Licence 3 E3A
Traitement du signal

TD 1 – FOURIER

Table des matières

Exercice 1. — *Sous échantillonnage – Interpolation – transformée en Z.*

On s'intéresse au système à temps discret symbolisé sur la figure 1. Il est globalement constitué de deux parties « *Système I* » et « *Système II* » situés respectivement à gauche et à droite de la figure 1. La première partie de cet exercice est consacrée au premier système, la seconde partie est consacrée au second et la troisième partie concerne leur association.

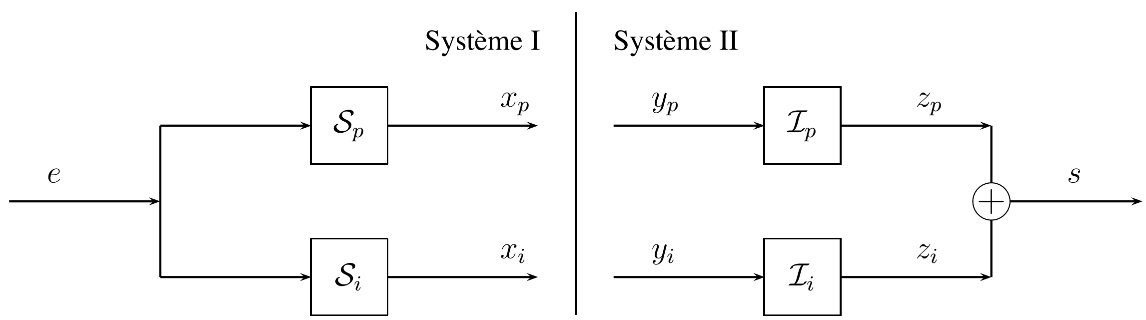

Figure 1. Système considéré

— Partie I : premier système —

Le premier système est défini par deux sous systèmes $\mathcal{S}_p$ et $\mathcal{S}_i$ et à une entrée e, il associe deux sorties x_p et x_i définies par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \begin{cases} x_p(n) = e(2n) \\ x_i(n) = e(2n+1) \end{cases}$$

Il réalise ainsi deux sous échantillonnages du signal d'entrée : il retient d'une part les échantillons d'indice pair et d'autre part les échantillons d'indice impair.

(1) $\mathcal{S}_p$ et $\mathcal{S}_i$ sont-ils des systèmes linéaires ? Sont-ils invariants ? Justifiez brièvement.

— Linéarité de $\mathcal{S}_p$ et $\mathcal{S}_i$:
soit $e(n) = \alpha e_1(n) + e_2(n)$
on a alors $x_p(n) = e(2n) = \alpha e_1(2n) + e_2(2n) = \alpha x_{p1}(2n) + x_{p2}(2n)$
et on peut conclure que $\mathcal{S}_p$ est linéaire. On fait le même raisonnement pour $\mathcal{S}_i$.

— Invariance de $\mathcal{S}_p$ et $\mathcal{S}_i$:

soit $e'(n) = e(n+k)$

$$\begin{aligned} x'_p(n) &= e'(2n) \\ &= e(2n+k) \\ &\neq x_p(n+k) \end{aligned}$$

Le systéme $\mathcal{S}_p$ n'est donc pas invariant. On fait le même raisonnement pour $\mathcal{S}_i$ et on obtient le même résultat.

(2) Relation entrée – sortie, en z. On note E, X_p, X_i les transformées en z de e, x_p, x_i.

(a) Rappelez la relation de définition de $E(z)$. Écrivez $E(z)$ et $E(-z)$ en séparant les termes pairs et les termes impairs.

$$E(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n) z^{-n}$$

Écrivons $E(z)$ et $E(-z)$

$$\begin{aligned} E(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n) z^{-n} \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} e(2p) z^{-2p} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} e(2p+1) z^{-2p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(-z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n)(-z)^{-n} \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} e(2p)(-1)^{-2p} z^{-2p} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} e(2p+1)(-1)^{-2p-1} z^{-2p-1} \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} e(2p) z^{-2p} - \sum_{p\in\mathbb{Z}} e(2p+1) z^{-2p-1} \end{aligned}$$

(b) Calculez $E(z)+E(-z)$ et $E(z)-E(-z)$.

Calculons $E(z)+E(-z)$

$$E(z)+E(-z) = 2\sum_{p\in\mathbb{Z}} e(2p)z^{-2p}$$

Calculons $E(z)-E(-z)$

$$E(z)-E(-z) = 2\sum_{p\in\mathbb{Z}} e(2p+1)z^{-2p-1}$$

(c) Déduisez-en

$$\begin{cases} X_p(z) = 0.5\ (E(z^{1/2})+E(-z^{1/2})) \\ X_i(z) = 0.5\ z^{1/2}\ (E(z^{1/2})-E(-z^{1/2})) \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} 0.5\ (E(z^{1/2})+E(-z^{1/2})) &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} e(2p)z^{-p} \\ &= X_p(z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0.5\ z^{1/2}\ (E(z^{1/2})-E(-z^{1/2})) &= z^{1/2}\ \sum_{p\in\mathbb{Z}} e(2p+1)z^{-p-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} e(2p+1)z^{-p} \\ &= X_i(z) \end{aligned}$$

(3) Donnez la transformée de Fourier $\hat{x}_p$ de la sortie x_p en fonction de la transformée de Fourier $\hat{e}$ de l'entrée e. Comment construire graphiquement $\hat{x}_p$ à partir de $\hat{e}$? Commentez.

Pour déterminer, la transformée de Fourier à partie de la transformée en Z on pose $z = e^{2i\pi\nu}$. On a alors d'après les relations précédentes

$$\begin{aligned} \hat{x}_p(\nu) &= X_p(e^{2i\pi\nu}) \\ &= 0.5\ \left(E(e^{2i\pi\nu^{1/2}}) + E(-e^{2i\pi\nu^{1/2}})\right) \\ &= 0.5\ \left(E(e^{i2\pi\frac{\nu}{2}}) + E(e^{2i\frac{\pi}{2}}e^{i2\pi\frac{\nu}{2}})\right) \\ &= 0.5\ \left(\hat{e}\left(\frac{\nu}{2}\right) + \hat{e}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\hat{x}_i(\nu) &= X_i(e^{2i\pi\nu}) \\ &= 0.5\ e^{2i\pi\nu^{\frac{1}{2}}}\left(E(e^{2i\pi\nu^{1/2}}) - E(-e^{2i\pi\nu^{1/2}})\right) \\ &= 0.5\ e^{2i\pi\frac{\nu}{2}}\left(E(e^{i2\pi\frac{\nu}{2}}) + E(e^{2i\frac{\pi}{2}}e^{i2\pi\frac{\nu}{2}})\right) \\ &= 0.5\ \ e^{2i\pi\frac{\nu}{2}}\left(\hat{e}\left(\frac{\nu}{2}\right)\hat{e}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Pour construire graphiquement $\hat{x}_p(\nu)$ on prend la première moitié de $E(\nu)$ et on lui ajoute la deuxième moitié de $E(\nu)$ puis on divise par 2 (voir figure 2). On est en présence de repliement de spectre.

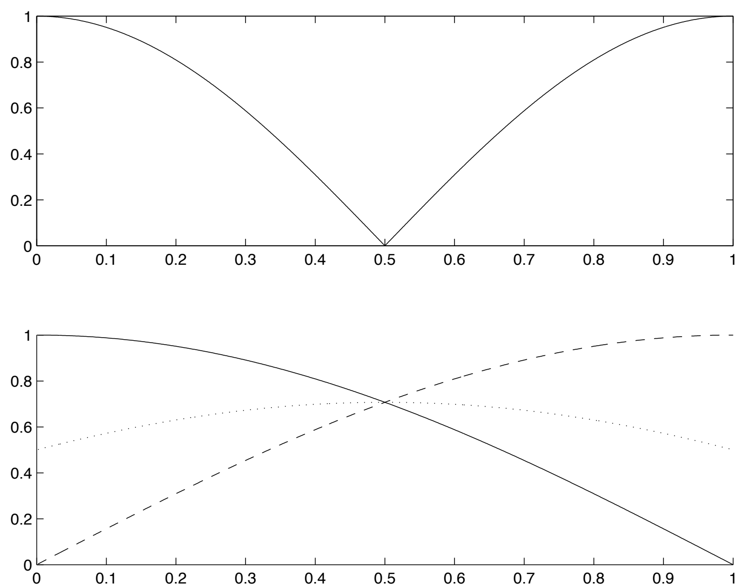

FIGURE 2. en haut $E(\nu)$, en bas en trait plein première moitié de $E(z)$, en tiret deuxième moitié de $E(z)$ et en point $X_p(\nu)$.

— Partie II : second système —

La seconde partie du système est constituée de deux sous-systèmes $\updownarrow_p$ et $\updownarrow_i$ d'entrées y_p et y_i et de sorties z_p et z_i définies par

$$\forall n \in \mathbb{Z} \begin{cases} z_p(2n) = y_p(n) \\ z_p(2n+1) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z_i(2n) = 0 \\ z_i(2n+1) = y_i(n) \end{cases}$$

La sortie est la somme $s(n) = z_p(n) + z_i(n)$. On note Z_p, Z_i, Y_p, Y_i et S les transformées en z de z_p, z_i, y_p, y_i et s.

(4) Calculez Z_p en fonction de Y_p d'une part et Z_i en fonction de Y_i d'autre part.

Calculons $Z_p(z)$

$$\begin{aligned} Z_p(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_p(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_p(n)z^{-2n} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_p(n)(z^2)^{-n} \\ &= Y_p(z^2) \end{aligned}$$

Calculons $Z_i(z)$

$$\begin{aligned} Z_i(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_i(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_p(n)z^{-2n-1} \\ &= z^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} y_p(n)(z^2)^{-n} \\ &= z^{-1}Y_i(z^2) \end{aligned}$$

(5) Donnez la transformée de Fourier $\hat{z}_p$ de la sortie z_p en fonction de la transformée de Fourier $\hat{y}_p$ de l'entrée y_p. Comment construire graphiquement $\hat{z}_p$ à partir de $\hat{y}_p$? Commentez.

Soit $z = e^{2i\pi\nu}$. On a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \hat{z}_p(\nu) &= Z_p(e^{2i\pi\nu}) \\ &= Y_p(e^{2i\pi\nu^2}) \\ &= Y_p(e^{2i\pi 2\nu}) \\ &= \hat{y}_p(2\nu) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \hat{z}_i(\nu) &= Z_i(e^{2i\pi\nu}) \\ &= e^{-2i\pi\nu}Y_i(e^{2i\pi\nu^2}) \\ &= e^{-2i\pi\nu}Y_i(e^{2i\pi 2\nu}) \\ &= e^{-2i\pi\nu}\hat{y}_i(2\nu) \end{aligned}$$

Il suffit de dilater $\hat{y}_p(\nu)$ pour obtenir $\hat{z}_p(\nu)$.

(6) Donnez S en fonction de Y_p et Y_i.

Calculons $S(z)$

$$S(z) = Z_p(z) + Z_i(z) = Y_p(z^2) + z^{-1}Y_i(z^2)$$

— Partie III : association des deux systèmes —

(7) On associe les deux systèmes en faisant : $y_p = x_p$ et $y_i = x_i$. Déterminez la sortie s en fonction de l'entrée e. Commentez.

On associe les deux systèmes déterminons $S(z)$ en fonction de $E(Z)$, pour cela on se sert des résultats précédents :

$$\begin{aligned}
S(z) &= Z_p(z) + Z_i(z) \\
&= Y_p(z^2) + z^{-1}Y_i(z^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(E(\sqrt{z^2}) + E(-\sqrt{z^2})\right) + z^{-1}\frac{\sqrt{z^2}}{2}\left(E(\sqrt{z^2}) - E(-\sqrt{z^2})\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(E(z) + E(z)\right) + z^{-1}\frac{z}{2}\left(E(z) - E(-z)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(E(z) + E(z)\right) + \frac{1}{2}\left(E(z) - E(-z)\right) \\
&= E(z)
\end{aligned}$$

Le systéme ne modifie pas le signal. On a donc du repliment de spectre dans x_p et x_i, on a une version dégradée du signal d'entrée dans ces deux signaux. Mais en reconbinant de manière adéquate ces deux signaux, on retrouve le signal de départ.

Exercice 2. — *Multiplexage numérique* $\star$.

Pour transmettre deux signaux, il est souvent plus simple de les mélanger et de n'en transmettre qu'un, à condition d'être capable de les séparer après réception. C'est ce que l'on appelle le multiplexage.

On cherche à coder simultanément deux signaux $x, y \in \ell_2(\mathbb{Z})$ On suppose que les TFD respectives de x et y sont telles que $\hat{x}(\omega) = \hat{y}(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$.

(1) On pose $z_n = (-1)^n y_n$ (z est une copie "modulée" de y), et $w_n = x_n + z_n$. Montrer que $\hat{z}(\omega) = \hat{y}(\omega + \pi)$, et étudier le support de $\hat{z}$.

(2) Montrer que x peut être obtenu à partir de w par filtrage passe-bas (qui supprime la bande de fréquence $[-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$), et expliciter ce filtrage.

(3) Montrer que y peut être obtenu à partir de w par modulation (c'est à dire une translation dans l'espace des fréquences) suivie d'un filtrage passe-bas.

(4) Généraliser cette méthode au problème du multiplexage de N signaux $x^{(0)}, \ldots x^{(N-1)}$ tels que pour tout $n = 0, \ldots N-1$

$$\widehat{x^{(n)}}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in [-\pi, -\pi/N] \cup [\pi/N, \pi] \ .$$

Exercice 3. — *Estimation de hauteur à l'aide de la fonction d'autocorrélation.*

Soit $x[n]$ un signal discret à valeurs réelles défini sur l'intervalle $n \in [\![0,\ N-1]\!]$, et $x[n] = 0$ pour tout $n \notin [\![0,\ N-1]\!]$. On considère la fonction d'autocorrélation $\bar{r}_x[m]$ normalisée suivante :

$$\bar{r}_x[m] = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, x[n+m]}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x[n+m]^2}}\ .$$

On se propose ici de démontrer que $\bar{r}_x[m]$ atteint la valeur maximale 1 en $m = P$ si et seulement si le signal $x[n]$ est de la forme $x[n] = y[n]\, e^{-d\,n}$, où $y[n]$ est un signal périodique de période P, et $d \in \mathbb{R}$ est appelé "facteur d'atténuation" du signal.

(1) Montrer que $\bar{r}_x[m]$ est à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$. Avec Cauchy-Schwartz :

$$|\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, x[n+m]| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x[n+m]^2}$$

et donc $|\bar{r}_x[m]| \leq 1$

(2) Soit $P \in]0,\ N-1[$. Montrer que $\bar{r}_x[P] = 1$ si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

(1) $$x[n+P] = \alpha\, x[n]\ \forall n \in [0,\ N-P-1]$$

$\bar{r}_x[P] = 1$ ssi $x[n]$ et $x[n+P]$ sont colinéaires (égalité dans Cauchy-Schwartz), ie $x[n+P] = \alpha\, x[n]\ \forall n \in [0,\ N-P-1]$

(3) En effectuant le changement de variable $y[n] = x[n]\, \alpha^{-\frac{n}{P}}$, vérifier qu'un signal $x[n]$ satisfait la relation (1) si et seulement si $y[n]$ est périodique de période P.

$$x[n+P] = \alpha\, x[n] \Leftrightarrow$$
$$y[n+P]\alpha^{\frac{n+P}{P}} = \alpha y[n]\alpha^{\frac{n}{P}} \Leftrightarrow$$
$$y[n+P]\alpha^{\frac{n+P}{P}} = y[n]\alpha^{\frac{n+P}{P}} \Leftrightarrow$$
$$y[n+P] = y[n]$$

(4) Déduire des questions précédentes que $\bar{r}_x[m]$ atteint la valeur 1 en $m = P$ si et seulement si $x[n]$ est de la forme $y[n]\, e^{-d\,n}$, où $y[n]$ est de période P (on exprimera le facteur d'atténuation d en fonction de α). $\bar{r}_x[m]$ atteint la valeur 1 en $m = P$ si et seulement si $x[n+P] = \alpha\, x[n]\ \forall n \in [0,\ N-P-1]$ (Q. 2), ie ssi $x[n] = y[n]\alpha^{\frac{n}{P}}$ avec y P-periodique, ie

$$x[n] = y[n]e^{\log(\alpha^{\frac{n}{P}})} = y[n]e^{n\frac{\log(alpha)}{P}}$$

Exercice 4. — *Formule sommatoire de Poisson.*

Soit f une fonction a décroissance rapide. Soit $S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT)$ telle que que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(t+nT)| < +\infty$.

(1) Montrer que S est T périodique

$S(t+T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+T+nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+(n+1)T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT) = S(t)$

(2) Calculer la décomposition en série de Fourier de S

$$\begin{aligned}
c_n(S) &= \frac{1}{T}\int_0^T S(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\,\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\,\mathrm{dt} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\int_0^T f(t+nT)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\,\mathrm{dt} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} f(u)e^{-i\frac{2\pi}{T}n(u-nT)}\,\mathrm{dt} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} f(u)e^{-i\frac{2\pi}{T}nu}\,\mathrm{du} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} f(u)e^{-i\frac{2\pi}{T}nu}\,\mathrm{du} \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\frac{2\pi}{T}nu}\,\mathrm{du} \\
&= \frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)
\end{aligned}$$

$$S(t) = \sum_{n\in ZZ} \frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

(3) en déduire la formule sommatoire de Poisson

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT) = \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

$$S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT)$$

donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT) = \frac{1}{T}\sum_{n\in ZZ} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

(4) en déduire

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)$$

formule précédente en $t=0$ et $T=1$

(5) Soit $\delta_\tau(t) = \delta(t-\tau)$. Montrer que

$$\hat{\delta}_\tau(\nu) = e^{-i2\pi\nu\tau}$$

et donc,

$$\widehat{e^{i2\pi\nu\tau}}(t) = \delta_\tau(\nu)$$

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_\tau(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)e^{-i2\pi\nu t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-i2\pi\nu\tau}\end{aligned}$$

(6) Appliquer la formule sommatoire de Poisson à $f = \delta$. En déduire que la transformée de Fourier d'un peigne de dirac est un peigne de dirac

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t+nT) &= \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\delta}_{mT}\left(\frac{m}{T}\right) e^{i\frac{2\pi}{T}mt} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi\frac{m}{T}mT} e^{i\frac{2\pi}{T}mt} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{2\pi}{T}m(t+mT)} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{2\pi}{T}mt}\end{aligned}$$

On prend la TF de chaque membre :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\delta(t+nT)}(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\delta}_{nT}(\nu) &= \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{e^{i\frac{2\pi}{T}mt}}(\nu) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{e^{i\frac{2\pi}{T}mt}}(\nu) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{\frac{m}{T}}(\nu)\end{aligned}$$