

TD 1 – FOURIER

TABLE DES MATIÈRES

Transformée de Fourier des doubles exponentielles	1
Transformée de Fourier des doubles exponentielles (à temps discret)	1
Transformée de Fourier des gaussiennes	2
Principe d'incertitude d'Heisenberg	2
Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini	3
Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini	4

Exercice 1. — *Transformée de Fourier des doubles exponentielles.*

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier de :

$$x(t) = e^{-\alpha |t|}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0,$$

ainsi qu'à ses propriétés, notamment en terme de largeur à mi-hauteur.

- (1) Calculer $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(t)$.
- (2) Vérifier les propriétés de symétrie de X . Vérifiez également que :

$$x(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu) d\nu \text{ et } \hat{x}(0) = \int_{\mathbb{R}} x(t) dt$$

et calculer ces quantités.

- (3) Calculer Δt et $\Delta \nu$ les largeurs à mi-hauteur de $x(t)$ et $\hat{x}(\nu)$.

Exercice 2. — *Transformée de Fourier des doubles exponentielles (à temps discret).*

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier des signaux :

$$x(n) = \alpha^{|n|}, n \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha \in]-1, 1[, \alpha \neq 0$$

ainsi qu'à quelques-unes de leurs propriétés.

- (1) Calculez $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(n)$.

- (2) Vérifiez les propriétés de symétrie de \hat{x} . Vérifiez également que :

$$\hat{x}(0) = \sum_{\mathbb{Z}} x(n).$$

- (3) Étudiez en détail le comportement de $\hat{x}(\nu)$. Que dire du contenu spectral du signal $x(n)$: plutôt basse fréquence, haute fréquence, ... ?

- (4) Que se passe-t-il lorsque α tend vers -1, 1, ou 0 ?

Exercice 3. — *Transformée de Fourier des gaussiennes.*

Dans cet exercice on détermine la transformée de Fourier de la gaussienne :

$$g_{\tau\sigma}(t) = e^{-\pi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

paramétrée par $\tau \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+$. On admettra le résultat suivant :

(1)
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Dans un premier temps on s'intéresse à la gaussienne centrée réduite $g = g_{01}$.

- (1) Montrez simplement que sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\hat{g}(\nu) = 2 \int_0^{\infty} e^{-\pi t^2} \cos(2\pi\nu t) dt.$$

- (2) En dérivant sous le signe intégrale par rapport à la fréquence puis en intégrant par partie, déterminez une équation différentielle simple en $\hat{g}(\nu)$.

- (3) Résolvez l'équation différentielle et déterminez les constantes d'intégration en utilisant la relation (1).

- (4) Déterminez finalement la transformée de Fourier $\hat{g}_{\tau\sigma}$ de $g_{\tau\sigma}$.

- (5) Comparez les largeurs de $\hat{g}_{\tau\sigma}$ et de $g_{\tau\sigma}$ et commentez.

Exercice 4. — *Principe d'incertitude d'Heisenberg.*

Le but de cet exercice est de démontrer le principe d'incertitude d'Heisenberg, qu'on peut énoncer dans le théorème suivant

Théorème 1 (Inégalités d'Heisenberg). Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \neq 0$. On pose

$$\mu_f = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t|f(t)|^2 dt, \quad \mu_{\hat{f}} = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

et

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mu_f)^2 |f(t)|^2 dt, \quad \sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \mu_{\hat{f}})^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Alors

$$\sigma_f \sigma_{\hat{f}} \geq \frac{1}{4\pi},$$

avec égalité ssi f est de la forme

$$f(t) = ae^{ibt} e^{-(t-c)^2/d}.$$

Les nombres μ_f et $\mu_{\hat{f}}$ mesurent respectivement le temps central et la fréquence centrale du signal f . Les nombres σ_f et $\sigma_{\hat{f}}$ mesurent alors l'étalement, ou la dispersion, temporel et spectral. Ce théorème nous dit qu'un signal ne peut avoir à la fois un étalement temporel faible **et** un étalement spectral faible.

On suppose bien entendu que $\sigma_f < +\infty$ et $\sigma_{\hat{f}} < +\infty$, sinon l'inégalité est trivialement satisfaite.

(1) On commence par supposer que $\mu_f = \mu_{\hat{f}} = 0$.

(a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer qu'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{d}{dt} |f(t)|^2 dt$$

(b) En déduire que

$$\|f\|^2 \leq 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 dt}$$

(c) En utilisant la relation entre la transformée de Fourier et la dérivation, conclure sur l'inégalité d'Heisenberg dans le cas $\mu_f = \mu_{\hat{f}} = 0$

(2) Montrer le cas général en appliquant une translation et une modulation adéquat à la fonction f , de sorte à appliquer le résultat précédent.

(3) Enfin, montrer que l'égalité est atteinte ssi $f(t) = ae^{ibt} e^{-(t-c)^2/d}$. On pourra utiliser les résultats de l'exercice "transformée de Fourier d'une gaussienne".

Exercice 5. — *Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini.*

Cet exercice est dédié à l'étude de la transformée de Fourier d'un signal monochromatique observé sur un horizon fini c'est-à-dire sur une durée finie. Pour cela on définit le signal « porte » constant égal à un à l'intérieur d'un intervalle et nul à l'extérieur :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2; +T/2] \\ 0 & \text{si } t \notin [-T/2; +T/2] \end{cases}$$

où T est un réel positif. On définit ensuite le signal d'intérêt, c'est-à-dire un signal monochromatique, de fréquence f_0 multiplié par le signal porte précédent :

$$x_T(t) = e^{i2\pi f_0 t} \Pi_T(t).$$

- (1) Calculez $\hat{\Pi}_1(\nu)$, la transformée de Fourier de $\Pi_1(t)$. On pourra introduire la fonction *sinus cardinal* définie par $\text{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$. Étudiez la fonction $\hat{\Pi}_1(f)$ en détail.

- (2) En déduire la valeur des deux intégrales de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$$

- (3) En exploitant les relations « transformée de Fourier et dilatation du temps » déterminez la transformée de Fourier $\hat{\Pi}_T(\nu)$ du signal porte général $\hat{\Pi}_T(t)$.

- (4) En exploitant les relation « transformée de Fourier et modulation » déterminez la transformée de Fourier $\hat{x}_T(\nu)$ du signal $x_T(t)$. Commentez le résultat obtenu en fonction de la largeur T de la porte considérée et notamment le comportement lorsque $T \rightarrow \infty$.

Exercice 6. — *Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini.*

Cet exercice est dédié à l'étude de la transformée de Fourier d'un signal monochromatique à temps discret observé sur une durée finie. Pour cela on définit le « signal porte » constant égal à un à l'intérieur d'un intervalle et nul à l'extérieur :

$$\Pi_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-N; +N] \\ 0 & \text{si } t \notin [-N; +N] \end{cases}$$

où N est un entier positif. On définit ensuite le signal d'intérêt, c'est-à-dire un signal monochromatique, de fréquence ν_0 multiplié par le signal porte précédent :

$$x_N(n) = e^{2i\pi\nu_0 n} \Pi_N(n).$$

- (1) Calculez $\hat{\Pi}_N(\nu)$ la transformée de Fourier de $\Pi_N(n)$. On pourra introduire le *noyau de Dirichlet* défini par $\text{Dir}_N(u) = \frac{\sin(N\pi u)}{\sin(\pi u)}$.

- (2) Vérifiez les propriétés de symétries de $\hat{\Pi}_N(\nu)$. Vérifiez que $\hat{\Pi}_N(\nu)$ est bien 1-périodique. Vérifiez également que :

$$\hat{\Pi}_N(0) = \sum_{\mathbb{Z}} \Pi_N(n).$$

et donner :

$$\int_0^1 \frac{\sin((2N+1)\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} d\nu.$$

- (3) Étudiez la fonction $\hat{\Pi}_N(\nu)$ en détail.

- (4) En exploitant les relation « transformée de Fourier et modulation » déterminez la transformée de Fourier $\hat{x}_N(\nu)$ du signal $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Commentez le résultat obtenu en fonction de la largeur de la porte considérée et notamment le comportement lorsque N tend vers l'infini.