PARTIEL DE TRAITEMENT DU SIGNAL

Table des matières

Durée 2h
poly de cours "peu annoté" seul document autorisé

Exercice 1. — *Transformée de Fourier des doubles exponentielles.*

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier de :

$$x(t) = e^{-\alpha\,|t|}\,, t \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0\ ,$$

ainsi qu'à ses propriétés, notamment en terme de largeur à mi-hauteur.

(1) Calculer $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(t)$.

(2) Vérifier les propriétés de symétrie de $\hat{x}$. Vérifiez également que :

$$x(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu)\,\mathrm{d}\,\nu \text{ et } \hat{x}(0) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,\mathrm{d}\,t$$

et calculer ces quantités.

(3) Calculer Δt et $\Delta\nu$ les largeurs à mi-hauteur de $x(t)$ et $\hat{x}(\nu)$.

Exercice 2. — *Transformée en Z inverse d'une fraction rationnelle d'ordre 2.*

On s'intéresse ici à l'inversion de la fraction rationnelle d'ordre 2 :

$$H(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$.

(1) Calculez la transformée en Z inverse $\{h_n\}_n$ de H. On distinguera tous les cas possibles selon la région de convergence considérée.

(2) Donnez, dans chaque cas, la condition de stabilité de H. Dans les cas stables, donnez la transformée de Fourier $\hat{h}$ de $\{h_n\}_n$.

Exercice 3. — *Étude d'un filtre dérivateur à temsp discret.*

On considère le filtre $\mathcal{F}$ défini par la relation de entrée-sortie suivante (e est l'entrée s la sortie) :

$$s(n) = e(n) - e(n-1) \ , \forall n \in \mathbb{Z} \ ,$$

(1) $\mathcal{F}$ est-il linéaire, invariant, causal ?

(2) Déterminez sa réponse impulsionnelle. Le filtre est-il stable ?

(3) Calculez la sortie de $\mathcal{F}$ lorsqu'il est attaqué par le signal :

$$e(n) = \begin{cases} 1 - |n|/N & \text{si } \ n = -N, -N+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N-1, N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(4) Filtrage des fréquences pures. On attaque $\mathcal{F}$ par un signal monochromatique à la fréquence ν et d'amplitude $a \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire $e(n) = ae^{2i\pi\nu n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Calculer la sortie du filtre.

(b) Donner le type de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande).

Exercice 4. — *Filtre récursif.*

On considère le filtre récurssif définit par la relation entrée-sortie suivante :

$$s[n] = e[n] - b_1 s[n-1] - b_2 s[n-2]$$

où $e[n]$ est l'entrée, $s[n]$ la sortie, b_1 et b_2 deux paramètres réels.

(1) Le filtre est-il linéaire ? Invariant ? Causal ?

(2) Quel signal doit-on mettre en entrée pour obtenir $s[n] = \delta[n]$ en sortie ?

(3) Déterminer $H(z)$ la fonction de transfert en z correspondante. Donner les zéros et les pôles de $H(z)$. Préciser les régions de convergence concernées.

(4) Discuter la stabilité du filtre lorsque les deux pôles z_1 et z_2 sont complexes et conjugués. En particulier, que doivent vérifier b_1 et b_2 ?

(5) Déterminer la densité spectrale de puissance du filtre (quand c'est possible)