TD 1 – FOURIER

Table des matières

Transformée de Fourier des doubles exponentielles 1
Transformée de Fourier des doubles exponentielles (à temps discret) 3
Transformée de Fourier des gaussiennes 4
Principe d'incertitude d'Heisenberg 6
Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini (à temps continu) 8
Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini (à temps discret) 10

Exercice 1. — *Transformée de Fourier des doubles exponentielles.*

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier de :

$$x(t) = e^{-\alpha\,|t|}\,, t \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0\ ,$$

ainsi qu'à ses propriétés, notamment en terme de largeur à mi-hauteur.

(1) Calculer $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(t)$.

Calculons $\hat{x}(\nu)$

$$\begin{aligned}
\hat{x}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|t|} e^{-2i\pi\nu t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(2i\pi\nu+\alpha)t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} e^{-(2i\pi\nu-\alpha)t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2i\pi\nu+\alpha}\left[e^{-(2i\pi\nu+\alpha)t}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2i\pi\nu-\alpha}\left[e^{-(2i\pi\nu-\alpha)t}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{2i\pi\nu+\alpha} - \frac{1}{2i\pi\nu-\alpha} \\
&= \frac{2i\pi\nu-\alpha-(2i\pi\nu+\alpha)}{(2i\pi\nu+\alpha)(2i\pi\nu-\alpha)} \\
&= \frac{-2\alpha}{-4\pi^2\nu^2-\alpha^2} \\
&= \frac{2\alpha}{4\pi^2\nu^2+\alpha^2}
\end{aligned}$$

(2) Vérifier les propriétés de symétrie de $\hat{x}$. Vérifiez également que :

$$x(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu)\ \mathrm{d}\nu \text{ et } \hat{x}(0) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\ \mathrm{d}t$$

et calculer ces quantités.

On vérifie bien que la transformée de Fourier d'un signal pair réel est bien paire et réel. On a

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu) e^{i2\pi\nu t}\ \mathrm{d}\nu$$

et donc

$$x(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu)\ \mathrm{d}\nu$$

De plus,

$$x(0) = e^{\alpha 0} = 1\ .$$

De même, on vérifie que

$$\hat{x}(0) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

et

$$\hat{x}(0) = \frac{2}{\alpha}$$

(3) Calculer Δt et $\Delta\nu$ les largeurs à mi-hauteur de $x(t)$ et $\hat{x}(\nu)$.

Calculons tout d'abord Δt. On sait que $x(0) = \frac{1}{2}$, donc on cherche les instants t tels que $x(t) = \frac{1}{2}$. La fonction étant paire, on cherche t tel que

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} &= \frac{1}{2} \\ -\alpha t &= -\log(2) \\ t &= \frac{\log(2)}{\alpha} \end{aligned}$$

et donc $\Delta t = 2\frac{\log(2)}{\alpha}$.

Calculons $\Delta\nu$. On sait que $\hat{x}(0) = \frac{2}{\alpha}$, donc on cherche les intants t tels que $\hat{x}(\nu) = \frac{1}{\alpha}$. La fonction étant paire, on cherche t tel que

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha}{4\pi^2\nu^2 + \alpha^2} &= \frac{1}{\alpha} \\ 2\alpha^2 &= 4\pi^2\nu^2 + \alpha^2 \\ \nu^2 &= \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \\ \nu &= \frac{\alpha}{2\pi} \end{aligned}$$

et donc $\Delta\nu = \frac{\alpha}{\pi}$.

On remarque qu'en première approximation $\Delta\nu$ est proportionnelle à α et Δt est proportionnelle à $\frac{1}{\alpha}$

Exercice 2. — *Transformée de Fourier des doubles exponentielles (à temps discret).*

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier des signaux :

$$x[n] = \alpha^{|n|}\,, n \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha \in]-1,1[\ , \alpha \neq 0$$

ainsi qu'à quelques-unes de leurs propriétés.

(1) Calculez $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(n)$.

$$\begin{aligned}
\hat{x}(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|n|} e^{-i2\pi n\nu} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{0} \alpha^{-n} e^{-i2\pi n\nu} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n} e^{-i2\pi n\nu} - 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{i2\pi\nu})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{e^{i2\pi\nu}}\right)^n \\
&= \frac{1}{1-\alpha e^{i2\pi\nu}} + \frac{1}{1-\alpha e^{-i2\pi\nu}} - 1 \\
&= \frac{2-2\alpha\cos(2\pi\nu)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(2\pi\nu)} - 1 \\
&= \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(2\pi\nu)}
\end{aligned}$$

(2) Vérifiez les propriétés de symétrie de $\hat{x}$. Vérifiez également que :

$$\hat{x}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]\,.$$

La transformée de Fourier est réel et paire, comme attendu pour un signal réel pair.

$$\begin{aligned}
\hat{x}(0) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|n|} e^{-i2\pi n 0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|n|} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)
\end{aligned}$$

(3) Étudiez en détail le comportement de $\hat{x}(\nu)$. Que dire du contenu spectral du signal $x(n)$: plutôt basse fréquence, haute fréquence, ... ? On a

$$\hat{x}'(\nu) = \frac{(1-\alpha^2)4\pi\alpha\sin(2\pi\nu)}{\left(1+\alpha^2-2\alpha\cos(2\pi\nu)\right)^2}$$

avec $\hat{x}'(\nu) = 0$ pour $\nu = \frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. sur $[0, 1/4]$, $\hat{x}'(\nu)$ est du signe de α et sur $[1/4, 1/2]$, $\hat{x}'(\nu)$ est du signe contraire.

— $\alpha > 0$, signal haute fréquence

— $\alpha < 0$, signal basse fréquence

(4) Que se passe-t-il lorsque α tend vers -1, 1, ou 0 ?

— $\alpha \to 0$, $x \to \delta_n$ et $\hat{x} \to 1$
— $\alpha \to 1$, $x \to 1$ et $\hat{x} \to \delta$
— $\alpha \to -1$, $x \to -1$ et $\hat{x} \to -\delta$

Exercice 3. — *Transformée de Fourier des gaussiennes.*

Dans cet exercice on détermine la transformée de Fourier de la gaussienne :

$$g_{\tau\sigma}(t) = e^{-\pi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)^2} \ , \ t \in \mathbb{R} \ ,$$

paramétrée par $\tau \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On admettra le résultat suivant :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \, dx = 1 \ . \qquad (1)$$

Dans un premier temps on s'intéresse à la gaussienne centrée réduite $g = g_{01}$.

(1) Montrez simplement que sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\hat{g}(\nu) = 2 \int_0^{\infty} e^{-\pi t^2} \cos(2\pi\nu t) \, \mathrm{d}t \ .$$

Exprimons la transformée de Fourier $\hat{g}(\nu)$

$$\begin{aligned}\hat{g}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\nu t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\nu t} \, \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\nu t} \, \mathrm{d}t\end{aligned}$$

On pose $t' = -t$ dans la première intégrale.

$$\begin{aligned}\hat{g}(\nu) &= \int_0^{+\infty} e^{-\pi t'^2} e^{2i\pi\nu t'} \, \mathrm{d}t' + \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\nu t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} (e^{2i\pi\nu t'} + e^{-2i\pi\nu t}) \, \mathrm{d}t \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cos(2i\pi\nu t) \ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

(2) En dérivant sous le signe intégrale par rapport à la fréquence puis en intégrant par partie, déterminez une équation différentielle simple en $\hat{g}(\nu)$.

Exprimons $\frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{\mathrm{d}\nu}$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{\mathrm{d}\nu} &= 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\cos\left(2\pi\nu t\right)\right)\ \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} - 2\pi t\sin\left(2\pi\nu t\right)\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Intégrons par partie on pose $u' = -2\pi t e^{-\pi t^2}$ et $v = \sin\left(2\pi\nu t\right)$. En déduit $u = e^{-\pi t^2}$ et $v = 2\pi\nu\cos\left(2\pi\nu t\right)$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{\mathrm{d}\nu} &= 2\left[e^{-\pi t^2}\sin\left(2\pi\nu t\right)\right]_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2}2\pi\nu\cos\left(2\pi\nu t\right)\ \mathrm{d}t \\ &= -2\pi\nu\hat{g}(\nu)\end{aligned}$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{\mathrm{d}\nu} + 2\pi\nu\hat{g}(\nu) = 0$$

(3) Résolvez l'équation différentielle et déterminez les constantes d'intégration en utilisant la relation (1).

Résolvons cette équation différentielle en supposant que $\hat{g}(\nu) \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{\mathrm{d}\nu} + 2\pi\nu\hat{g}(\nu) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{\mathrm{d}\nu} &= -2\pi\nu\hat{g}(\nu) \\ \frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{G(\nu)} &= -2\pi\nu\ \mathrm{d}\nu \\ \log(\hat{g}(\nu)) &= -\pi\nu^2 + Cst \\ \hat{g}(\nu) &= Ke^{-\pi\nu^2}\end{aligned}$$

On vérifie bien que $\hat{g}(\nu) \neq 0,\ \forall\nu\in\mathbb{R}$. Pour déterminer K on utilise notre connaissance de $\hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\ \mathrm{d}t = 1$. On en déduit immédiatemtn que $K = 1$. On obtient finallement

$$\hat{g}(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$$

(4) Déterminez finalement la transformée de Fourier $\hat{g}_{\tau\sigma}$ de $g_{\tau\sigma}$.

Déterminons $\hat{g}_{\tau\sigma}$ en utilisant les propriétées de dilatation et de décalage de la transformée de Fourier, mais profitons en pour les redémontrer.

$$\begin{aligned}\hat{g}_{\tau\sigma}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} g_{\tau\sigma}(t)e^{-2i\pi\nu t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_{01}\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)e^{-2i\pi\nu t}\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $t' = \frac{t-\tau}{\sigma}$ le Jacobien du changement de variable est égale à $\frac{1}{\sigma}$.

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{\tau\sigma}(\nu) &= \frac{1}{\sigma}\int_{\mathbb{R}} g_{01}(t')e^{-2i\pi\nu(\sigma t'+\tau)}\,\mathrm{d}t' \\
&= \frac{e^{-2i\pi\nu\tau}}{\sigma}\int_{\mathbb{R}} g_{01}(t')e^{-2i\pi\nu\sigma t'}\,\mathrm{d}t' \\
&= \frac{e^{-2i\pi\nu\tau}}{\sigma}\hat{g}(\sigma\nu) \\
&= \frac{e^{-2i\pi\nu\tau}}{\sigma}e^{-\pi\sigma^2\nu^2}
\end{aligned}$$

(5) Comparez les largeurs de $\hat{g}_{\tau\sigma}$ et de $g_{\tau\sigma}$ et commentez.

Les largeur à mi-hauteur sont inversement proportionelles ce qui est cohérent avec la propriété de dilatation/contraction de la transformée de Fourier.

Exercice 4. — *Principe d'incertitude d'Heisenberg.*

Le but de cet exercice est de démontrer le principe d'incertitude d'Heisenberg, qu'on peut énoncer dans le théorème suivant

Théorème 1 (Inégalités d'Heisenberg)**.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \neq 0$. On pose*

$$\mu_f = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} t|f(t)|\mathrm{d}\,t \ , \ \mu_{\hat{f}} = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \nu|\hat{f}(\nu)|\mathrm{d}\,\nu$$

et

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu_f)^2|f(t)|^2\mathrm{d}\,t \ , \ \sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (\nu-\mu_{\hat{f}})^2|\hat{f}(\nu)|^2\mathrm{d}\,\nu$$

Alors

$$\sigma_f\sigma_{\hat{f}} \geq \frac{1}{4\pi} \ ,$$

avec égalité ssi f est de la forme

$$f(t) = ae^{ibt}e^{-(t-c)^2/d} \ .$$

Les nombres μ_f et $\mu_{\hat{f}}$ mesurent respectivement le temps central et la fréquence centrale du signal f. Les nombres σ_f et $\sigma_{\hat{f}}$ mesurent alors l'étalement, ou la dispersion, temporel et spectral. Ce théorème nous dit qu'un signal ne peut avoir à la fois un étalement temporel faible **et** un étalement spectral faible.

On suppose bien entendu que $\sigma_f < +\infty$ et $\sigma_{\hat{f}} < +\infty$, sinon l'inégalité est trivialement satisfaite.

(1) On commence par supposer que $\mu_f = \mu_{\hat{f}} = 0$.

(a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer qu'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|f(t)|^2\mathrm{d}\,t$$

Une intégration par partie sur le deuxième terme donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{d}{dt}|f(t)|^2 \mathrm{d}\, t = [t|f(t)|^2]_{-\infty}^{\pm\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}\, t$$

Comme $\sigma_{\hat{f}} < +\infty$ et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2|\hat{f}(\nu)|^2 \mathrm{d}\,\nu < +\infty$, on a $f' \in L^2(\mathbb{R})$. En effet, le théorème de Parseval implique que $\|f'\|^2 = \|\widehat{f'}\|^2$, et l'on a $\widehat{f'}(\nu) = i2\pi\nu\hat{f}(\nu)$.

Reste à montrer que $\lim\limits_{t\to\pm\infty} t|f(t)|^2 = 0$. Supposons que $\lim\limits_{t\to+\infty} t|f(t)|^2 = \ell$, $\ell \neq 0$. Alors, quand $t \to +\infty$, on a $|f(t)|^2 \sim \ell/t$ ce qui est incompatible avec $f \in L^2(\mathbb{R})$.

(b) En déduire que

$$\|f\|^2 \leq 2\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|f(t)|^2 \mathrm{d}\, t \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 \mathrm{d}\, t}$$

En prenant la valeur absolue dans l'égalité précédente, après avoir remarqué que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|f(t)|^2 = f'(t)\overline{f(t)} + f(t)\overline{f'(t)}$, on a

$$\|f\|^2 \leq \left|\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\overline{f'(t)} \mathrm{d}\, t\right| + \left|\int_{-\infty}^{+\infty} tf'(t)\overline{f(t)} \mathrm{d}\, t\right|$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Swartz aux deux termes et l'on obtient l'inégalité voulue.

(c) En utilisant la relation entre la transformée de Fourier et la dérivation, conclure sur l'inégalité d'Heisenberg dans le cas $\mu_f = \mu_{\hat{f}} = 0$

On a $\widehat{f'}(\nu) = i2\pi\nu\hat{f}(\nu)$. En appliquant le théorème de Plancherel-Parseval on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 \mathrm{d}\, t = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2\nu^2|\hat{f}(\nu)|^2 \mathrm{d}\,\nu = 4\pi^2\|\hat{f}\|^2\sigma_{\hat{f}}^2$$

Finalement, en reprenant l'inégalité montrée en (1.b), on a (sachant que $\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2$)

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &\leq 2\sqrt{4\pi^2\|f\|^2\sigma_f^2\|f\|^2\sigma_{\hat{f}}^2} \\ &\leq 4\pi\|f\|^2\sigma_f\sigma_{\hat{f}}\end{aligned}$$

et donc

$$\sigma_f\sigma_{\hat{f}} \geq \frac{1}{4\pi}$$

(2) Montrer le cas général en appliquant une translation et une modulation adéquat à la fonction f, de sorte a appliquer le résultat précédent.

On considère la fonction g définie par

$$g(t) = e^{-i\mu_{\hat{f}}t}f(t + \mu_f) .$$

Les relations entre transformée de Fourier et translation et modulation donnent bien $\mu_g = \mu_{\hat{g}} = 0$. De plus, on a $\|g\| = \|f\|$ et

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{\|g\|}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|f(t+\mu_f)|^2 \mathrm{d}\, t = \sigma_f^2$$

et
$$\sigma_{\hat{g}}^2 = \frac{1}{\|g\|}\int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |\hat{f}(t+\mu_{\hat{f}})|^2 \mathrm{d}\, t = \sigma_{\hat{f}}^2$$

(3) Enfin, montrer que l'égalité est atteinte ssi $f(t) = ae^{ibt}e^{-(t-c)^2/d}$. On pourra utiliser les résultats de l'exercice "transformée de Fourier d'une gaussienne".

La démonstration du sens réciproque est facile. Soit $f(t) = ae^{ibt}e^{-(t-c)^2/d}$. On reconnait une fonction de type "Gaussienne" modulée. Les résultats sur la transformée de Fourier d'une gaussienne permettent de conclure directement que $\sigma_f \sigma_{\hat{f}} = \frac{1}{4\pi}$.

Pour le sens direct, il faut regarder quand on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Swartz. Cette égalité a lieu ssi
$$tf(t) = K\overline{f'(t}$$
qui est une équation différentielle (qu'on peut résoudre en séparant partie réelle et imaginaire). On trouve alors la solution attendue.

Exercice 5. — *Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini (à temps continu).*

Cet exercice est dédié à l'étude de la transformée de Fourier d'un signal monochromatique observé sur un horizon fini c'est-à-dire sur une durée finie. Pour cela on définit le signal « porte » constant égal à un à l'intérieur d'un intervalle et nul à l'extérieur :
$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2; +T/2] \\ 0 & \text{si } t \notin [-T/2; +T/2] \end{cases}$$
où T est un réel positif. On définit ensuite le signal d'intérêt, c'est-à-dire un signal monochromatique, de fréquence f_0 multiplié par le signal porte précédent :
$$x_T(t) = e^{i2\pi f_0 t}\, \Pi_T(t)\,.$$

(1) Calculez $\hat{\Pi}_1(\nu)$, la transformée de Fourier de $\Pi_1(t)$. On pourra introduire la fonction *sinus cardinal* définie par $\mathrm{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$. Étudiez la fonction $\hat{\Pi}_1(f)$ en détail.

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_1(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_1(t) e^{-i2\pi t\nu}\, \mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i2\pi t\nu}\, \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{-i2\pi\nu} e^{-i2\pi t\nu}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}}{i2\pi\nu} \\ &= \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \\ &= \mathrm{sinc}(\nu)\end{aligned}$$

sinc est une fonction paire, avec $\mathrm{sinc}(0) = 1$ et qui s'annule pour $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$. On a $\lim\limits_{\nu\to\pm\infty} \mathrm{sinc}(\nu) = 0$.

$$\hat{\Pi}_1'(\nu) = \frac{\cos(\pi\nu)\pi^2\nu - \sin(\pi\nu)\pi}{\pi^2\nu^2} = \frac{\cos(\pi\nu)\pi\nu - \sin(\pi\nu)}{\pi\nu^2}$$

$$\hat{\Pi}_1'(\nu) = 0 \Leftrightarrow \pi\nu = \tan(\pi\nu)$$

cette dernière équation a une unique solution sur charque intervalle $[k, k+1]$, $k \geq 1$, qu'on note α_k. En chaque α_k, la dérivée s'annule et change de signe, on a donc un extremum local.

(2) En déduire la valeur des deux intégrales de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x}\,\mathrm{d}x \\
= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\,\mathrm{d}\nu &= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} e^{i2\pi\nu x}\,\mathrm{d}\nu \text{ en } x = 0 \\
&= \frac{\pi}{2}\Pi_1(x) \text{ en } x = 0 \\
&= \frac{\pi}{2}\Pi_1(0) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\|\mathrm{sinc}\|^2 = \frac{\pi}{2}\|\Pi_1\|^2 \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

(3) En exploitant les relations « transformée de Fourier et dilatation du temps » déterminez la transformée de Fourier $\hat{\Pi}_T(\nu)$ du signal porte général $\hat{\Pi}_T(t)$.

On a $\Pi_T(t) = \Pi_1(t/T)$. Il vient directement

$$\hat{\Pi}_T(\nu) = T\hat{\Pi}_1(T\nu) = T\mathrm{sinc}(T\nu)$$

(4) En exploitant les relation « transformée de Fourier et modulation » déterminez la transformée de Fourier $\hat{x}_T(\nu)$ du signal $x_T(t)$. Commentez le résultat obtenu en fonction de la largeur T de la porte considérée et notamment le comportement lorsque $T \to \infty$.

$$\hat{x}_T(\nu) = \hat{\Pi}_T(\nu - f_0) = T\mathrm{sinc}(T(\nu - f_0))$$

$T\text{sinc}(T(\nu - f_0))$ s'annule pour $\nu = k/T + f_0$ avec maximum global en $\nu = f_0$.

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{\sin(\pi T(\nu - f_0))}{\pi(\nu - f_0)} = \delta(\nu - f_0)$$

Exercice 6. — *Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini (à temps discret).*

Cet exercice est dédié à l'étude de la transformée de Fourier d'un signal monochromatique à temsp discret observé sur une durée finie. Pour cela on définit le « signal porte » constant égal à un à l'intérieur d'un intervalle et nul à l'extérieur :

$$\Pi_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{-N, \dots, +N\} \\ 0 & \text{si } n \notin \{-N, \dots, +N\} \end{cases}$$

où N est un entier positif. On définit ensuite le signal d'intérêt, c'est-à-dire un signal monochromatique, de fréquence ν_0 multiplié par le signal porte précédent :

$$x_N[n] = e^{2i\pi\nu_0 n}\ \Pi_N[n]\ .$$

(1) Calculez $\hat{\Pi}_N(\nu)$ la transformée de Fourier de $\Pi_N[n]$. On pourra introduire le *noyau de Dirichlet* défini par $\text{Dir}_N(u) = \frac{\sin(N\pi u)}{\sin(\pi u)}$.

Calculons la transformée de Fourier à temps discret de $\Pi_N[n]$

$$\begin{aligned}
\Pi_N(\nu) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_N[n] e^{-i2\pi\nu n} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} e^{-i2\pi\nu n} \\
&= \frac{e^{i2\pi\nu N} - e^{-i2\pi\nu(N+1)}}{1 - e^{-i2\pi\nu}} \\
&= e^{-i\pi\nu} \frac{e^{i\pi\nu(2N+1)} - e^{-i\pi\nu(2N+1)}}{1 - e^{-i2\pi\nu}} \\
&= \frac{e^{i\pi\nu(2N+1)} - e^{-i\pi\nu(2N+1)}}{e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}} \\
&= \frac{\sin(\pi\nu(2N+1))}{\sin(\pi\nu)}
\end{aligned}$$

(2) Vérifiez les propriétés de symétries de $\hat{\Pi}_N(\nu)$. Vérifiez que $\hat{\Pi}_N(\nu)$ est bien 1-périodique. Vérifiez également que :

$$\hat{\Pi}_N(0) = \sum_{\mathbb{Z}} \Pi_N(n)\,.$$

et donner :

$$\int_0^1 \frac{\sin((2N+1)\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\,\mathrm{d}\nu\ .$$

— Vérifions que $\Pi_N(\nu)$ est une fonction paire

$$\begin{aligned}\Pi_N(-\nu) &= \frac{\sin((2N+1)\pi(-\nu))}{\sin(\pi(-\nu))}\\ &= \frac{-\sin((2N+1)\pi\nu)}{-\sin(\pi\nu)}\\ &= \Pi_N(\nu)\end{aligned}$$

— Vérifions que $\Pi_N(\nu)$ est 1–périodique.

$$\begin{aligned}\Pi_N(\nu+1) &= \frac{\sin((2N+1)\pi(\nu+1))}{\sin(\pi(\nu+1))}\\ &= \frac{\sin((2N+1)\pi\nu+(2N+1)\pi)}{\sin(\pi\nu+\pi)}\\ &= \frac{-\sin((2N+1)\pi\nu)}{-\sin(\pi\nu)}\\ &= \Pi_N(\nu)\end{aligned}$$

— Vérifions que $\Pi_N(0)$ est bien égale à la somme du signal π_N.

$$\lim_{\nu\to 0}\frac{\sin((2N+1)\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} = 2N+1$$

On calcul cette limite facilement en utilisant le développement limité de la fonction sin. Évidemment $\sum_{\mathbb{Z}}\Pi_N(n) = 2N+1$.

— Par définition de la transformée de Fourier à temps discret on a

$$\Pi_N[n] = \int_{-1/2}^{1/2}\hat{\Pi}_N(\nu)e^{i2\pi\nu n}\,\mathrm{d}\nu$$

$$\int_0^1\frac{\sin((2N+1)\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\,\mathrm{d}\nu = \int_0^1\hat{\Pi}_N(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \Pi_N(0) = 1$$

(3) Étudiez la fonction $\hat{\Pi}_N(\nu)$ en détail.

voir figure 1

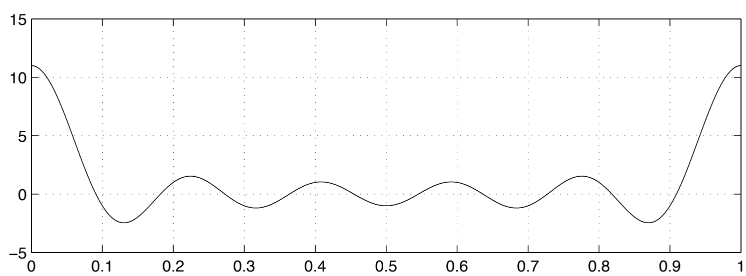

FIGURE 1. Noyaux de Dirichlet $N = 5$

(4) En exploitant les relation « transformée de Fourier et modulation » déterminez la transformée de Fourier $\hat{x}_N(\nu)$ du signal $x[n]$. Commentez le résultat obtenu en fonction de la largeur de la porte considérée et notamment le comportement lorsque N tend vers l'infini.

Déterminons la transformée de Fourier de $x_N(n)$ à partir de ce qui précède.

$$\begin{aligned}
\hat{x}_N(\nu) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_N[n] e^{-2i\pi\nu n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_N[n] e^{2i\pi\nu_0 n} e^{-2i\pi\nu n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_N[n] e^{-2i\pi(\nu-\nu_0)n} \\
&= \Pi_N(\nu-\nu_0)
\end{aligned}$$

Lorsque La largeur de la porte augmente la largeur du noyaux de Dirichlet diminue. Enfin lors que N tend vers $+\infty$ alors on tend vers la distribution de Dirac, l'horizon devient infini.