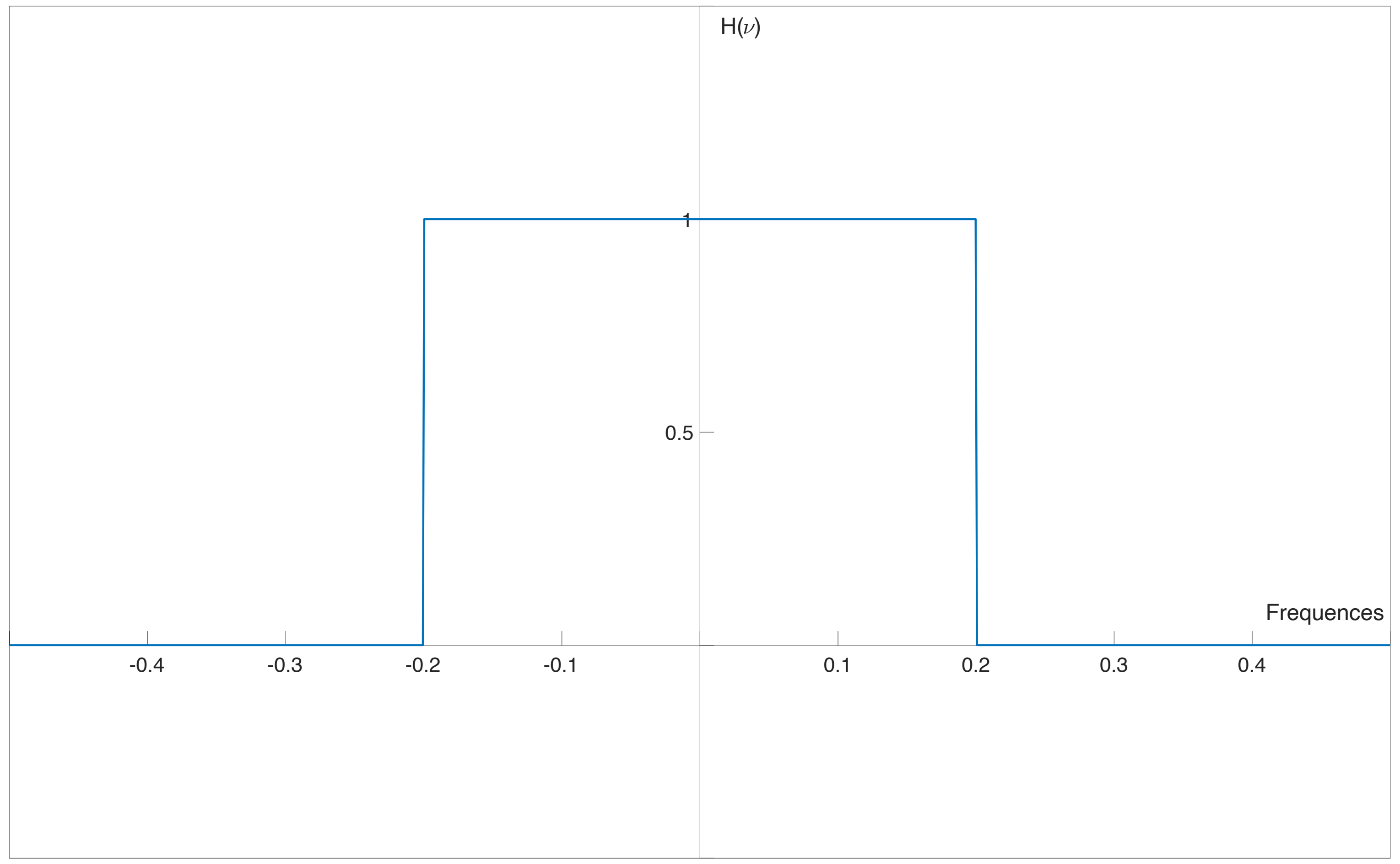
$$Y(z) = z^{-k}X(z)$$

FILTRES IDÉAUX

PASSE-BAS IDÉAL

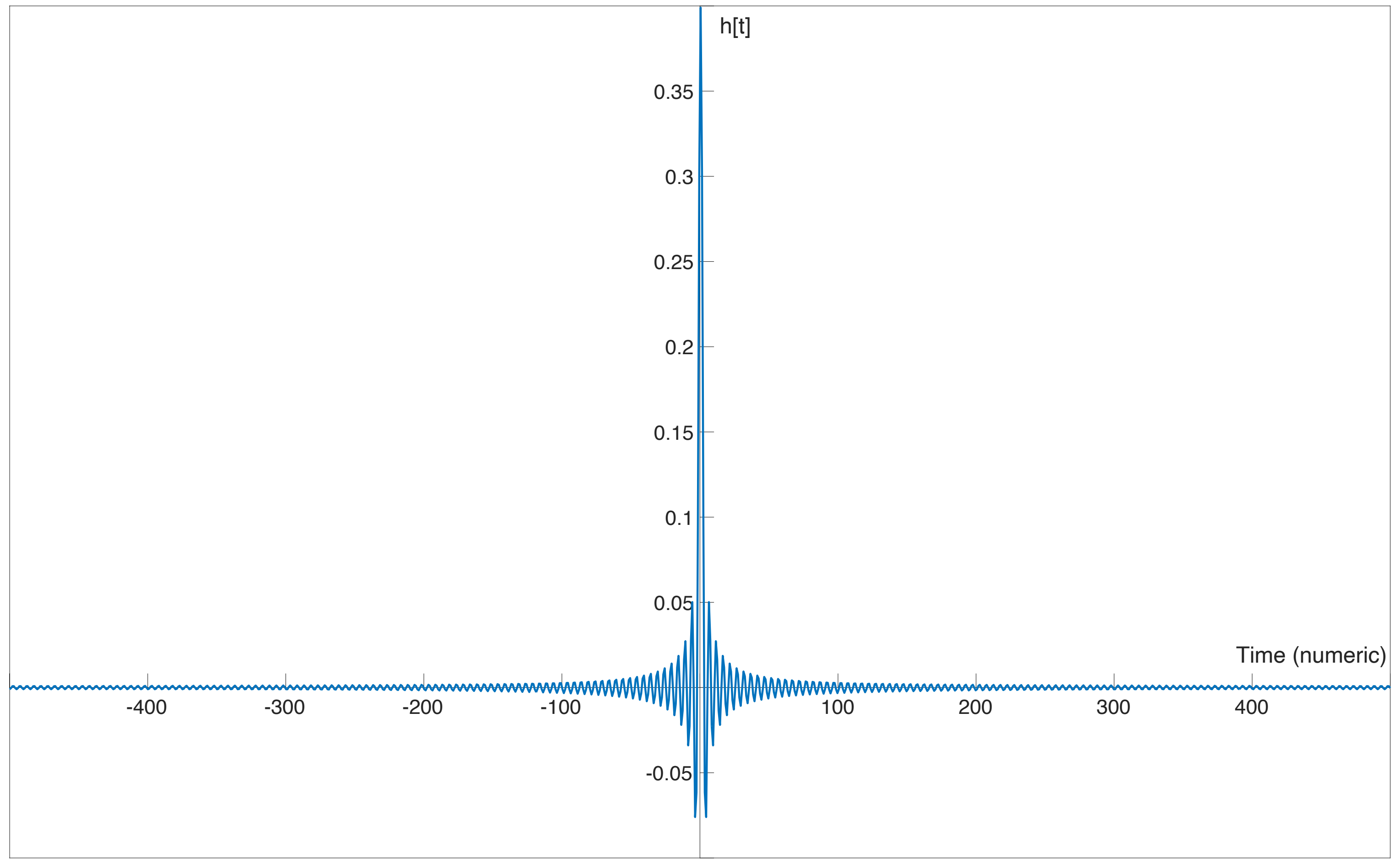
- Le filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure ν_0 est défini par sa réponse en fréquence

$$\hat{h}_{\nu_0}^{PB}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \in [-\nu_0, \nu_0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



- Sa réponse impulsionnelle est

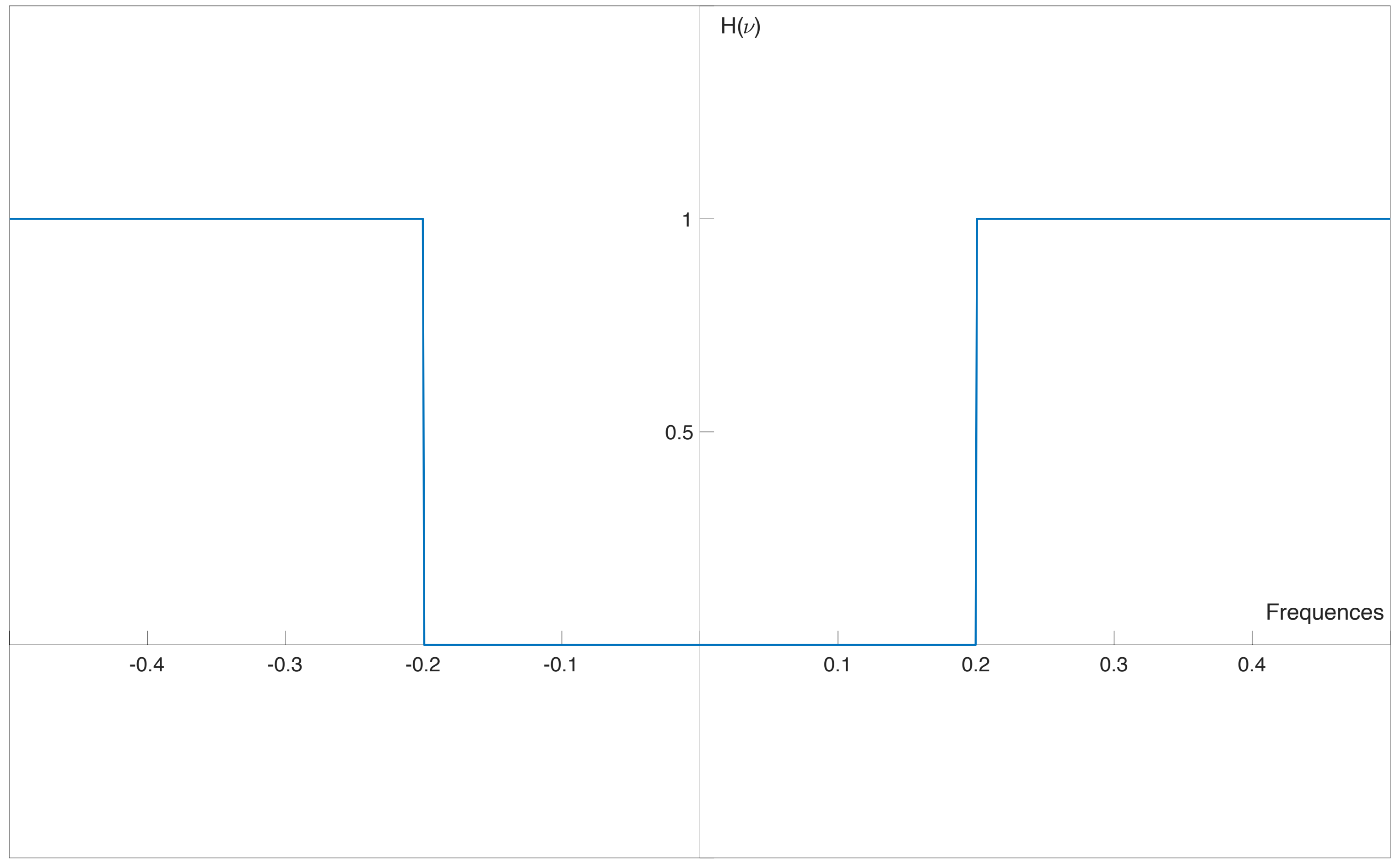
$$h_{\nu_0}^{PB}[t] = 2\nu_0 \mathrm{sinc}[2\nu_0 t]$$



PASSE-HAUT IDÉAL

- Le filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure ν_0 est définit par sa réponse en fréquence

$$\hat{h}^{PH}_{\nu_0}(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \in [-\nu_0, \nu_0] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

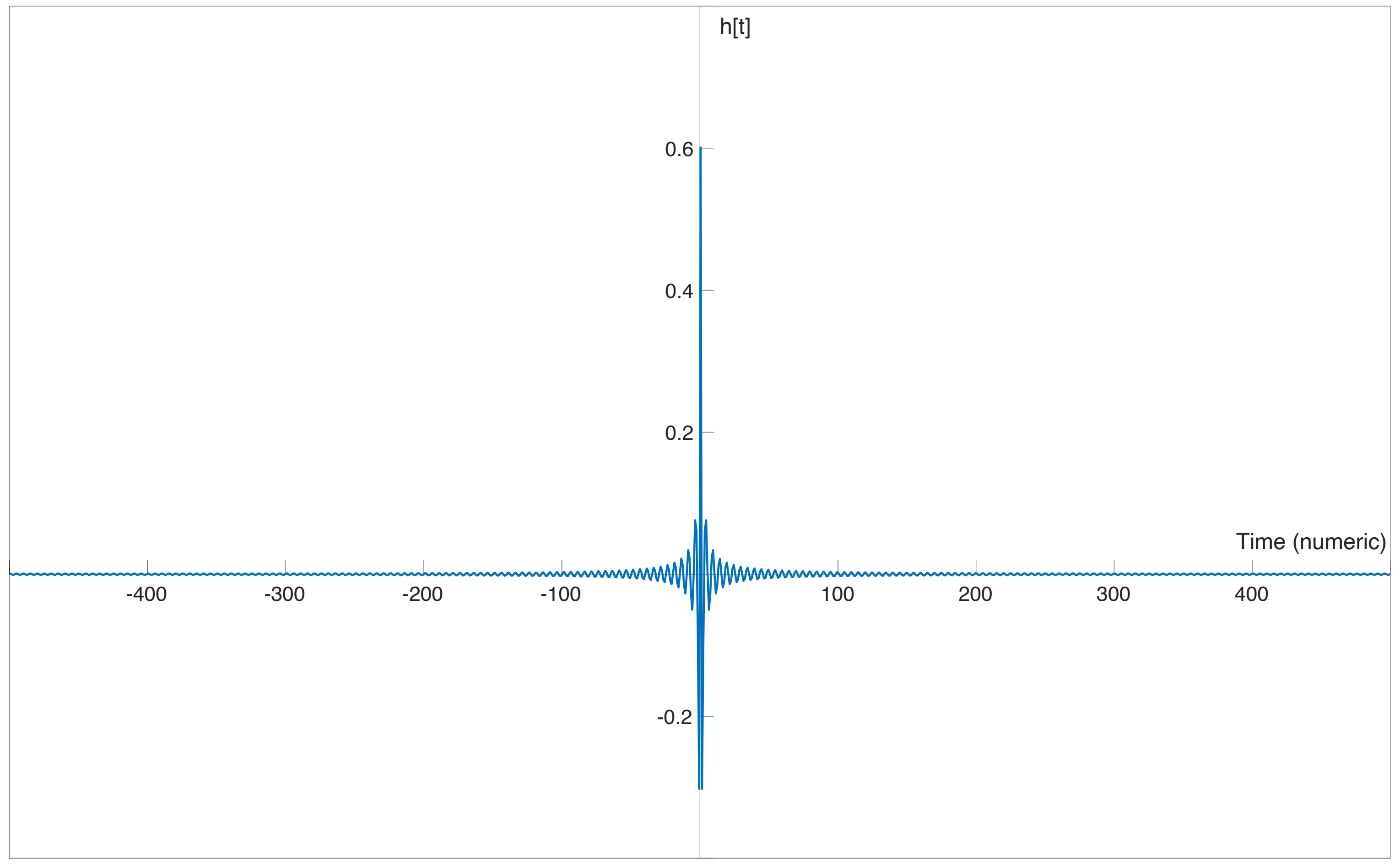


- Il s'exprime à l'aide d'un passe-bas

$$\hat{h}^{PH}_{\nu_0}(\nu) = 1 - \hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu)$$

- Sa réponse impulsionnelle est

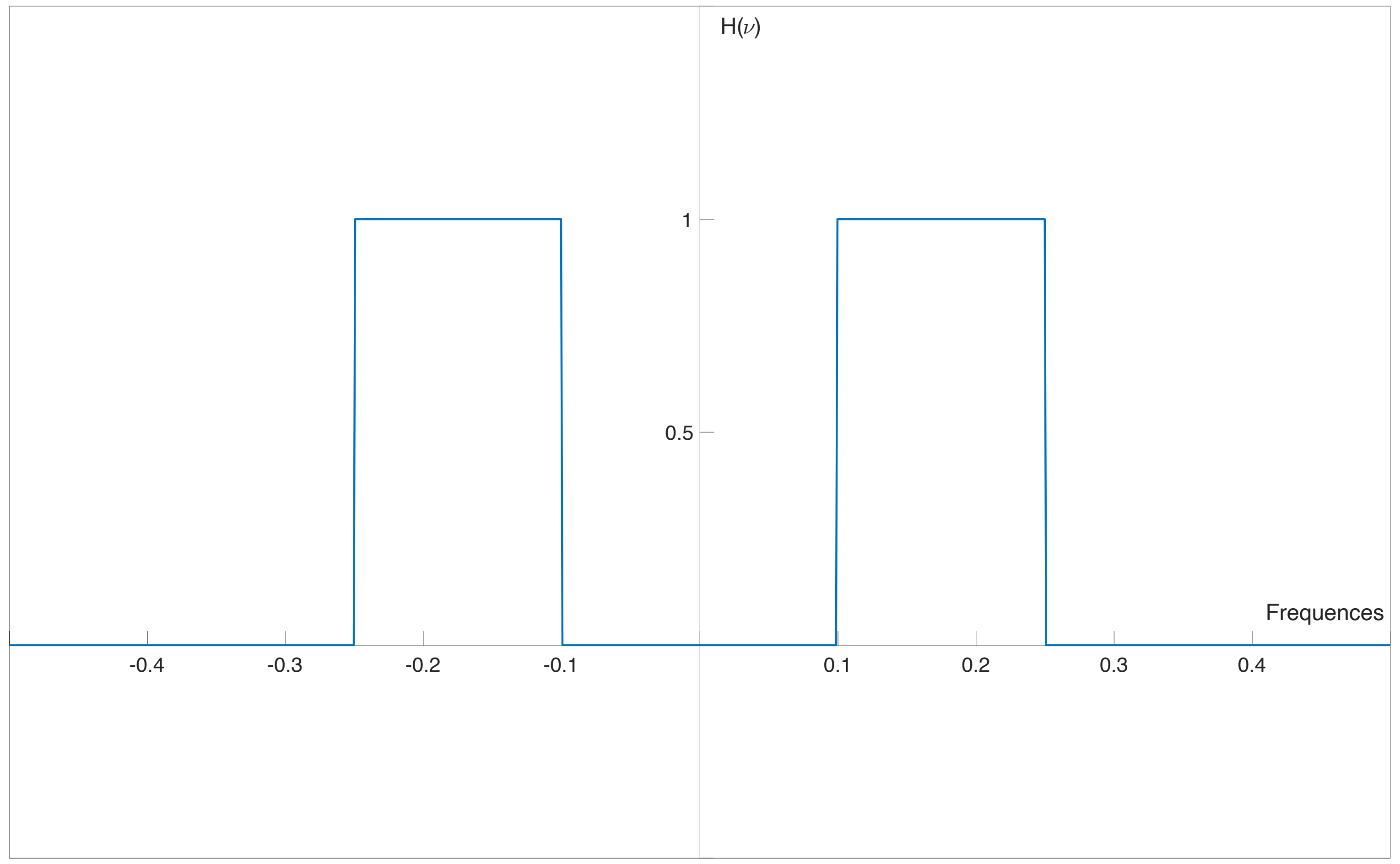
$$h^{PH}_{\nu_0}[t] = \delta_0[t] - 2\nu_0 \text{sinc}(2\nu_0 t)$$



PASSE-BANDE IDÉAL

- Le filtre passe-bande idéal de fréquences de coupure ν_0,ν_1 est définit par sa réponse en fréquence

$$\hat{h}^{Pbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \in [-\nu_1, -\nu_0] \cup [\nu_0, \nu_1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

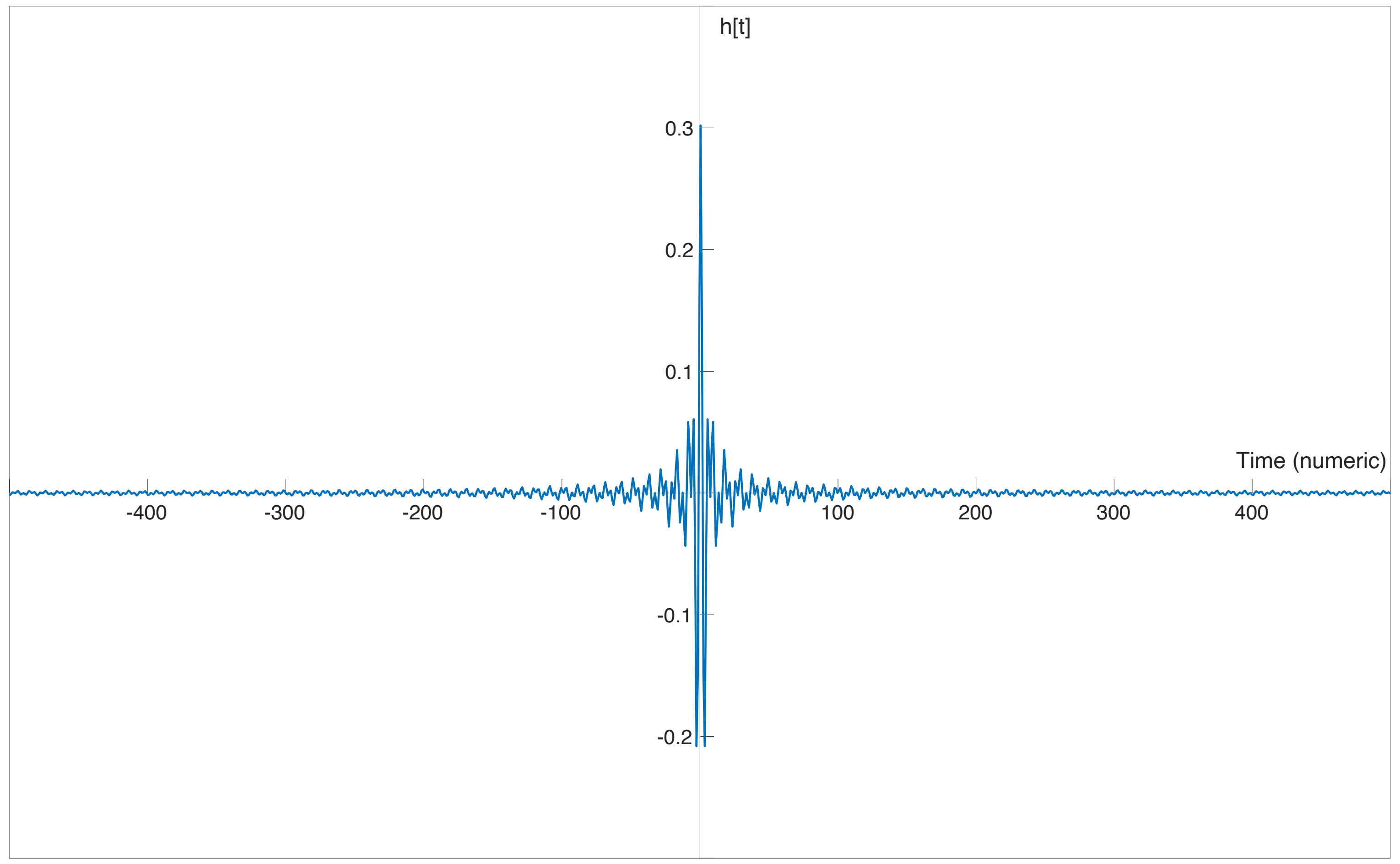


- Il s'exprime comme la différence de 2 passe-bas

$$\hat{h}^{Pbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = \hat{h}^{PB}_{\nu_1}(\nu) - \hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu)$$

- Sa réponse impulsionnelle est

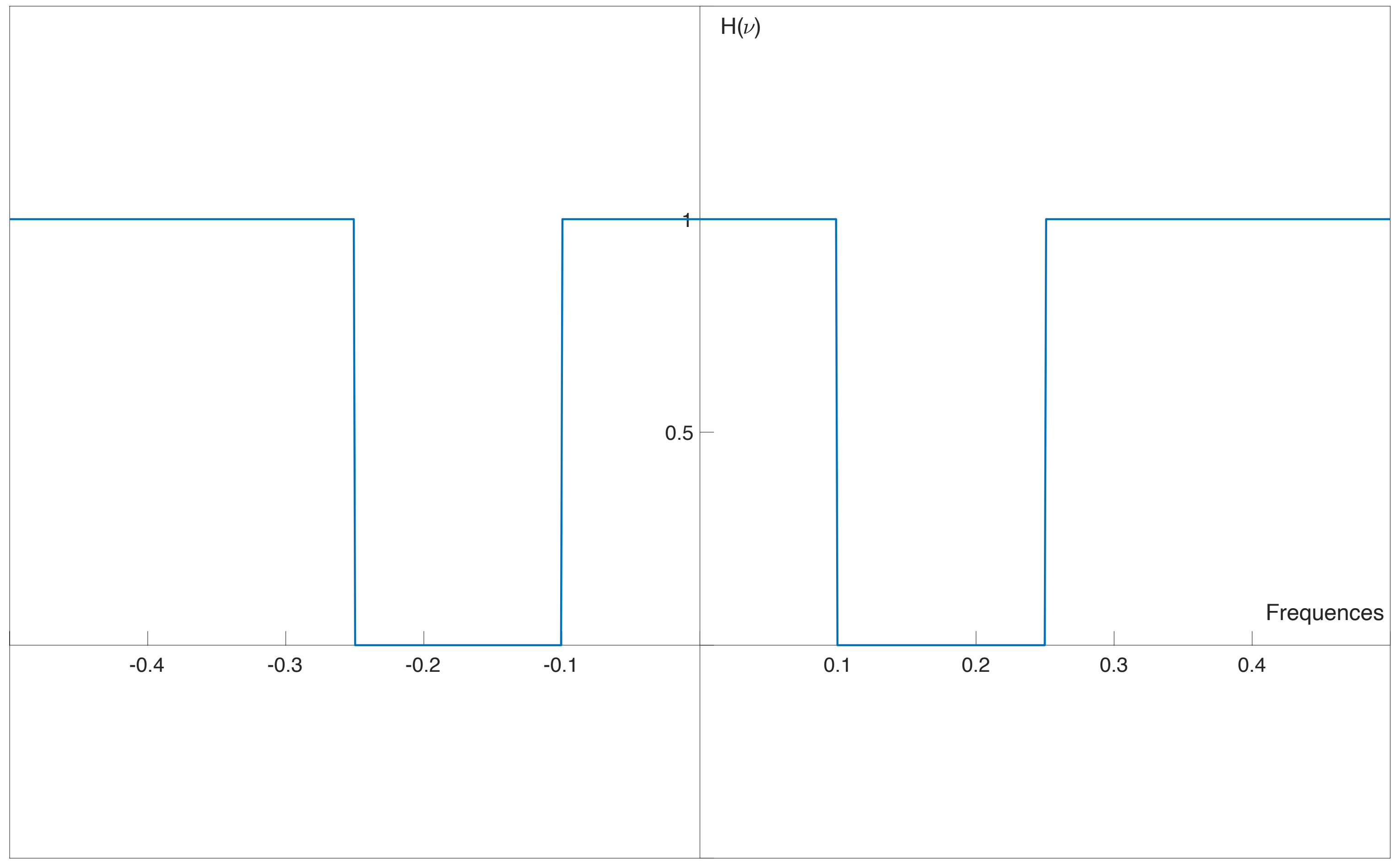
$$h^{Pbande}_{\nu_0,\nu_1}[t] = 2\nu_1 \mathrm{sinc}[2\nu_1 t] - 2\nu_0 \mathrm{sinc}[2\nu_0 t]$$



COUPE-BANDE IDÉAL

- Le filtre coupe-bande idéal de fréquences de coupure ν_0,ν_1 est définit par sa réponse en fréquence

$$\hat{h}^{Cbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \in [-\nu_1, -\nu_0] \cup [\nu_0, \nu_1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

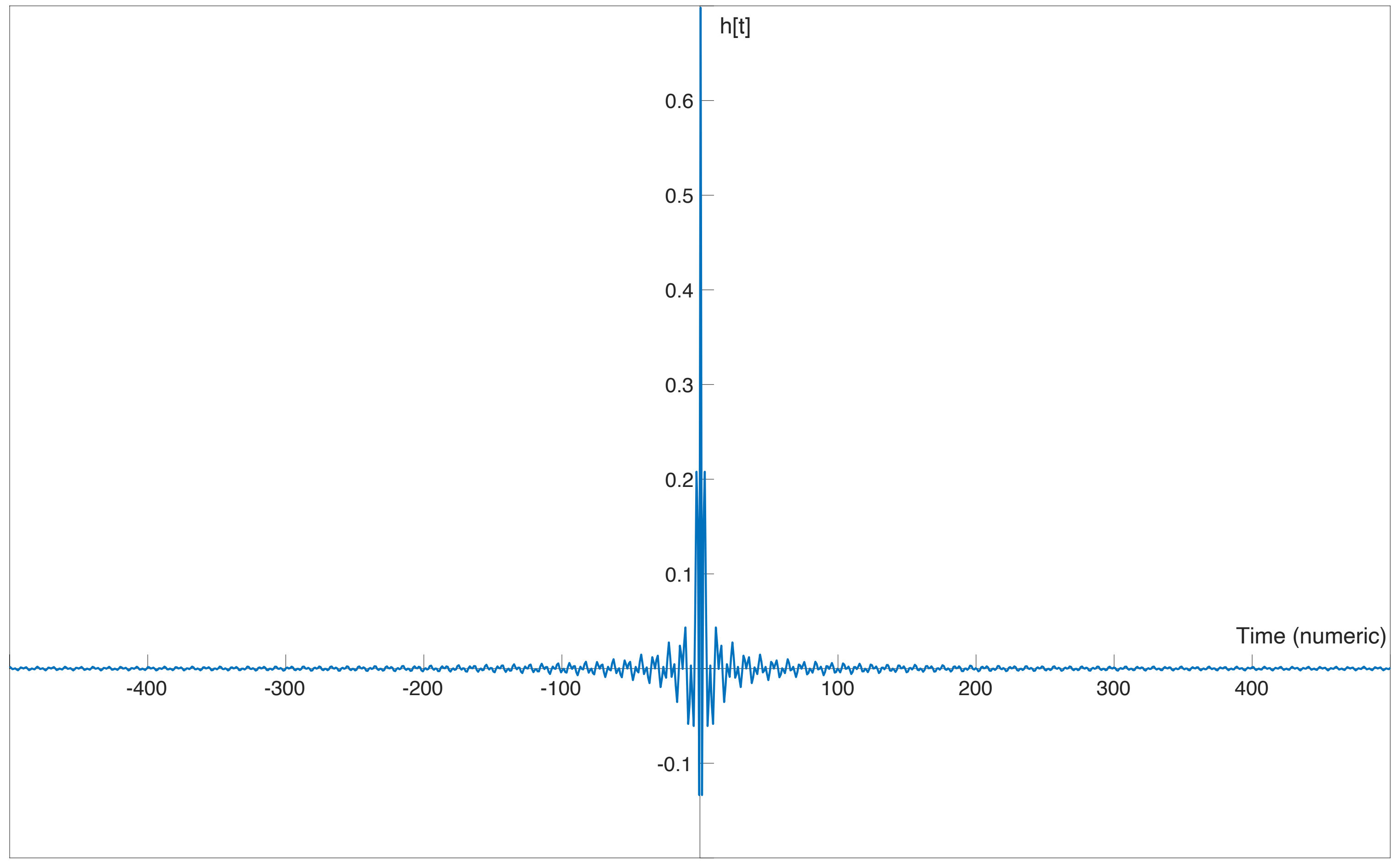


- Il s'exprime à l'aide de 2 passe-bas

$$\hat{h}^{Cbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = 1 - \hat{h}^{PB}_{\nu_1}(\nu) + \hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu)$$

- Sa réponse impulsionnelle est

$$h^{Cbande}_{\nu_0,\nu_1}[t] = \delta_0[t] - 2\nu_1 \mathrm{sinc}[2\nu_1 t] + 2\nu_0 \mathrm{sinc}[2\nu_0 t]$$



APPLICATION

CREATION D'UN FILTRE PASSE-BAS IDEAL

- Choisir une fréquence de coupure (ex: 8000 Hz)
- Créer le filtre, directement dans le domaine fréquentiel
- Afficher sa réponse en fréquence avec une échelle adaptée
- Effectuer le filtrage passe-bas idéal, dans le domaine fréquentiel
- Reconstruire le signal audio filtré
- Quel est l'inconvénient majeur de cette méthode ?