Licence 3 IST

Probabilités

EXAMEN DE PROBABILITÉS

Table des matières

Seul le poly de cours "peu annoté" est autorisés

Durée de l'épreuve : 3 heures

Exercice 1. — *Haut-fourneau.*

(1) Un haut-fourneau produit chaque jour de 0 à 10 000 tonnes de fonte brute. La quantité de fonte produite en un jour est une variable aléatoire X de densité définie par : $f(x) = K(-x^2 + 10x)$ avec $0 \leq x \leq 10$.

La production journalière x est exprimée en milliers de tonnes.

(a) Pourquoi doit-on avoir $x \in [0, 10]$ pour que f soit une densité de probabilité ?

(b) Déterminer K pour que f soit une densité de probabilité.

(c) Calculer $E(X)$ et $\mathrm{Var}\,[\mathrm{X}]$.

(d) Déterminer la fonction de répartition de X.

(2) On considère maintenant que la production de fonte en milliers de tonnes pendant N jours est représentée par N variables aléatoires indépendantes X_1,..., X_N chacune d'entre elles suivant la même loi de densité : $f(x) = K(-x^2 + 10x)$ pour $0 \leq x \leq 10$ avec K égale à la valeur trouvée en 1)(a). On considère que la production du jour i est insuffisante si $X_i \leq 2$.

(a) Calculer la probabilité qu'il y ait production insuffisante le jour i.

(b) Calculer la probabilité qu'il y ait une production insuffisante pendant les trois premiers jours.

(c) Par quel loi peut-on approcher la production pendant N jours quand N est suffisamment grand ?

Exercice 2. — *Division cellulaire.*

On s'intéresse à une cellule qui est capable de produire deux molécules différentes, l'une notée A et l'autre B. Ces molécules sont produites selon les règles suivantes :

— si la cellule est vivante, elle produit A ou B avec une probabilité de $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

— si la cellule produit B, elle meurt tout de suite après la production de B

— si la cellule produit successivement quatre A, elle meurt tout de suite après la production du quatrième A

On isole une de ces cellules qui n'a encore rien produit. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire qui donne le nombre de A (respectivement B) produits par la cellule avant de mourir.

Après la mort de la cellule, les molécules produites peuvent être représentées par l'un des éléments de l'ensemble $\{B, AB, AAB, AAAB, AAAA\}$.

(1) Déterminer la loi de X et la loi de Y. À quelle loi connue correspond la loi de Y ?

(2) Calculer $\mathrm{E}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{E}[\mathrm{Y}]$

(3) Que vaut $P(X = 4|Y = 1)$?

(4) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(5) On isole cinq cellules qui n'ont encore rien produit. On suppose leur comportement indépendant. Après la mort des cinq cellules, quelle est la probabilité que k molécules B ait été produites en tout ?

Exercice 3. — *Loi log-normale.*

Soient m, σ deux réels. On dit que X suit une loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si $Y = \ln(X)$ suit une loi normale de paramètres (m, σ^2). On supposera dans la suite $m = 0$ et $\sigma = 1$.

(1) Montrer la fonction de répartition de X s'écrit :

$$F_X(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\ln(u)^2/2} \frac{\mathrm{d}\, u}{u} \ \forall t > 0$$

(2) En déduire la densité de probabilité de X

(3) Montrer que $\mathrm{E}[\mathrm{X}] = \sqrt{e}$. *(Indication : après un changement variable adéquat, on pourra remarquer que* $-\frac{t^2}{2} + t = -\frac{(t-1)^2}{2} + \frac{1}{2}$ *et reconnaitre la densité d'une loi normale de moyenne* $\mu = 1$ *et de variance* $\sigma^2 = 1$.*)*

Exercice 4. — *Point d'accès Internet.*

Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. À un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t

(1) Quelle est la loi de X ?

(2) Quelle est son espérance, son écart-type ?

(3) On pose $Y = \frac{X-1000}{\sqrt{800}}$ Justifier précisément qu'on peut approcher la loi de Y par la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

(4) Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2.5%. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions. On utilisera le fait que si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $P(Z < 1.96) > 0.975$

Exercice 5. — *Convergences.*

Soit la suite de variables aléatoires X_n définie par

$$\begin{cases} P(X_n = 0) & = 1 - \frac{1}{n} \\ P(X_n = n) & = \frac{1}{n} \end{cases}$$

(1) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $X = 0$

(2) En utilisant le théorème de Levy, montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X = 0$