SUJETS DE TD

Table des matières

Exercice 1. — *Gain et dé.*

(1) On jette un dé équilibré. Si un nombre pair sort, on gagne 2 €. Si un nombre impair sort, on perd 3 €. Combien gagne-t-on en moyenne ?

Soit X la V.A. qui prend les valeurs 2 ou -3

$$P(X=2)=\frac{1}{2} \quad P(X=-3)=\frac{1}{2}$$

Son espérance est donnée par :

$$\mathrm{E}\,[\mathrm{X}]=2P(X=2)-3P(X=-3)=2\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

(2) On jette deux dé équilibrés. Si la somme est un nombre premier, on gagne 2€ ; si la somme est un multiple de 2 (autre que 2, qui lui est un nombre premier), on perd 3€ ; si la somme est un autre nombre, on gagne 5€. Quel est le gain moyen ?

Soit X la V.A. qui prend les valeurs 2, -3 et 5. Sa loi est donnée par

$$P(X=2)=P(d1+d2=2,3,5,7,11)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{4}{36}+\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{15}{36}$$

$$P(X=-3)=P(d1+d2=4,6,8,10,12)=\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}=\frac{17}{36}$$

$$P(X=5)=P(d1+d2=9)=\frac{4}{36}$$

Son espérance est donc de

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{X}\right] = 2\frac{15}{36} - 3\frac{17}{36} + 5\frac{4}{36} = -0.0278$$

Exercice 2. — *Tu t'es vu quand t'as bu ?.*

Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans le noir, avec n clefs dont une seule est la bonne. On note X le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef. On pensera à utiliser l'évenement $A_i \in \mathbb{N} =$ "On ouvre la porte à l'essai i"

(1) On suppose que le gardien essaie les clefs une à une sans utiliser deux fois la même. Donner la loi de X, son espérance et sa variance. On rappel que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Les tentatives ne sont pas indépendantes

$$P(X=1) = P(A_1) = \frac{1}{n}$$

$$P(X=2) = P(A_1^c, A_2) = P(A_2|A_1^c)P(A_1^c) = \frac{1}{n-1}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$P(X=3) = P(A_1^c, A_2^c, A_3) = P(A_3|A_1^c, A_2^c)P(A_2^c|A_1^c)P(A_1^c) = \frac{1}{n-2}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\vdots$$

C'est une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\mathrm{X}\right] &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{X}\right] = \frac{n+1}{2} \qquad \mathrm{Var}\left[\mathrm{X}\right] = \frac{n^2-1}{12}$$

(2) Lorsque le gardien est ivre, il mélange toutes les clefs à chaque tentative. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

Dans cette expérience, les tentatives sont indépendantes et peuvent être modélisée par une loi de Bernoulli. On cherche la probabilité d'obtenir un succès au bout du k-ème essaie. C'est donc une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{n}$

$$P(X = k) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}$$

Et donc

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{X}\right] = \frac{1}{p} = n \quad \mathrm{Var}\left[\mathrm{X}\right] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n(n-1)$$

(3) Le gardien est ivre un jour sur trois. Sachant qu'un jour n tentatives ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le gardien ait été ivre ce jour là ? Calculer la limite quand n tend vers l'infini.

Soit I ="le gardien est ivre". On cherche $P(I|X = n)$ avec $P(I) = \frac{1}{3}$ et $P(X = n|I) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{n}$. On applique la loi de Bayes et le théorème des probabilités totales

$$\begin{aligned}
P(I|X = n) &= \frac{P(X = n|I)P(I)}{P(X = n)} \\
&= \frac{P(X = n|I)P(I)}{P(X = n|I)P(I) + P(X = n|I^c)P(I^c)} \\
&= \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{n}\frac{1}{3}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{n}\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\frac{2}{3}} \\
&= \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} + 2} \\
&= \frac{1}{1 + 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n}}
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n} &= e^{(n-1)\log\left(\frac{n}{n-1}\right)} \\
&= e^{n\log\left(\frac{n}{n-1}\right)} e^{-\log\left(\frac{n}{n-1}\right)}
\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\log\left(\frac{n}{n-1}\right)} = 1 \quad \log\left(\frac{n}{n-1}\right) \sim \frac{n}{n-1} - 1 = \frac{1}{n-1}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n} = \frac{1}{1+2e} = 0.16$$

Exercice 3. — *Jeu de dé.*

On jette 5 dés non truqués. Après le premier lancer, on reprend et on lance les dés qui n'ont pas donné de six, jusqu'à ce qu'on obtienne 5 six. Soit X le nombre de lancers nécessaires. Soit $X_{i=1,\dots,5}$ le nombre de lancer nécessaires pour que le $i$ème dé amène un 6 pour la première fois.

(1) Calculer $P(X \leq k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Les X_i sont indépendants et identiquement distribués, donc on a

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= P(X_1 \leq k, X_2 \leq k, \dots, X_5 \leq k) \\ &= \Pi_{i=1}^{5} P(X_i \leq k) \\ &= (P(X_1 \leq k))^5 \end{aligned}$$

Les X_i suivent une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$ (nombre de lancer nécessaire pour obtenir un 6). On a donc

$$P(X_i = j) = \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \frac{1}{6}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} P(X_i \leq k) &= P(X_i = 1 \text{ ou } X_i = 2 \text{ ou } \dots X_i = k) \\ &= \sum_{j=1}^{k} P(X_i = j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k \end{aligned}$$

et donc

$$P(X \leq k) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^5$$

(2) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Y}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y \geq k)$$

On a

$$P(Y \geq k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(Y = i)$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y \geq k) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=k}^{+\infty} P(Y = i)\\ &= P(Y=1) + 2P(Y=2) + 3P(Y=3) + \dots\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(Y=k)\\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{Y}\right]\end{aligned}$$

(3) Combien de lancers sont nécessaires en moyenne pour obtenir les 5 six ?

D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\mathrm{X}\right] &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - P(X \leq k-1))\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - P(X \leq k))\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^5\right)\\ &\simeq 13\end{aligned}$$

Exercice 4. — *Strategie pour QCM.*

On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque question k réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses proposées. On notera $X_{i=1,\dots,20}$ le résultat de la question i. $X_i = 1$ si la réponse est correct, 0 sinon.

(1) Quelle est la loi des X_i ?

Les X_i sont des variables i.i.d selon une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{k}$, avec $X_i = 1$ si la réponse est bonne et $X_i = 0$ sinon.

$$X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{k}\right)$$

(2) On lui attribue un point par bonne réponse. Soit Y le nombre de points obtenus. Quelle est la loi de Y ?

On peut écrire

$$Y = \sum_{i=1}^{20} X_i$$

Y étant la somme de 20 V.A. i.i.d de Bernoulli, c'est donc une loi binomiale

$$Y \sim \mathcal{B}\left(20, \frac{1}{k}\right)$$

(3) On propose au candidat de donner deux réponses possibles par questions (un premier vœux et un deuxième vœux). On lui attribue alors 1 point si son premier vœux est correct et $\frac{1}{2}$ point si c'est son deuxième vœux qui est correct. Soit Z le nombre de bonnes réponses obtenus lors de ces 20 seconds choix. Quelle est la loi de Z ?

On introduit les V.A Z_i telles que

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } 2e \text{ vœux correct} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La loi de Z_i est donnée par

$$\begin{aligned} P(Z_i = 1) = P(Z_i = 1, X_i = 0) &= P(Z_i = 1 | X_i = 0) P(X_i = O) \\ &= \frac{1}{k-1} \frac{k-1}{k} \\ &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

On a donc

$$Z_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Finalement, on peut écrire Z comme

$$Z = \sum_{i=1}^{20} Z_i$$

et donc

$$Z \sim \mathcal{B}\left(20, \frac{1}{k}\right)$$

(4) Soit S le nombre total de points obtenus. Déterminer k pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.

On peut écrire

$$S = Y + \frac{1}{2} Z$$

On cherche

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\mathrm{S}\right] &= \mathrm{E}\left[\mathrm{Y}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{E}\left[\mathrm{Z}\right] \\ &= \frac{20}{k} + \frac{1}{2}\frac{20}{k} \\ &= \frac{30}{k} \end{aligned}$$

ce qui donne $k = \frac{30}{5} = 6$. Pour une moyenne de 10, il faut $k = 3$

Exercice 5. — *Panne de machines.*

Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans ; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75% ; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

(1) Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?

On note $P5$ l'évènement "tomber en panne en 5 ans". $P5 \sim \mathcal{B}(30\%)$. On note HS l'évènement "devenir hors d'usage après 5 ans". On a $P(HS|P5) = 75\%$. On a de plus $P(HS|P5^c) = 40\%$.

Avec le théorème des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(HS) &= P(HS|P5)P(P5) + P(HS|P5^c)P(P5^c) \\ &= 75\%30\% + 40\%70\% \\ &= 50\% \end{aligned}$$

(2) Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?

Avec la loi de Bayes

$$\begin{aligned} P(P5^c|HS) &= \frac{P(HS|P5^c)P(P5^c)}{P(HS)} \\ &= \frac{40\%70\%}{50\%} \\ &= 55.5\% \end{aligned}$$

(3) Soit X la variable aléatoire "nombre de machines qui sont HS après 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard". Quelle est la loi de probabilité de X ?, son espérance, sa variance ?

Soit X_i la variable aléatoire qui indique si la machine i est tombée en panne, avec $i \in \{1, \ldots, 10\}$. On a $X_i \mathcal{B}(50\%)$. On peut écrire

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i$$

et donc on a

$$X \sim \mathcal{B}(10, 50\%)$$

avec

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}] = 5 \quad \mathrm{Var}[\mathrm{X}] = 2.5$$

(4) Calculer $P[X=5]$.

$$P(X=5)=\binom{10}{5}0.5^5 0.5^5=25\%$$

Exercice 6. — *Commercialisation de lecteur MP3.*

Une entreprise fabrique des lecteurs mp3, dont 6% sont défectueux. Chaque lecteur mp3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité rejette 98% des lecteurs mp3 défectueux et 5% des lecteurs mp3 fonctionnant correctement. On note :

— D l'évènement : "le lecteur mp3 est défectueux";

— R l'évènement : "l'unité de contrôle rejette le lecteur mp3".

On a

$$P(D)=6\% \quad P(R|D)=98\% \quad P(R|D^c)=5\%$$

(1) Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.

Ave la loi de Bayes

$$\begin{aligned}P(D,R^c)&=P(R^c|D)P(D)\\&=2\%6\%=0.12\%\end{aligned}$$

(2) On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur mp3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux. Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

On cherche

$$\begin{aligned}P(E)&=P(R,D^c \text{ ou } R^c,D)\\&=P(R,D^c)+P(R^c,D)\end{aligned}$$

On connait $P(R^c,D)$ avec la question précédente. Avec la loi de Bayes on a

$$\begin{aligned}P(R,D^c)&=P(R|D^c)P(D^c)\\&=5\%94\%=4.7\%\end{aligned}$$

et donc

$$P(E)=4.7\%+0.12\%=4.8\%$$

(3) Calculer la probabilité qu'un lecteur mp3 ne soit pas rejeté.

Avec la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}P(R^c)&=P(R^c|D)P(D)+P(R^c|D^c)P(D^c)\\&=0.12\%+95\%94\%\\&=90.5\%\end{aligned}$$

(4) Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur mp3 peut être commercialisé. Un lecteur mp3 est

— Commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs ;

— Détruit s'il est rejeté au moins deux fois ;

— Commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur mp3 s'élève à 50€. Son prix de vente est de 120€ pour un lecteur avec logo et 60€ pour un lecteur sans logo. On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur mp3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G

G peut prendre les valeurs :

— $120 - 50 = +70$ € si le lecteur est commercialisé avec le logo

— $60 - 50 = +10$ € si le lecteur est commercialisé sans le logo

— -50 € si le lecteur est détruit

On calcule donc les probabilités associées.

$$\begin{aligned} P(logo) &= P(R_1^c, R_2^c, R_3^c, R_4^c) \\ &= P(R^c)^4 \\ &= 0.905^4 = 67.1\% \end{aligned}$$

Il est commercialisé sans logo s'il est rejeté exactement une seule fois

$$\begin{aligned} P(sans\ logo) &= 4P(R_1^c, R_2, R_3, R_4) \\ &= 4P(R^c)P(R)^3 \\ &= 40.9050.095^3 = 28.2\% \end{aligned}$$

et détruit le reste du temps :

$$\begin{aligned} P(detruit) &= 1 - P(logo) - P(sans\ logo) \\ &= 1 - 67.1\% - 28.2\% \qquad = 4.7 \end{aligned}$$

(b) Calculer l'espérance de G. Interpréter le résultat.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\mathrm{G}\right] &= 0.671 \times 70 + 0.282 \times 10 - 0.047 \times 50 \\ &= 47.44 \end{aligned}$$

En moyenne, l'entreprise gagne en moyenne 44.12 € par lecteur mp3 fabriqué.