COURS 2: ANALYSE SPECTRALE

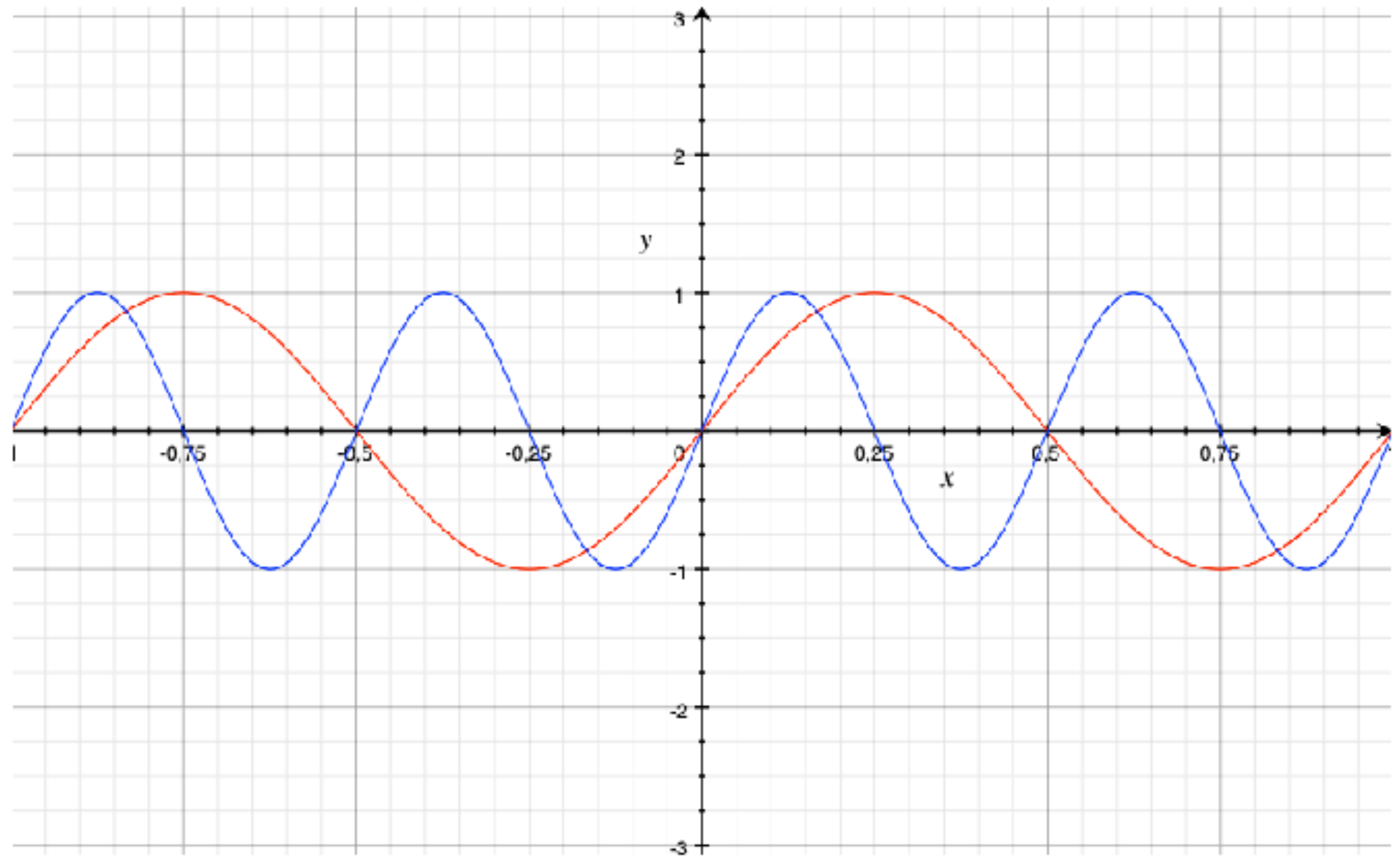
TRAITEMENT DU SIGNAL

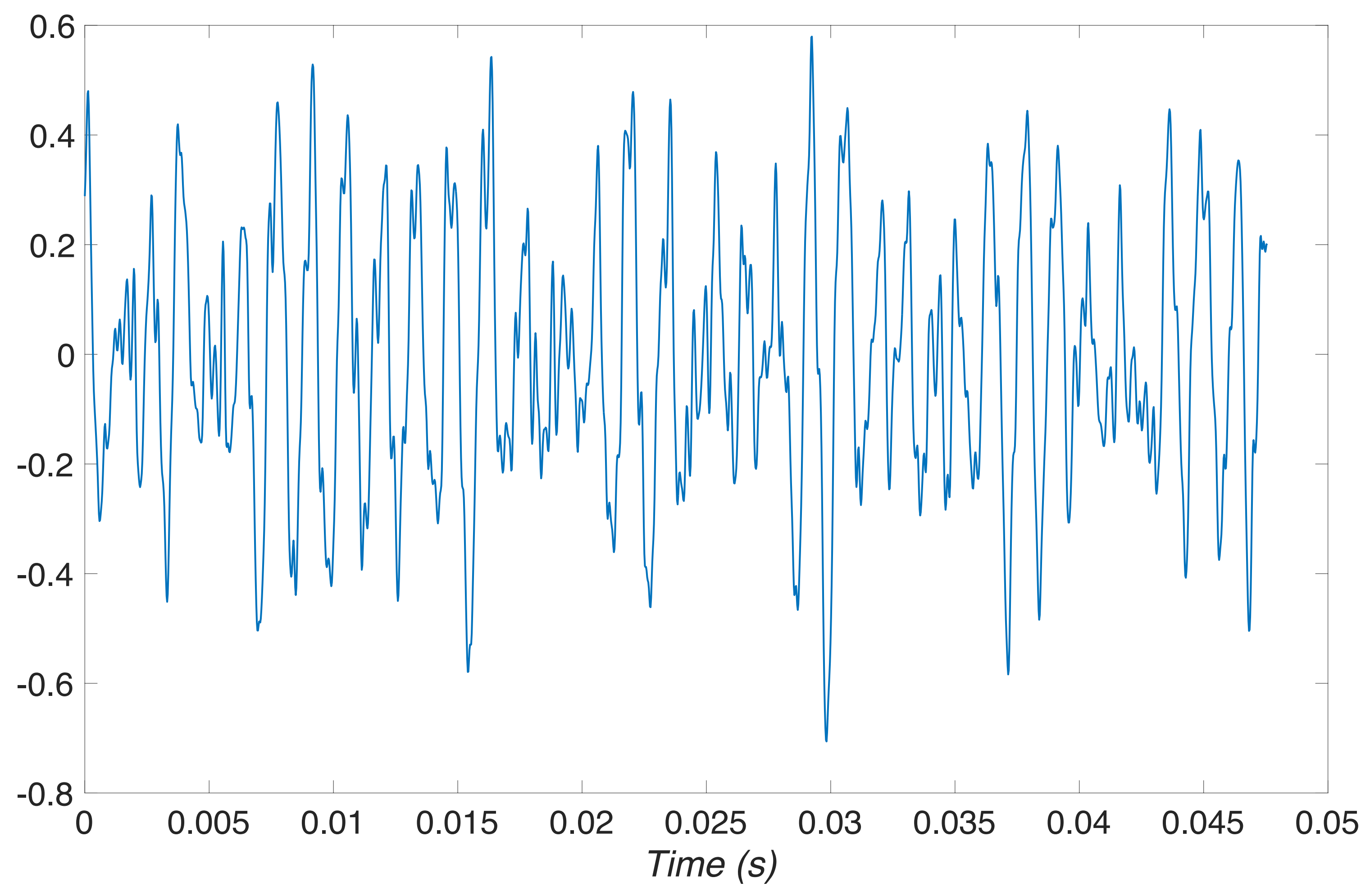
INTRODUCTION: SIGNAUX PÉRIODIQUES

FRÉQUENCE: DÉFINITION

- Larousse: *Grandeur liée à un phénomène périodique, qui mesure le nombre de fois où ce phénomène se reproduit dans un intervalle donné. Si le phénomène évolue uniquement dans le temps, on parle de fréquence temporelle, mesurée en hertz, l'intervalle de temps de référence étant la seconde.*

- En musique, la notion de fréquence est directement reliée à la hauteur de la note.





FRÉQUENCES POUR LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

- Soit une sinusoïde de période T: $sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, la fréquence ν est définie par $\nu = \frac{1}{T}$.
- Sinusoïde de fréquence ν: $sin\,(2\pi\nu t)$
- Exponentielle complexe de fréquence ν: $e^{i2\pi\nu t} = \cos(2\pi\nu t) + i\sin(2\pi\nu t)$

SERIES DE FOURIER : RAPPELS

- On mesure la ressemblance d'une fonction périodique avec les sinusoïdes de différentes fréquences

- Toute fonction périodique peut se décomposer comme une somme infinie de sinus et cosinus a différentes fréquences

Mesure de ressemblance: c'est un produit scalaire !

- Soit f une fonction de période T: $\forall t, f(t+T) = f(t)$. Alors on a

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{i2\pi \frac{n}{T} t}, \text{ avec } c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} \mathrm{d}\, t$$

SERIES DE FOURIER : RAPPELS

- On mesure la ressemblance d'une fonction périodique avec les sinusoïdes de différentes fréquences
- Toute fonction périodique peut se décomposer comme une somme infinie de sinus et cosinus a différentes fréquences
- Soit f une fonction de période T: $\forall t, f(t+T) = f(t)$. Alors on a

Mesure de ressemblance: c'est un produit scalaire !

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{i2\pi\frac{n}{T}t}, \text{ avec } c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi\frac{n}{T}t} \mathrm{d}\ t$$

- Voire https://www.falstad.com/fourier/Fourier.html

Et pour les fonctions non périodiques ?

SIGNAUX ANALOGIQUES

ANALYSE DE FOURIER

- Idée: mesurer la ressemblance d'une fonction les sinusoïdes de différentes fréquences
- Exponentielle complexe de fréquence ν: $\epsilon_\nu(t) = e^{i2\pi\nu t}$
- Mesure de ressemblance: produit scalaire: $\langle x, \epsilon_\nu \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{\epsilon_\nu}(t)\, \mathrm{d}t$
- Soit x un signal analogique, sa transformée de Fourier (quand elle existe) est donnée par:

$$\hat{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t}\, \mathrm{d}\, t$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER POUR LES SIGNAUX À TEMPS CONTINU

- Soit

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned}$$

un signal analogique **stable** ($x \in L^1(\mathbb{R})$), ou **d'énergie finie** ($x \in L^2(\mathbb{R})$), sa transformée de Fourier existe et est donnée par:

$$\hat{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t} \, \mathrm{d}\, t$$

- $\hat{x}(\nu)$ est une fonction de la **variable continue** ν
- L'existence de la transformée de Fourier est directe si $x(t)$ est un signal stable.
- L'existence de la transformée de Fourier pour $x \in L^2(\mathbb{R})$ se montre par un argument de densité

TRANSFORMÉE DE FOURIER INVERSE (SIGNAUX À TEMPS CONTINU)

- Soit $x(t)$ un signal analogique stable ($x(t) \in L^1(\mathbb{R})$) ou d'énergie finie ($x(t) \in L^2(\mathbb{R})$)et $\hat{x}(\nu)$ sa transformée de Fourier. Si $\hat{x}(\nu)$ est intégrable ou d'énergie finie, alors la transformée de Fourier est inversible:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\nu) e^{i2\pi\nu t} \, \mathrm{d}\, \nu$$

- Si $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{x}(\nu) \in L^2(\mathbb{R})$ (et réciproquement). Cf. Théorème de Plancherel-Parseval

EXEMPLES

- Soit $x(t) = \Theta(t)$. Alors $x(t)$ n'admet pas de transformée de Fourier, car le signal de Heaviside n'est ni stable, ni d'énergie finie

EXEMPLES

- Soit $x(t) = \Pi_A(t)$

$$\hat{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi\nu t}\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_A[t]e^{-i2\pi\nu t}\,\mathrm{d}\,t = \int_{-A}^{A} e^{-i2\pi\nu t}\,\mathrm{d}\,t$$
$$= \frac{e^{-i2\pi\nu A} - e^{i2\pi\nu A}}{-i2\pi\nu}$$
$$= \frac{\sin(2\pi\nu A)}{\pi\nu}$$
$$= 2A\mathrm{sinc}(2\nu A))$$

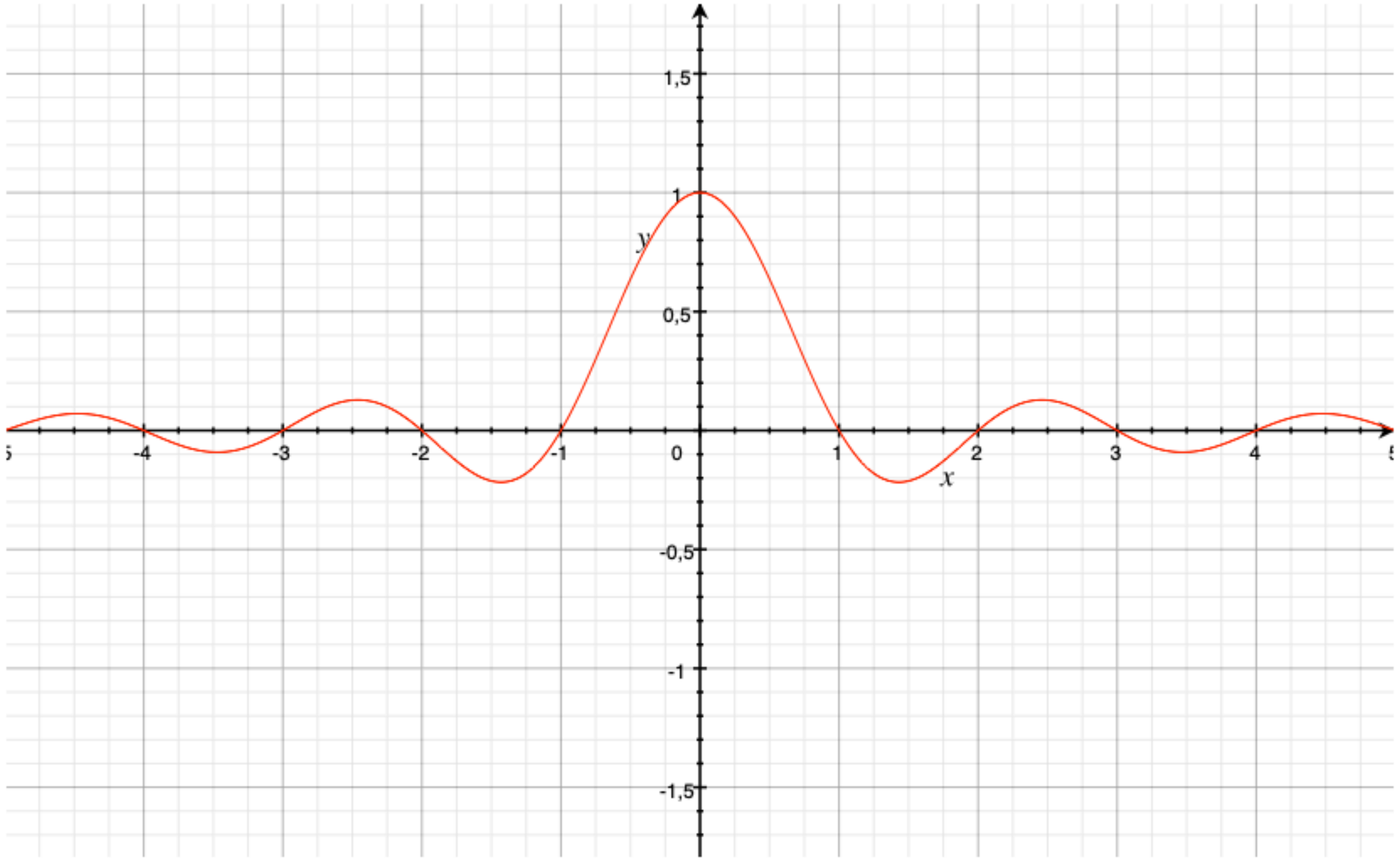
- Avec

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

EXEMPLE

- Soit $x(t)$ le signal analogique défini par sa transformée de Fourier

$$\hat{x}(\nu) = \Pi_{[-1/2,1/2]}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \in [-1/2,1/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



- Alors, la transformée de Fourier inverse donne

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\nu) e^{i2\pi\nu t} \, \mathrm{d}\, t = \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi\nu t} \, \mathrm{d}\, t$$

$$= \left[\frac{e^{i2\pi\nu t}}{i2\pi t} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{i2\pi t}$$

$$= \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$= \operatorname{sinc}(t)$$

THÉORÈME DE PLANCHEREL-PARSEVAL

Soit $u(t)$ et $v(t)$ deux signaux de $L^2(\mathbb{R})$, de transformée de Fourier $\hat{u}(\nu)$ et $\hat{v}(\nu)$. Alors

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \langle \hat{u}(\nu), \hat{v}(\nu) \rangle$$

$$\|u\|_2^2 = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \left| u(t) \right|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{u}(\nu) \right|^2 \, \mathrm{d}\nu = \|\hat{u}\|_2^2$$

Il y a conservation de l'énergie et du produit scalaire dans le domaine fréquentiel: la transformée de Fourier est une isométrie

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE CALCULS

- Symétrie: si $\forall t,\ u(t) \in \mathbb{R}$, alors

$\hat{u}(\nu) = \overline{\hat{u}(-\nu)}$ et $\left|\hat{u}(\nu)\right| = \left|\hat{u}(-\nu)\right|$

- Linéarité: $v(t) = au_1(t) + u_2(t)$

$\hat{v}(\nu) = a\hat{u}_1(\nu) + \hat{u}_2(\nu)$

- Translation: $v(t) = u(t - a)$

$\hat{v}(\nu) = e^{-i2\pi\nu a}\hat{u}(\nu)$

- Convolution: soit $w(t) = (u * v)(t)$, alors

$\hat{w}(\nu) = \hat{u}(\nu)\,\hat{v}(\nu)$

SPECTRE D'UN SIGNAL

Soit $x(t)$ un signal analogique et $\hat{x}(\nu)$ sa transformée de Fourier. On définit

- Le spectre d'amplitude de $x(t)$:

$$\nu \mapsto \left|\hat{x}(\nu)\right|$$

- Le spectre de puissance de $x(t)$:

$$\nu \mapsto \left|\hat{x}(\nu)\right|^2$$

Le spectre du signal nous renseigne directement sur son contenu fréquentiel (forte présence ou quasi-absence d'une fréquence ν)

THÉORÈME DE WIENER-KHINTCHINE

- Soit $x(t)$ un signal analogique de transformée de Fourier $\hat{x}(\nu)$. On note $C_{xx}(t)$ sa fonction d'auto-corrélation, ie $C_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)x(u+t)\,\mathrm{d}\,u$

Alors

$$\left|\hat{x}(\nu)\right|^2 = \hat{C}_{xx}(\nu)$$

ie le spectre de x est égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation

- Exercice: montrer le théorème

SIGNAUX NUMÉRIQUES

ANALYSE DE FOURIER

- Idée: mesurer la ressemblance d'une fonction les sinusoïdes de différentes fréquences
- Exponentielle complexe de fréquence ν à temps discret: $\epsilon_\nu[t] = e^{i2\pi\nu t}$
- Mesure de ressemblance = produit scalaire: $\langle x, \epsilon_\nu \rangle = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} x[t]\overline{\epsilon_\nu}[t]$
- Soit x un signal numérique, sa transformée de Fourier est donnée par:

$$\hat{x}(\nu) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} x[t]e^{-i2\pi\nu t}$$

- $\hat{x}(\nu)$ est une fonction de la variable **continue ν, 1-périodique**

TRANSFORMÉE DE FOURIER POUR LES SIGNAUX À TEMPS DISCRET

- Soit $x[t]$ un signal numérique **stable** ($x[t] \in \ell^1(\mathbb{Z})$), ou d'**énergie finie** ($x[t] \in \ell^2(\mathbb{Z})$), sa transformée de Fourier est donnée par:

$$\hat{x}(\nu) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} x[t] e^{-i2\pi\nu t}$$

- $\hat{x}(\nu)$ est une fonction de la **variable continue ν**
- $\hat{x}(\nu)$ est une fonction **périodique de période 1:** $\hat{x}(\nu+1) = \hat{x}(\nu)$**,** $\forall \nu$

TRANSFORMÉE DE FOURIER INVERSE (SIGNAUX À TEMPS DISCRET)

Soit $x[t]$ un signal à temps discret et $\hat{x}(\nu)$ sa transformée de Fourier.

- La transformée de Fourier est inversible:

$$x[t] = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{x}(\nu) e^{i2\pi\nu t} \, \mathrm{d}\,\nu$$

- $\hat{x}(\nu)$ étant une **fonction** de la variable **continue**, la transformée de Fourier inverse est donnée par une **intégrale**
- $\hat{x}(\nu)$ **est de période 1,** on intègre sur une période complète: $[-1/2,1/2]$, ou bien $[0,1]$ etc.

EXEMPLES

- Soit $x[t] = \delta_k[t]$

$$\hat{x}(\nu) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} x[t]e^{-i2\pi\nu t} = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \delta_k[t]e^{-i2\pi\nu t}$$
$$= e^{-i2\pi\nu k}$$

- Inversement

$$x[t] = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi\nu k}e^{i2\pi\nu t}\,\mathrm{d}\,\nu = \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi\nu(t-k)}\,\mathrm{d}\,\nu$$
$$= \begin{cases} \left[\dfrac{e^{i2\pi\nu(t-k)}}{i2\pi(t-k)}\right]_{-1/2}^{1/2} = \dfrac{e^{i\pi(t-k)} - e^{-i\pi(t-k)}}{i2\pi(t-k)} = 0 \text{ si } t \neq k \text{ car } (t-k) \in \mathbb{Z} \\ \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{d}\,\nu = 1 \qquad \text{si } t = k \end{cases}$$

EXEMPLES

- Soit $x[t] = \Theta[t]$. Alors $x[t]$ n'admet pas de transformée de Fourier, car le signal de Heaviside n'est ni stable, ni d'énergie finie

EXEMPLES

- Soit $x[t] = \Pi_N[t]$

$$\hat{x}(\nu) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} x[t]e^{-i2\pi\nu t} = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \Pi_N[t]e^{-i2\pi\nu t} = \sum_{t=-N}^{N} e^{-i2\pi\nu t}$$

$$= \frac{e^{i2\pi\nu N} - e^{-i2\pi\nu(N+1)}}{1 - e^{-i2\pi\nu}}$$

$$= e^{-i\pi\nu}\frac{e^{i\pi\nu(2N+1)} - e^{-i\pi\nu(2N+1)}}{1 - e^{-i2\pi\nu}} = \frac{e^{i\pi\nu(2N+1)} - e^{-i\pi\nu(2N+1)}}{e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}}$$

$$= \frac{\sin(\pi\nu(2N+1))}{\sin(\pi\nu)}$$

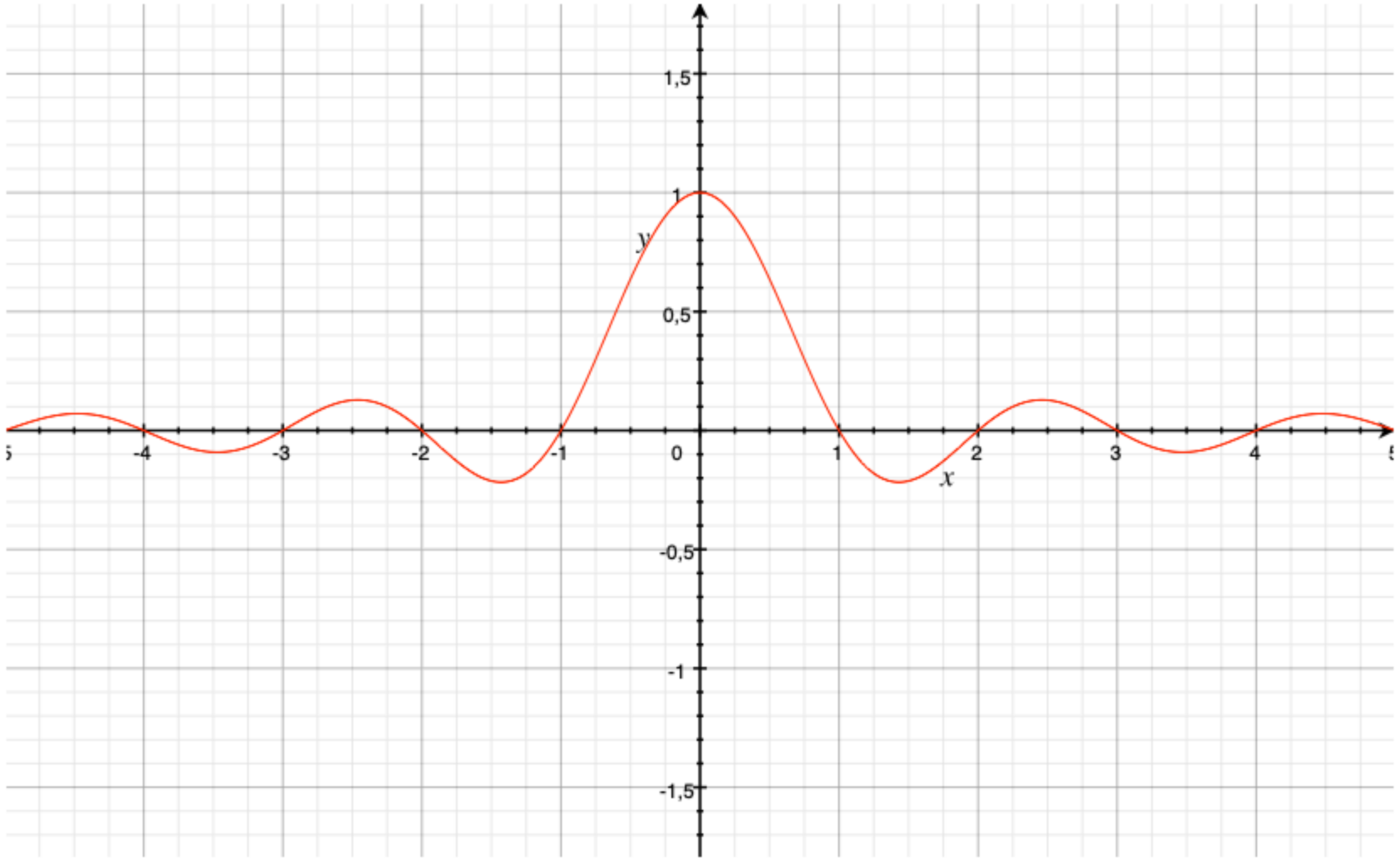
EXEMPLE

- Soit $x[t]$ le signal numérique défini par sa transformée de Fourier

$$\hat{x}(\nu) = \Pi_{[-1/2,1/2]}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \in [-1/2,1/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Alors, la transformée de Fourier inverse donne

$$\begin{aligned} x[t] &= \int_{-1/2}^{1/2} \hat{x}(\nu) e^{i2\pi\nu t}\, \mathrm{d}\,\nu = \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi\nu t}\, \mathrm{d}\,\nu \\ &= \left[\frac{e^{i2\pi\nu t}}{i2\pi t}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{i2\pi t} \\ &= \frac{\sin[\pi t]}{\pi t} \\ &= \mathrm{sinc}[t] \end{aligned}$$



THÉORÈME DE PLANCHEREL-PARSEVAL

Soit $u[t], v[t] \in \ell^2(\mathbb{Z})$ deux signaux numériques d'énergie finie, de transformée de Fourier $\hat{u}(\nu)$ et $\hat{v}(\nu)$. Alors

$$\langle u[t], v[t] \rangle = \langle \hat{u}(\nu), \hat{v}(\nu) \rangle$$

$$\|u\|_2^2 = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \left| u[t] \right|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \left| \hat{u}(\nu) \right|^2 \, \mathrm{d}\nu = \|\hat{u}\|_2^2$$

Il y a conservation de l'énergie dans le domaine fréquentiel

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE CALCULS

- Symétrie: si $\forall t,\ u[t] \in \mathbb{R}$, alors

$\hat{u}(\nu) = \overline{\hat{u}(-\nu)}$ et $\left|\hat{u}(\nu)\right| = \left|\hat{u}(-\nu)\right|$

- Linéarité: $v[t] = au_1[t] + u_2[t]$

$\hat{v}(\nu) = a\hat{u}_1(\nu) + \hat{u}_2(\nu)$

- Translation: $v[t] = u[t-k]$

$\hat{v}(\nu) = e^{-i2\pi k}\hat{u}(\nu)$

- Convolution: soit $w[t] = (u * v)[t]$, alors

$\hat{w}(\nu) = \hat{u}(\nu)\,\hat{v}(\nu)$

SPECTRE D'UN SIGNAL

Soit $x[t]$ un signal à temps discret et $\hat{x}(\nu)$ sa transformée de Fourier. On définit

- Le spectre d'amplitude de $x[t]$:

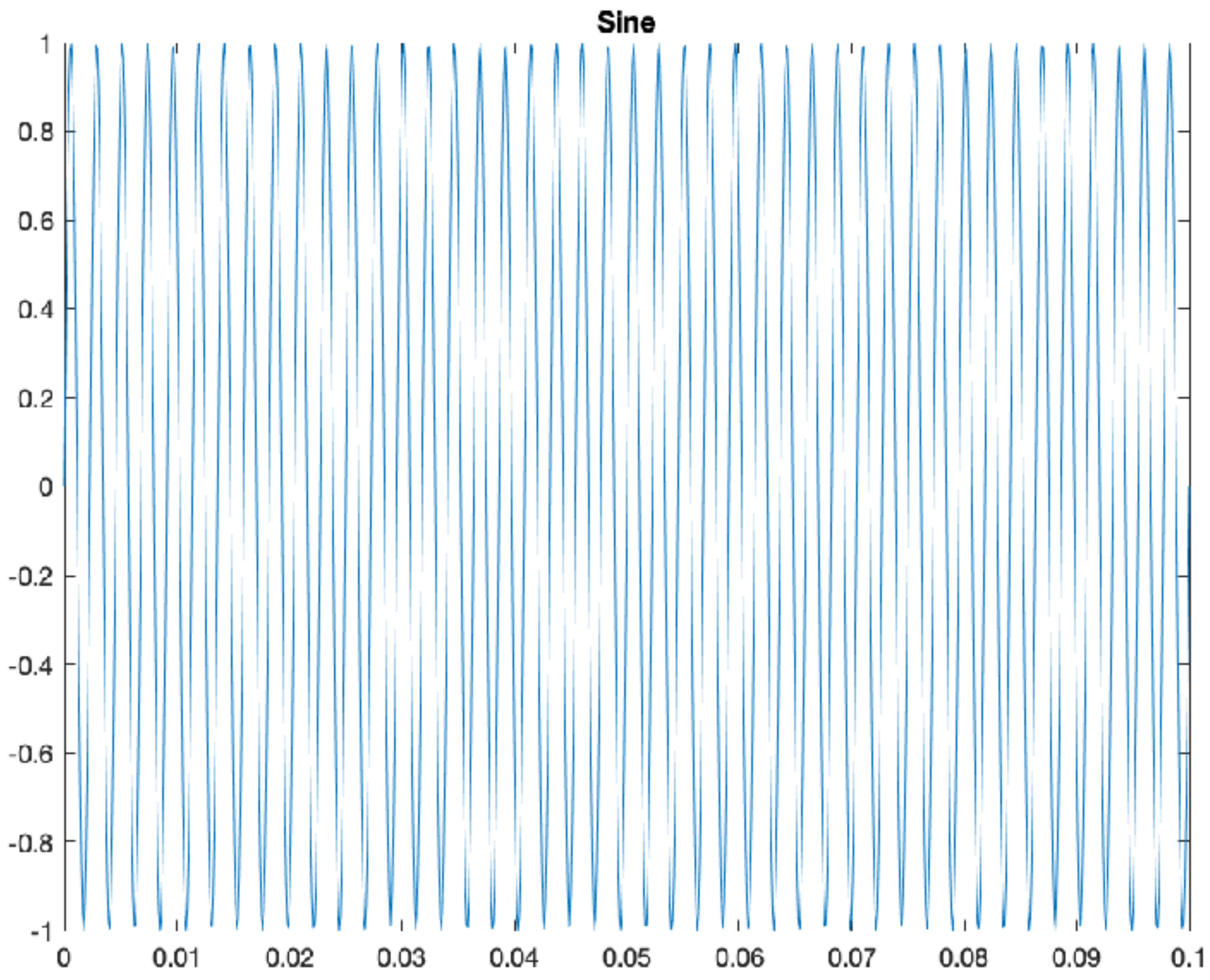
$$\nu \mapsto \left|\hat{x}(\nu)\right|$$

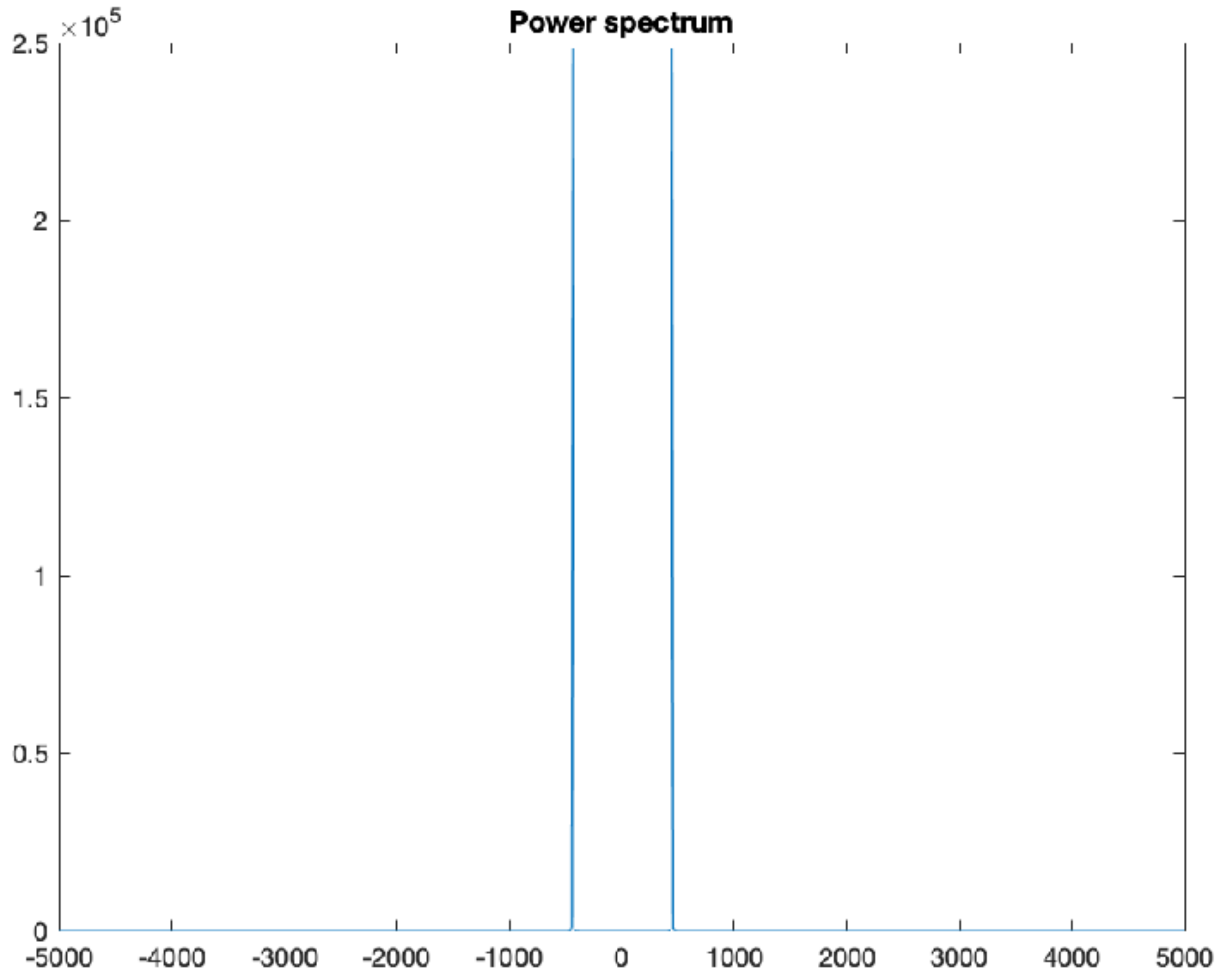
- Le spectre de puissance de $x[t]$:

$$\nu \mapsto \left|\hat{x}(\nu)\right|^2$$

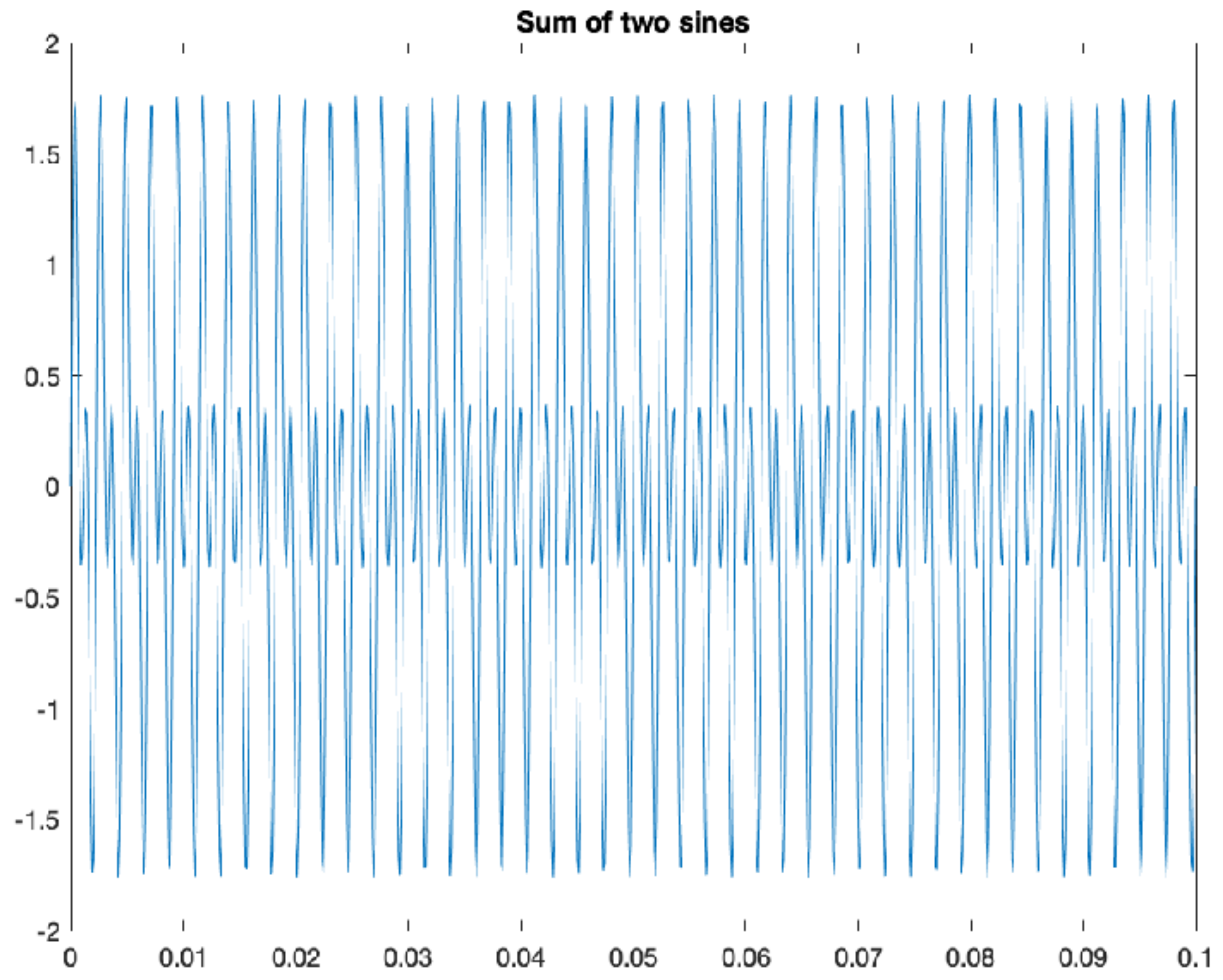
Le spectre du signal nous renseigne directement sur son contenu fréquentiel (forte présence ou quasi-absence d'une fréquence ν)

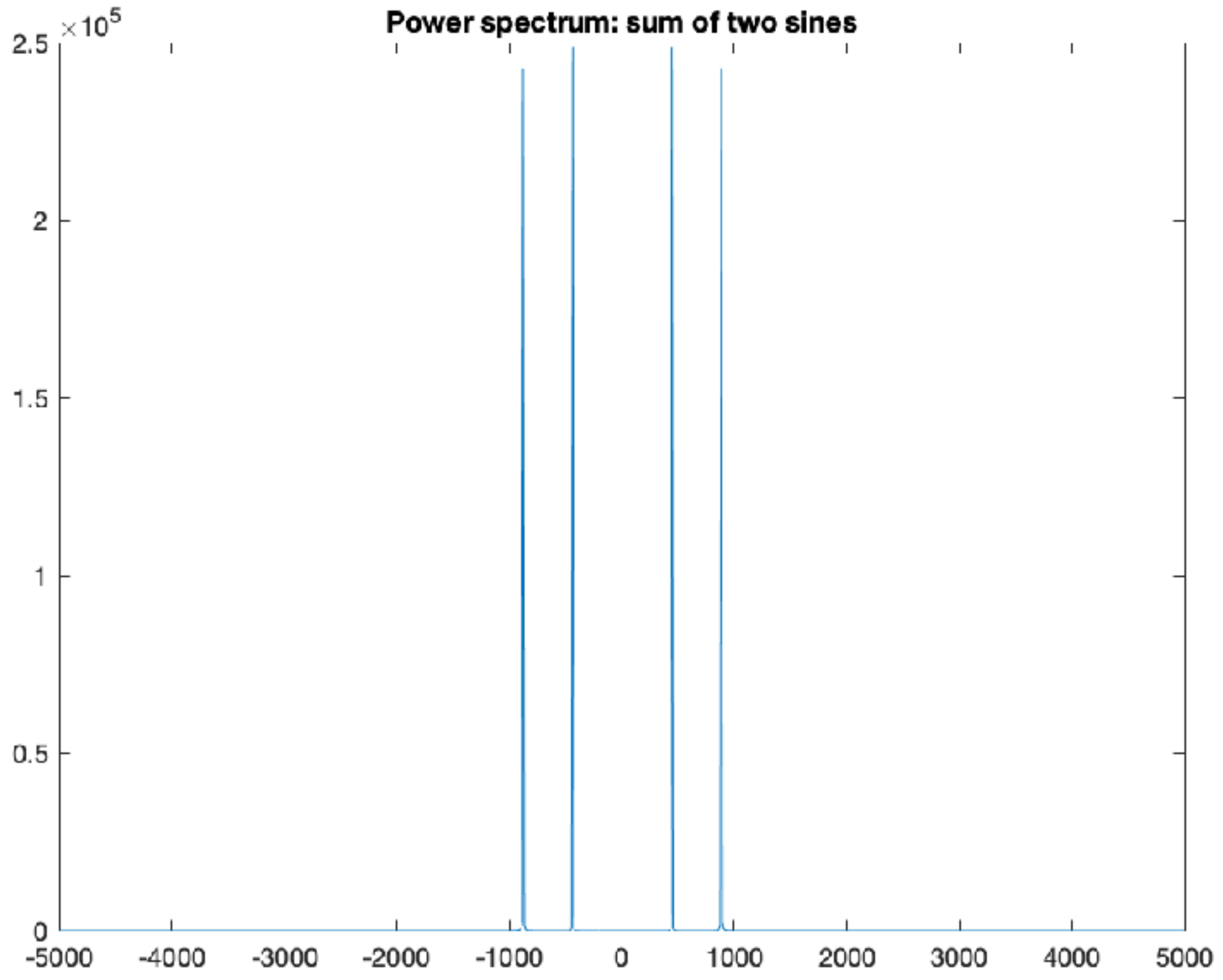
EXEMPLE: SINUSOIDE



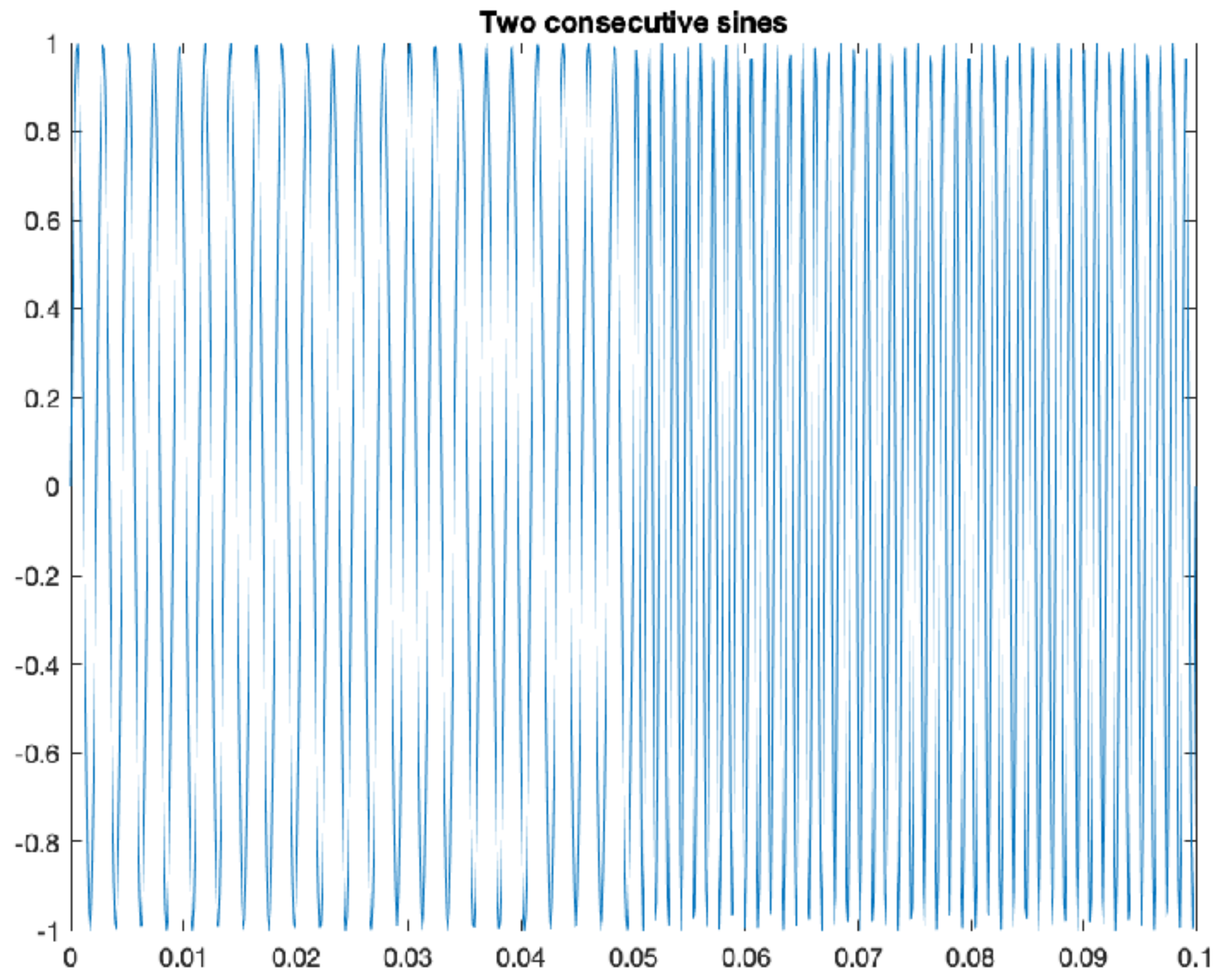


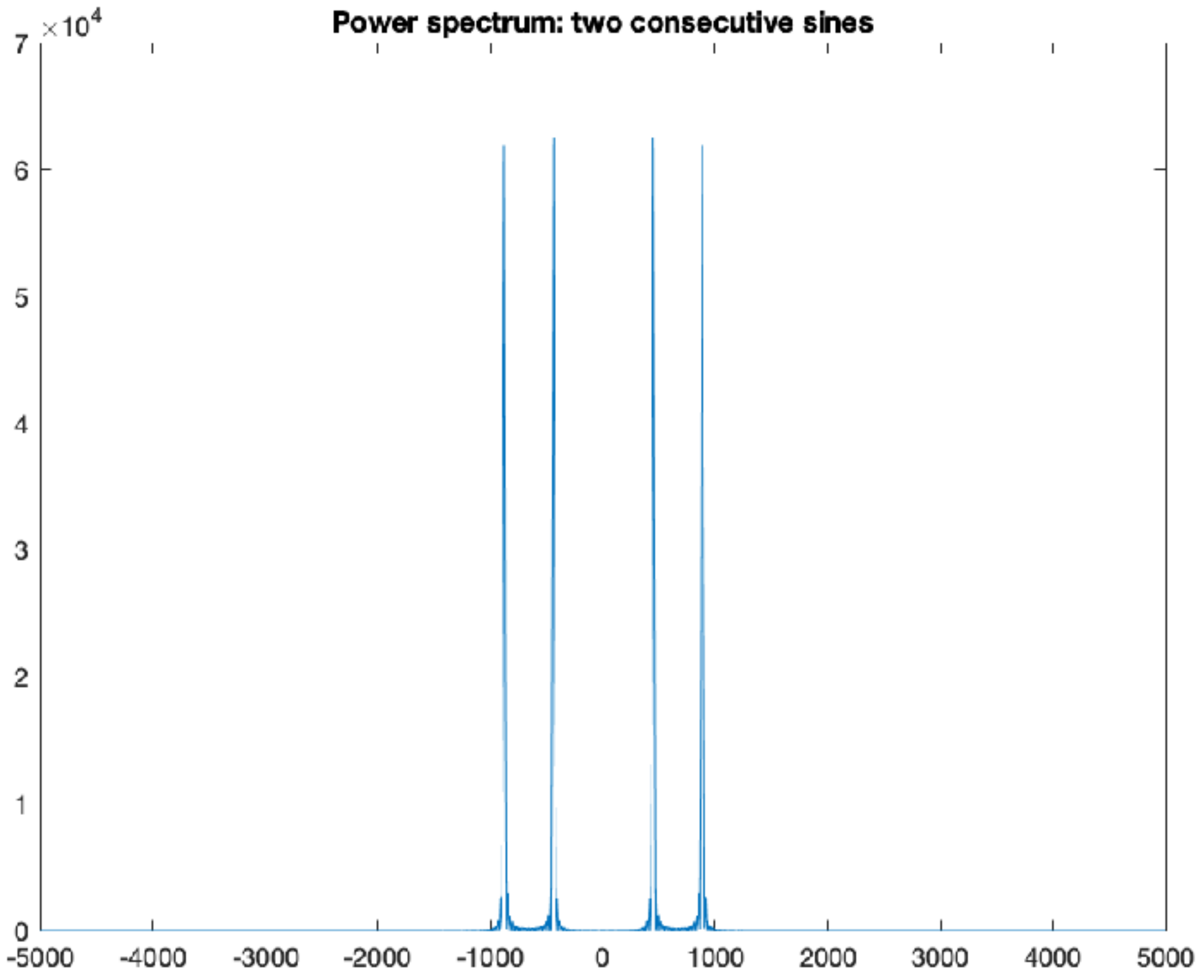
EXEMPLE: SOMME DE 2 SINUSOIDES





EXEMPLE: SUITE DE 2 SINUSOIDES

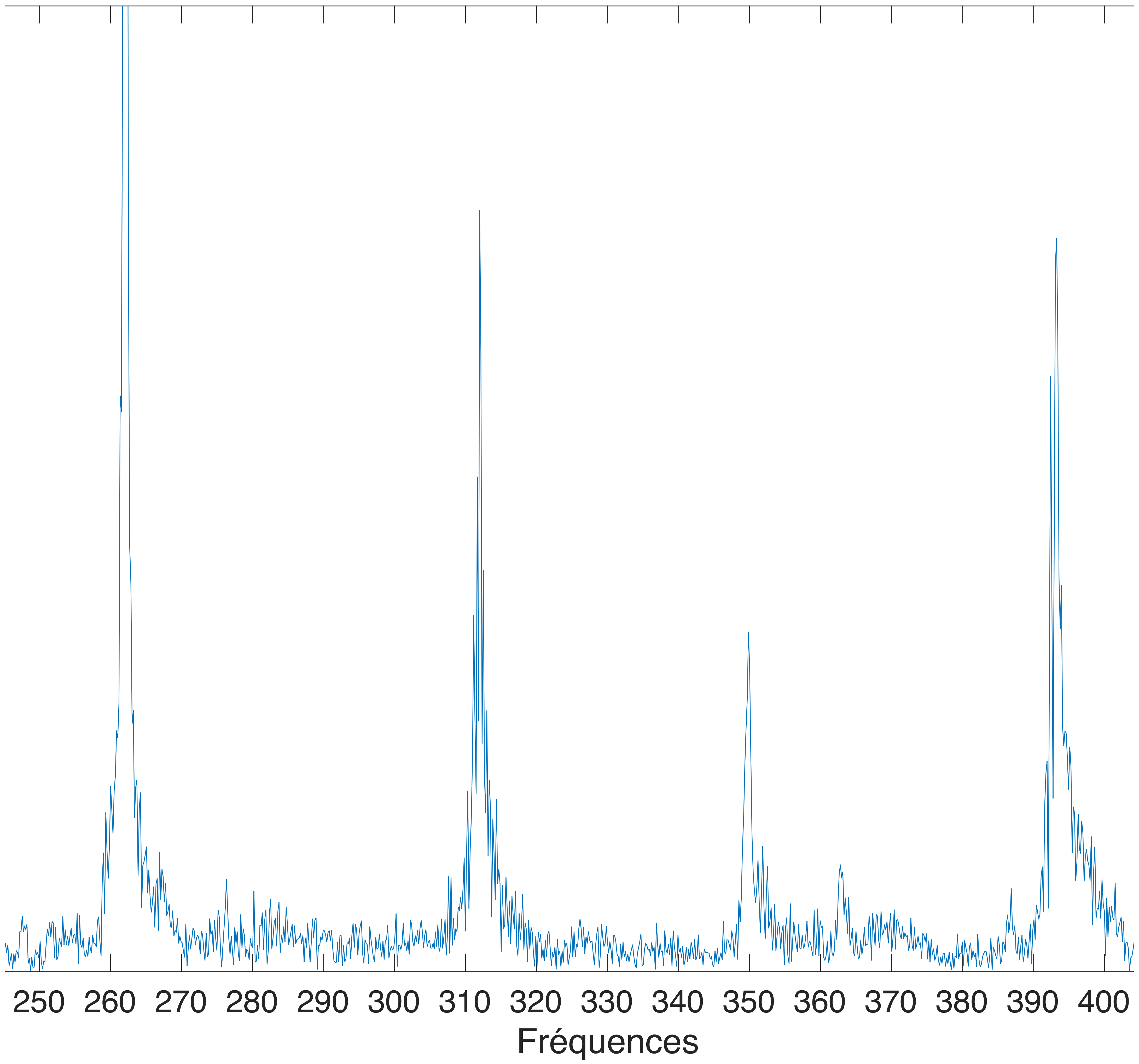




EXEMPLE: SPECTRE D'UN SIGNAL DE MUSIQUE

- Notes présentes:

  Do (262 Hz)
  Re# (311 Hz)
  Fa (349 Hz)
  Sol (392 Hz)
  Sol# (415 Hz)



THÉORÈME DE WIENER-KHINTCHINE

Soit $x[t]$ un signal numérique de transformée de Fourier $\hat{x}(\nu)$. On note $C_{xx}[t]$ sa fonction d'auto-corrélation, ie $C_{xx}[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[k+t]$

Alors

$$\left|\hat{x}(\nu)\right|^2 = \hat{C}_{xx}(\nu)$$

ie le spectre de x est égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation

CONCLUSION

EN BREF

- Analyse spectrale = transformée de Fourier
- Interprétation physique « simple »: permet de mesurer la « quantité » d'une sinusoïde a une fréquence donnée (penser aux notes de musiques)
- Modèle analogique VS modèle numérique
- Convolution en temps = multiplication en fréquence
- Conservation de l'énergie
- Propriétés de calculs