Licence 3 IST
PROBABILITÉS

SUJETS DE TD

TABLE DES MATIÈRES

Exercice 1. — *Tirage de carte.*

On tire 3 cartes d'un jeux de 52 cartes. Calculer les probabilités que la première carte soit un 6 ; la deuxième carte soit un 6 ; la première soit un 6, la deuxième un roi de trèfle et la troisième un coeur.

Exercice 2. — *Anniversaires.*

On s'intéresse aux probabilités des coïncidences, que nous allons illustrer avec les dates d'anniversaire d'un ensemble de personnes.

(1) Cherchons tout d'abord la probabilité pour que les anniversaires de n personnes soient tous à des dates différentes. Quelle est alors la probabilité pour que deux personnes au moins aient le même anniversaire (faire le calcul pour $n = 23$) ?

La probabilité P_1 pour que les anniversaires de n personnes soient tous à des dates différentes est (multiplications d'évènements indépendants) :

$$\frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

La probabilité pour que deux personnes au moins aient le même anniversaire est donc (complémentaire de l'évènement précédent)

$$1 - \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

A.N ($n = 23$)

$$P_1 = 0.5073$$

(2) Quelle est la probabilité P_2 pour que, parmi 23 personnes, il y en ait exactement deux qui ont le même anniversaire, tous les autres étant distincts ?

On calcule d'abord la probabilité que parmi 22 personnes, toutes ont un anniversaire différent :

$$P_{2;1} = \frac{365 \times 1 \times 364 \times 363 \times \dots (364 - 22 + 1)}{365^{22}} =$$

La 23^e personne a donc une date fixée pour son anniversaire, soit $1/365$. Comme le nombre de couple possible parmi 23 personne est $\binom{23}{2}$, on a :

$$P_2 = P_{2;1} \times \frac{1}{365} \times \binom{23}{2} = 0.36$$

(3) Dans son article (Pour la Science numéro 249) Ian Stewart affirme que :

— la probabilité pour que parmi 23 personnes il y ait exactement 2 anniversaires communs à 2 personnes chacun, tous les autres étant distincts, est environ $0,111$

— la probabilité pour que parmi 23 personnes il y ait exactement 3 anniversaires communs à 2 personnes chacun, tous les autres étant distincts, est environ $0,018$

— la probabilité pour que parmi 23 personnes il y ait exactement 1 anniversaire commun à 3 personnes, tous les autres étant distincts, est environ $0,007$.

Vérifiez ces affirmations.

— Il y a 21 dates d'anniversaire différentes, 2 personnes ont leur date d'anniversaire "imposée" et différente, et il faut compter toutes les combinaisons de 2 couples parmi 23

$$P = \frac{365 \times 1 \times 364 \times 363 \times \dots (364 - 21 + 1)}{365^{21}} \times \frac{1}{365} \times \frac{1}{365} \times \binom{23}{2} \times \binom{21}{2} \times \frac{1}{2} = 0.111$$

— Il y a 20 dates d'anniversaire différentes, 3 couples ont leur date d'anniversaire "imposée" (avec trois dates différentes), et il faut compter toutes les combinaisons de 3 fois 2 personnes possibles parmi 23

$$P = \frac{365 \times 1 \times 364 \times 363 \times \dots (364 - 20 + 1)}{365^{20}} \times \frac{1}{365} \times \frac{1}{365} \times \frac{1}{365} \times \binom{23}{2} \times \binom{21}{2} \times \binom{19}{2} \times \frac{1}{6} = 0.018$$

— Il y a 22 dates d'anniversaire différentes, 2 personnes ont leur anniversaire "imposé" et un triplet parmis 23 personnes

$$P = \frac{365 \times 1 \times 364 \times 363 \times \dots (364 - 22 + 1)}{365^{22}} \times \frac{1}{365} \times \frac{1}{365} \times \binom{23}{3} = 0.007$$

Exercice 3. — *Jeu.*

On dépose au hasard un cadeau derrière l'une d'entre trois portes. Un jeu consiste à trouver ce cadeau en deux étapes. D'abord vous choississez une porte ; puis l'organisateur vous montre parmi les deux portes restantes, une porte derrière laquelle le cadeau ne se trouve pas. Vous avez alors la possibilité entre changer de choix où le garder : que faites-vous ?

Il faut bien entendu changer son choix. Sans information supplémentaire, les chances sont équiprobables de trouver le cadeau derrière chacune des trois portes. En choisissant au hasard une porte, il y a une probabilité de $\frac{1}{3}$ d'avoir le cadeau. L'organisateur **sait** où se trouve le cadeau, et **choisi** de vous montrer une porte vide (il ne la choisit pas au hasard !). La probabilité de la porte qu'il vous montre est donc de $\frac{0}{3}$ de contenir le cadeau. **Connaissant** cette information, la porte restant a donc une probabilité de $\frac{2}{3}$ de contenir le cadeau ! En effet, la somme des probabilités doit toujours être égale à 1. Or, la porte choisit au hasard a une proba de $\frac{1}{3}$, et celle ouverte de $\frac{0}{3}$. La porte restante a donc bien une probabilité de $\frac{2}{3}$ de contenir le cadeau.

Exercice 4. — *Jeu télévisé.*

16 candidats participent à un jeu télévisé. Chaque semaine, les téléspectateurs votent, et à la majorité, éliminent un candidat. On suppose que pour les téléspectateurs, tous les candidats sont équivalents sauf Zazie, qu'ils choisissent avec une fréquence deux fois moins élevée que les autres candidats. Ainsi, si à la semaine n ($n \geq 1$), Zazi est parmi les $16 - n + 1$ restants, alors les autres candidats ont la probabilité p_n d'être éliminés, alors que Zazie a la probabilité $p_n/2$.

(1) Montrer que $\frac{1}{2}p_n + (16-n)p_n = 1$

La somme des probabilités devant être égale à 1, on a

$$\frac{1}{2}p_n + (16-n)p_n = 1$$

(2) Modéliser l'évolution de Zazie dans ce jeu

$$\begin{aligned}
\frac{p_1}{2} + 15p_1 = 1 &\Rightarrow \frac{p_1}{2} = \frac{1}{31} \\
\frac{p_2}{2} + 14p_2 = 1 &\Rightarrow \frac{p_2}{2} = \frac{1}{29} \\
\frac{p_3}{2} + 13p_3 = 1 &\Rightarrow \frac{p_3}{2} = \frac{1}{27} \\
&\vdots \\
\frac{p_n}{2} + (16-n)p_n = 1 &\Rightarrow \frac{p_n}{2} = \frac{1}{2(16-n)+1} \\
&\vdots \\
\frac{p_{15}}{2} + p_{15} = 1 &\Rightarrow \frac{p_{15}}{2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(3) Quelle est la probabilité pour que Zazie ne soit pas éliminée les 15 premières semaines ?

Soit X_n la V.A. qui vaut 1 si Zazie est éliminée la semaine n. Soit Z la V.A. qui vaut 1 si Zazie est élminée durant les 15 première semaines, 0 sinon. La probabilité pour que Zazie ne soit pas éliminée les 15 premières semaines est :

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= P(X_1=0, X_2=0, \dots, X_15=0) \\ &= P(X_1=0)P(X_2=0)\dots P(X_n=0) \text{ (les } X_i \text{ sont indépendants} \\ &= (1-\frac{p_1}{2})(1-\frac{p_2}{2})\dots(1-\frac{p_{15}}{2}) \\ &= \frac{30}{31}\frac{28}{29}\frac{26}{27}\dots\frac{2}{3} \\ &= 3\% \end{aligned}$$

Exercice 5. — *Loi.*

(1) On choisit au hasard deux numéro distincts dans l'ensemble $\{-2,-1,0,1,2\}$, et l'on note X leur produit. Donner la loi de X.

Soit N_1 le premier numéro choisi, et N_2 le second. Les valeurs possibles de $X = N_1 \cdot N_2$ sont : $\{-4,-2,-1,0,2\}$. Les tirages étant indépendants, on a

$$\begin{aligned} P(X=-4) &= P(N_1=-2, N_2=2 \text{ ou }, N_1=2, N_2=-2) = P(N_1=-2)P(N_2=2) + P(N_1=2)P(N_2=-2) \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\frac{1}{4} = \frac{1}{10} \\ P(X=-2) &= 2P(N_1=-2, N_2=1 \text{ ou }, N_1=-2, N_2=1) = 2\left(\frac{1}{5}\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5} \\ P(X=-1) &= 2P(N_1=-1, N_2=1) = \frac{1}{10} \\ P(X=0) &= P(N_1=0, N_2 \neq 0 \text{ ou } N_1 \neq 0, N_2=0) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\frac{1}{4} = \frac{2}{5} \\ P(X=2) &= 2P(N_1=-2, N_2=-1 \text{ou} N_1=1, N_2=2) = \frac{2}{10} \end{aligned}$$

On vérifie qu'on a bien

$$P(X=-4) + P(X=-2) + P(X=-1) + P(X=0) + P(X=2) = 1$$

(2) On tire simultanément 3 jetons d'une urne contenant 5 jetons numérotés de 1 à 5, et on note X le plus petit nombre obtenus. Donner la loi de X.

Soit X_1, X_2, X_3 les résultats des trois jetons. Soit $Z = \min\{X_1, X_2, X_3\}$. Les valeurs possibles de Z sont donc $\{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}
P(Z=1) &= P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 > 1 \text{ et } X_3 > 1 \text{ ou } X_1 > 1 \text{ et } X_2 = 1 \text{ et } X_3 > 1 \text{ ou } X_1 > 1 \text{ et } X_2 > 1 \text{ et } X_3 = 1) \\
&= 3P(X_1 = 1)P(X_2, X3 > 1) \\
&= 3\frac{1}{5}\frac{4}{4}\frac{3}{3} = \frac{3}{5} = 60\% \\
P(Z=2) &= 3P(X_1 = 2, X_2X_3 > 2) \\
&= 3\frac{1}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3} = \frac{18}{60} = 30\% \\
P(Z=3) &= 3P(X_1 = 2, X_2X_3 > 2) \\
&= 3\frac{1}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3} = \frac{6}{60} = 10\%
\end{aligned}$$

Exercice 6. — *Proba et évènements.*

Soient deux évènements A et B définit sur le même espace de probabilité.

(1) Si A est négligeable, montrer que A et B sont indépendants ; même chose si A est presque sûr.

A est négligeable : $P(A) = 0$. A et B indépendants : $P(A, B) = P(A)P(B)$.

$$P(A, B) = P(B|A)P(A) = 0 = P(A)P(B)$$

A est presque sûr : $P(A) = 1$. Donc $P(A^c) = 1 - P(A) = 0$, i.e. A^c est négligeable. Formule des probabilités totales :

$$P(A)P(B) = P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = P(B|A)P(A) = P(A, B)$$

(2) Si A et B sont deux évènements incompatibles, montrer que A et B sont indépendants ssi $P(A)$ ou $P(B)$ est nulle.

A et B incompatibles : $A \cap B = \emptyset$. Donc $P(A, B) = 0$.

— $\Rightarrow$ $P(A, B) = P(A)P(B) = 0$, ce qui implique $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.

— $\Leftarrow$ Supposons $P(A) = 0$, alors $P(A)P(B) = 0 = P(A, B)$.

(3) Si A et B sont deux évènements indépendants, montrer que $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

A et B indépendants : $P(A, B) = P(A)P(B)$. Probabilité totale :

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = P(B)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$

donc

$$P(B|A^c)P(A^c) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(A^c)$$

De même pour A et B^c.

$$P(B^c) = P(B^c|A)P(A) + P(B^c|A^c)P(A^c) = P(B^c)P(A) + P(B^c, A^c)$$

donc

$$P(B^c, A^c) = P(B^c)(1 - P(A)) = P(B^c)P(A^c)$$

Exercice 7. — *Tirages dans des urnes.*

L'urne A contient 6 boules blanches et 5 boules rouges. On tire au hasard deux boules de A.

(1) Calculer les probabilités des évènements suivants, lorsque le tirage est effectué avec remise et sans remise :

- les deux boules sont blanches
  - Avec remise
  $$P(b, b) = \left(\frac{6}{11}\right)^2 = 29.75\%$$
  - Sans remise
  $$P(b, b) = \frac{6}{11}\frac{5}{10} = 27.27\%$$
- les deux boules sont de la même couleur
  - Avec remise
  $$P(b, b \text{ ou } r, r) = \left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{5}{11}\right)^2 = 50.41\%$$
  - Sans remise
  $$P(b, b \text{ ou } r, r) = \frac{6}{11}\frac{5}{10} + \frac{5}{11}\frac{4}{10} = 45.45\%$$
- l'une au moins des deux boules est blanche

  On passe par le complémentaire : aucune boule n'est blanche
  - Avec remise
  $$P(r, r) = \left(\frac{5}{11}\right)^2$$
  $$P = 1 - P(r, r) = 79.34\%$$
  - Sans remise
  $$P(r, r) = \frac{5}{11}\frac{4}{10} = 81.82\%$$

(2) On considère une deuxième urne B contenant 4 boules blanches et 8 boules rouges. On transfère au hasard 2 boules de B dans A puis on tire au hasard une boule de A. Calculer les probabilités des évènements suivants :

— la boule tirée est blanche.

On considère les cas suivant : on transfère $B = 0$,$B = 1$ ou $B = 2$ boules blanches.

$$P(B=0) = \frac{8}{12}\frac{7}{11} = \frac{14}{33}$$
$$P(B=1) = \frac{4}{12}\frac{8}{11} + \frac{8}{11}\frac{4}{12} = \frac{16}{33}$$
$$P(B=2) = \frac{4}{12}\frac{3}{11} = \frac{1}{11}$$

On a une partition de l'univers, on peut donc écrire le théorème des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(b) &= P(b|B=0)P(B=0) + P(b|B=1)P(B=1) + P(b|B=2)P(B=2) \\ &= \frac{6}{13}\frac{14}{33} + \frac{7}{13}\frac{16}{33} + \frac{8}{13}\frac{1}{11} \\ &= 52.91\% \end{aligned}$$

— une au moins des boules tranférées est blanche, sachant que la boule tirée de A est blanche.

On passe par le complémentaire : aucune boule transférée n'est blanche, sachant que la boule tirée de A est blanche. On applique la loi de Bayes

$$\begin{aligned} P(B=0|b) &= \frac{P(b|B=0)P(B=0)}{P(b)} \\ &= \frac{\frac{6}{13}\frac{14}{33}}{52.91\%} \\ &= 34.36\% \end{aligned}$$

Exercice 8. — *Test de dépistage.*

Pour dépister une maladie, on procède à un test sanguin. Si la personne est effectivement malade, ce test donne un résultat positif dans 99,9% des cas (sensibilité). Mais ce test donne aussi un résultat positif pour 1% des personnes non atteintes (spécificité). Sachant que la prévalence de la maladie dans la population globale est de 1 pour 1000, calculer la probabilité pour qu'une personne prise au hasard soit malade si son test est positif. Calculer également la probabilité qu'une personne prise au hasard soit en bonne santé si son test est négatif. Discuter.

On a :

$$\begin{aligned} P(+|M) &= 99.9\% & P(-|M) &= 1 - P(+|M) = 0.1\% \\ P(-|M^c) &= 1\% & P(+|M^c) &= 1 - P(-|M^c) = 99\% \\ P(M) &= 0.1\% & P(M^c) &= 1 - P(M) = 99.9\% \end{aligned}$$

On applique la loi de Bayes puis le théorème des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(M|+) &= \frac{P(+|M)P(M)}{P(+)} \\ &= \frac{P(+|M)P(M)}{P(+|M)P(M) + P(+|M^c)P(M^c)} \\ &= \frac{99.9\%0.1\%}{99.9\%0.1\% + (1-1\%)(1-0.1\%)} \\ &= 0.1\% \end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned} P(M^c|-) &= \frac{P(-|M^c)P(M^c)}{P(-)} \\ &= \frac{P(-|M^c)P(M^c)}{P(-|M^c)P(M^c) + P(-|M)P(M)} \\ &= \frac{P(-|M^c)P(M^c)}{P(-|M^c)P(M^c) + P(-|M)P(M)} \\ &= \frac{1\%99.9\%}{1\%99.9\% + 0.1\%0.1\%} \\ &= 99.9\% \end{aligned}$$

Exercice 9. — *Rendez-vous et probabilités.*

Aglaë et Sidonie ont décidé de se retrouver au restaurant universitaire entre 12h00 et 13h00. Chacune a promis à l'autre de ne pas l'attendre plus de 10 minutes. Aglaë et Sidonie arrivent au restaurant de façon indépendante. Aglaë peut arriver à 12h et x minutes ($x \in \{0, 1, \dots, 59\}$) avec la même probabilité pour tout x. Sidonie peut arriver au restaurant à 12h00, 12h15 ou 12h30 avec la même probabilité.

(1) Modéliser la situation

On introduit deux V.A. uniformes

$$P(A = 12hx) = \frac{1}{60} = P(A = x)$$

$$P(S = 12h00) = P(S = 12h15) = P(S = 12h30) = \frac{1}{3}$$

(2) Quelle est la probabilité qu'Aglaë et Sidonie se rencontrent ?

$$\begin{aligned} &P(A \in \{0, \dots, 10\}, B = 12h00) + P(A \in \{5, \dots 25\}, B = 12h15) + P(A \in \{20, \dots, 40\}, B = 12h30) \\ &= \frac{11}{60}\frac{1}{3} + \frac{21}{60}\frac{1}{3} + \frac{21}{60}\frac{1}{3} \\ &= 29.44\% \end{aligned}$$

(3) Aglaë arrive à 12h24. Quelle est la probabilité qu'elle rencontre Sidonie ?

Agalë rencontre Sidonie si Sidonie arrive à 12h15 ou 12h30

$$P(S = 12h15 \text{ ou } S = 12h30) = \frac{2}{3}$$

(4) Aglaë arrive à 12h24 et ne trouve pas Sidonie. Quelle est la probabilité que Sidonie arrive avant le départ d'Aglaë ?

Sidonie doit arriver entre 12h24 et 12h34. On a donc

$$P(S = 12h30) = \frac{1}{3}$$