TD

Table des matières

Exercice 1. — *Formule sommatoire de Poisson.*

Soit f une fonction a décroissance rapide. Soit $S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT)$ telle que que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(t+nT)| < +\infty$.

(1) Montrer que S est T périodique

$$S(t+T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+T+nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+(n+1)T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT) = S(t)$$

(2) Calculer la décomposition en série de Fourier de S

$$\begin{aligned}
c_n(S) &= \frac{1}{T}\int_0^T S(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\int_0^T f(t+nT)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} f(u)e^{-i\frac{2\pi}{T}n(u-nT)}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} f(u)e^{-i\frac{2\pi}{T}nu}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} f(u)e^{-i\frac{2\pi}{T}nu}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\frac{2\pi}{T}nu}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)
\end{aligned}$$

$$S(t) = \sum_{n\in ZZ} \frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

(3) en déduire la formule sommatoire de Poisson

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT) = \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

$$S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT)$$

donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT) = \frac{1}{T}\sum_{n\in ZZ} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

(4) en déduire

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}\,(m)$$

formule précédente en $t = 0$ et $T = 1$

(5) Soit $\delta_\tau(t) = \delta(t-\tau)$. Montrer que

$$\hat{\delta}_\tau(\nu) = e^{-i2\pi\nu\tau}$$

et donc,

$$\widehat{e^{i2\pi\nu\tau}}(t) = \delta_\tau(\nu)$$

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_\tau(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)e^{-i2\pi\nu t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-i2\pi\nu\tau}\end{aligned}$$

(6) Appliquer la formule sommatoire de Poisson à $f = \delta$. En déduire que la transformée de Fourier d'un peigne de dirac est un peigne de dirac

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t+nT) &= \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\delta}_{mT}\left(\frac{m}{T}\right) e^{i\frac{2\pi}{T}mt} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi\frac{m}{T}mT} e^{i\frac{2\pi}{T}mt} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{2\pi}{T}m(t+mT)} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{2\pi}{T}mt}\end{aligned}$$

On prend la TF de chaque membre :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\delta(t+nT)}(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\delta}_{nT}(\nu) = \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{e^{i\frac{2\pi}{T}mt}}(\nu) \\ = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{e^{i\frac{2\pi}{T}mt}}(\nu) \\ = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{\frac{m}{T}}(\nu)\end{aligned}$$

Exercice 2. — *Filtre moyenneur et bruit blanc.*

$$s[n] = \frac{1}{2}\left(e[n] + e[n-1]\right)$$

(1) Le système est-il linéaire, causal, invariant ? Le système est clairement linéaire et invariant et causal

(2) déterminer la réponse impulsionnelle h du système. Le système est il stable ?

$$h[n] = \frac{1}{2}\left(\delta[n] + \delta[n-1]\right)$$

$$\begin{aligned} h[0] &= \frac{1}{2} \\ h[1] &= \frac{1}{2} \\ h[n] &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Le système est stable : $\|h\|_1 = 1 < +\infty$ (c'est un filtre de type RIF, il est forcément stable)

(3) donner la fonction de transfert $H(z)$ de h avec sa région de convergence. Donner les pôles et les zeros

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_n h[n] z^{-n} \\ &= \frac{1}{2}(1 + z^{-1}) = \frac{z+1}{2z} \end{aligned}$$

H a un pôle en 0 et un zéros en $z = -1$. H est définit pour $|z| > 0$ (on retrouve bien la stabilité et la causalité)

(4) donner la réponse en fréquence et $|\hat{h}(\nu)|^2$

$$\begin{aligned} \hat{h}(\nu) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + e^{-i2\pi\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-i\pi\nu}\left(e^{-i\pi\nu} + e^{i\pi\nu}\right) \\ &= e^{-i\pi\nu}\cos(\pi\nu) \end{aligned}$$

$$\|\hat{h}(\nu)\|^2 = \cos^2(\pi\nu)$$

(5) On suppose que e est un bruit blanc de densité spectrale σ^2. Donner la moyenne de s, la densité spectrale de s. s est-il toujours un bruit blanc ?

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{s}\right] = \hat{h}(0)\mathrm{E}\left[\mathrm{e}\right] = 0$$

Ou alors on revient à la définition du filtre et on utilise les propriétés de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\mathrm{s[n]}\right] &= \mathrm{E}\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e[n]} + \mathrm{e[n-1]}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{E}\left[\mathrm{e[n]}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{E}\left[\mathrm{e[n-1]}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$|\hat{s}(\nu)|^2 = |\hat{h}(\nu)|^2\sigma^2 = \cos^2(\pi\nu)\sigma^2$$

s n'est pas un bruit blanc.

Exercice 3. — *Multiplexage numérique.*

Pour transmettre deux signaux, il est souvent plus simple de les mélanger et de n'en transmettre qu'un, à condition d'être capable de les séparer après réception. C'est ce que l'on appelle le multiplexage.

On cherche à coder simultanément deux signaux $x, y \in \ell_2(\mathbb{Z})$ On suppose que les TFD respectives de x et y sont telles que $\hat{x}(\omega) = \hat{y}(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$.

(1) On pose $z_n = (-1)^n y_n$ (z est une copie "modulée" de y), et $w_n = x_n + z_n$. Montrer que $\hat{z}(\omega) = \hat{y}(\omega + \pi)$, et étudier le support de $\hat{z}$.

$$\begin{aligned}\hat{z}(\omega) &= \sum_n (-1)^n y_n e^{-in\omega} \\ &= \sum_n e^{-in\pi} y_n e^{-in\omega} \\ &= \sum_n e^{-i\pi} y_n e^{-in(\omega+\pi)} \\ &= \hat{y}(\omega + \pi)\end{aligned}$$

$$\text{supp}(\hat{z}) = [-\pi, \pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$$

(2) Montrer que x peut être obtenu à partir de w par filtrage passe-bas (qui supprime la bande de fréquence $[-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$), et expliciter ce filtrage.

On a :

$$\hat{w}(\omega) = \hat{x}(\omega) + \hat{z}(\omega)$$

avec $\text{supp}(\hat{w}) = [-\pi, \pi]$, $\text{supp}(\hat{x}) = [-\pi/2, \pi/2]$ et $\text{supp}(\hat{z}) = [-\pi, \pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$. On a donc

$$\hat{x}(\omega) = \hat{w}(\omega)\mathbf{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}$$

(3) Montrer que y peut être obtenu à partir de w par modulation (c'est à dire une translation dans l'espace des fréquences) suivie d'un filtrage passe-bas. On a :

$$\begin{aligned}\hat{w}(\omega + \pi) &= \hat{x}(\omega + \pi) + \hat{z}(\omega + \pi) \\ &= \hat{x}(\omega + \pi) + \hat{y}\end{aligned}$$

avec $v_n = (-1)^n w_n$, on a

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \hat{w}(\omega + \pi)\mathbf{1}_{[-\pi/2,\pi/2]} \\ &= \hat{v}(\omega)\mathbf{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}\end{aligned}$$

(4) Généraliser cette méthode au problème du multiplexage de N signaux $x^{(0)}, \dots x^{(N-1)}$ tels que pour tout $n = 0, \dots N-1$

$$\widehat{x^{(n)}}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in [-\pi, -\pi/N] \cup [\pi/N, \pi] \ .$$