

SUJETS DE TD

TABLE DES MATIÈRES

Calcul de loi continue	1
Loi exponentielle symétrique	1
loi d'un couple à densité, lois conditionnelles.....	1
couple à densité gaussienne, conditionnement.....	2
Système de communication numérique.....	2
Rendez-vous	3
Durée de vie d'un circuit électronique	3
Stockage de déchets toxiques	3

Exercice 1. — *Calcul de loi continue.*

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (1) Vérifier que f est une densité de probabilité.
- (2) Soit X une variable aléatoire continue dont la loi a pour densité f . Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = X^2$.
- (3) En déduire la densité de la variable aléatoire Y .
- (4) Calculer l'espérance et la variance de Y .

Exercice 2. — *Loi exponentielle symétrique.*

Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle $\lambda > 0$ et ε une variable aléatoire discrète indépendante de Y et telle que $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$. Montrer que la loi de la variable aléatoire $Z = \varepsilon Y$ possède une densité et la calculer. Cette loi est appelée loi exponentielle symétrique.

Exercice 3. — *loi d'un couple à densité, lois conditionnelles.*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la densité est concentrée dans le quart de plan $x \geq 0, y \geq 0$ et vaut :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = ye^{-y(x+1)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+}(x, y)$$

- (1) Vérifier que c'est bien une densité de probabilité sur \mathbb{R}^2 .
- (2) Déterminer la densité marginale de Y
- (3) Calculer la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ (on constatera qu'il s'agit d'une densité exponentielle dont le paramètre dépend de y). Calculer l'espérance de cette loi conditionnelle.
- (4) Calculer la densité marginale de X , puis la densité conditionnelle de Y sachant X . Est-ce une loi connue ?

Exercice 4. — *couple à densité gaussienne, conditionnement.*

On considère le couple $X = (X_1, X_2)$ de variable aléatoire admettant la densité

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

avec $-1 < \rho < 1, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ et $m_1 \in \mathbb{R}, m_2 \in \mathbb{R}$

- (1) Vérifier que

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \times \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_2 - m_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - m_1))^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \right\}$$

- (2) En déduire que la loi marginale de X_1 est la loi normale $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$.
- (3) Quelle est l'espérance du couple $X = (X_1, X_2)$? Peut-on retrouver la loi du couple à partir des lois marginales? A quelle condition X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
- (4) Calculer la matrice de dispersion du couple $X = (X_1, X_2)$ et le coefficient de corrélation linéaire.
- (5) Quelle est la loi conditionnelle de X_2 sachant X_1 ? Quelle meilleure prédiction peut-on faire pour la valeur de X_2 si on observe $X_1 = x_1$?

Exercice 5. — *Système de communication numérique.*

Dans les systèmes de communications numériques (téléphone, lecteurs CD, ordinateurs...) les signaux sont souvent quantifiés sur 1 bit et ne prennent donc que les valeurs 0 ou 1. Soit X et Y les variables aléatoires donnant les valeurs d'un tel signal à deux instants distincts. Elles sont caractérisées par la distribution de probabilité conjointe

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = 0) &= a, & P(X = 0, Y = 1) &= b \\ P(X = 1, Y = 0) &= c, & P(X = 1, Y = 1) &= d \end{aligned}$$

- (1) Quelle relation doivent vérifier les quatre nombre a, b, c et d ?
- (2) Calculer l'espérance $E[XY]$
- (3) Calculer les distributions marginales de X et de Y . En déduire leur espérance.
- (4) Montrer que X et Y sont décorrélées si

$$d - (c + d)(b + d) = (c + d)(c + a) - c = 0$$

- (5) Calculer les probabilités $P(X = 1|Y = 0)$ et $P(X = 1|Y = 1)$. Que deviennent ces probabilités lorsque la distribution pour X et Y est décorrélée ? Conclusion ?

Exercice 6. — *Rendez-vous.*

Deux personnes se donnent rendez-vous en un lieu déterminé entre midi et 13 heures. On modélise leur instant d'arrivée par deux variables aléatoires indépendantes X et Y de distribution uniforme sur l'intervalle $[12h00, 13h00]$

- (1) Soit Z la variable aléatoire désignant le temps d'attente de la première personne arrivée. Quelle est sa densité ?
- (2) En supposant que la première personne arrivée s'en aille au bout d'une attente égale à $E[Z]$, quelle est la probabilité que les deux personnes se rencontrent ?

Exercice 7. — *Durée de vie d'un circuit électronique.*

La durée de vie, exprimée en années, d'un circuit électronique est une variable aléatoire T dont la fonction de répartition F est définie par :

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t^2/2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (1) Donner la densité de probabilité f_T de T
- (2) Calculer l'espérance de T
- (3) Sachant que le circuit a déjà fonctionné durant 1 an, quelle est la probabilité qu'il continue à fonctionner encore durant au moins 2 ans ?

Un équipement électronique est composé de dix circuits identiques et indépendants. Au circuit i ($1 \leq i \leq 10$) est associé la variable aléatoire X_i , avec $X_i = 1$ si la durée de vie du circuit i est inférieure à un an et $X_i = 0$ sinon.

- (4) Quelle est la loi du nombre N de circuits dont la durée de vie est inférieure à 1 an ?
- (5) L'équipement est dit en série si la défaillance de l'un de ses circuits entraîne sa défaillance. Quelle est alors la probabilité qu'il soit défaillant avant 1 an ?
- (6) L'équipement est dit en parallèle si sa défaillance ne peut se produire que si tous ses circuits sont défaillants. Quelle est alors la probabilité qu'il soit défaillant avant 1 an ?

Exercice 8. — *Stockage de déchets toxiques.*

On utilise des fûts pour stocker un déchet toxique liquide. On suppose que sur la très longue période de stockage les fûts se dégradent. En particulier, des perforations aléatoires apparaissent sur les fûts à cause de la corrosion. Le liquide toxique s'écoule alors par ces perforations. On considère m fûts de hauteur h et on suppose que le nombre de perforations N par fût suit une loi de Poisson de paramètre θ et que ces perforations sont uniformément répartis sur la hauteur du fût. On notera Z_k la variable aléatoire réelle donnant la hauteur de la k -ième perforation.

On s'intéresse d'abord à un seul fût.

- (1) Quelle est la densité de probabilité des Z_k et leurs propriétés statistiques entre elles et vis-à-vis de N ?

On note Z la variable aléatoire correspondant à la hauteur de la perforation la plus basse sur le coté du fût.

- (2) Écrire $P(Z > z|N = n)$ en fonction de $P(Z_k > z)$. Puis, en utilisant la fonction de répartition, donner la densité de Z conditionnellement à N (ie. $Z|N$)
- (3) Calculer le pourcentage moyen $\tau_N = \frac{E[Z|N]}{h}$ de liquide qu'on peut espérer conserver sachant le nombre de perforations N .

On considère maintenant l'ensemble des m fûts, avec m grand

- (4) Quel pourcentage moyen du liquide toxique peut-on espérer conserver, c'est-à-dire $\tau = \frac{E[Z]}{h}$? On utilisera le fait que $E[Z] = E[E[Z|N]]$. Application numérique : $\theta = 5$