COURS 5: SYSTEMES A TEMPS CONTINU

TRAITEMENT DU SIGNAL

SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS

SIGNAUX ET SYSTÈMES

- Un signal est enregistré, et déformé, par un capteur
- Un signal est (presque) toujours lié à la notion de « système »
- Système: Bloc fonctionnel qui réagit à un signal d’excitation en entrée et produit un signal de réponse après avoir appliqué une fonction au signal d’entrée

- S est une « fonctionnelle » qui s’applique à un signal, et retourne un autre signal

SYSTÈMES LINÉAIRES A TEMPS CONTINU

- Un système linéaire est une fonction linéaire par rapport aux entrées
- Soit un système S et deux signaux d'entrées x_1 et x_2, tel que $y_1 = S\{x_1\}$ et $y_2 = S\{x_2\}$. S est linéaire ssi

$$\begin{aligned} S\{ax_1 + x_2\} &= aS\{x_1\} + S\{x_2\} \\ &= ay_1 + y_2 \end{aligned}$$

- Soit S un système linéaire. Alors il existe une fonction h tel que la relation entrée/sortie s'écrit:

$$y(t) = S\{x\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u,t)x(u)\,\mathrm{d}u$$

SYSTÈMES INVARIANTS DANS LE TEMPS

- Un système invariant dans le temps est stable par translation temporelle
- Soit un système S invariant dans le temps tel que $y(t) = S\{x\}(t)$. Soit $u_k(t) = x(t-k)$. Alors

$$S\{u_k\}(t) = y(t-k)$$

- Soit S un système linéaire. Alors il existe une fonction h tel que la relation entrée/sortie s'écrit:

$$y(t) = S\{x\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)x(u)\,\mathrm{d}u$$

FILTRES: SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS DANS LE TEMPS

- Un filtre est un systèmes linéaires invariant dans le temps
- Soit S un filtre. Alors il existe une fonction h appelée ***réponse impulsionnelle*** telle que la relation entrée/sortie s'écrit:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= S\{x\}(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)x(u)\, \mathrm{d}u \\
&= (h * x)(t)
\end{aligned}
$$

- la réponse impulsionnelle h caractérise complètement le filtre
- C'est une opération de **convolution**

RAPPEL: PRODUIT DE CONVOLUTION

- Soit u et v deux signaux analogique réels. Leur produit de convolution s'écrit

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

- Le produit de convolution est commutatif

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(t-x)\,\mathrm{d}x = (v * u)(t)$$

- Le Dirac est l'élément neutre de la convolution

$$(\delta * u)(t) = (u * \delta)(t) = u(t)$$

FILTRES

- Soit un filtre S de réponse impulsionnelle h. Alors

$$\begin{aligned} S\{\delta\}(t) = (h * \delta)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-x)h(x)\,\mathrm{d}x \\ &= h(t) \end{aligned}$$

- La réponse impulsionnelle est la réponse du filtre au signal impulsion de Dirac

FILTRES

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h. On dit que le filtre est

- Causal ssi h est causal
- Stable ssi h est stable
- Réalisable ssi h est réalisable

FILTRE CAUSAL

Soit un filtre causal de réponse impulsionnelle h. Alors l'équation de filtrage s'écrit

$$\begin{aligned} y(t) = (h * x)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)\, \mathrm{d}u \\ &= \int_{0}^{+\infty} h(u)x(t-u)\, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

- On voit que la réponse au temps t ne dépend que du signal d'entrée aux **temps précédents. Il n'y a pas besoin de connaitre le futur de x pour calculer y.**
- Il y a bien un rapport de **causalité** entre l'entrée x et la sortie y

FILTRE STABLE

Soit un filtre stable de réponse impulsionnelle h.

- Soit un signal d'entrée x stable. Alors le signal de sortie y est stable

$$
\begin{aligned}
\|y\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\,y(t)\,|\;\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u) \right| \;\mathrm{d}u\;\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\,h(u)\,|\,|\,x(t-u)\,|\;\mathrm{d}u\;\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| h(u) \right| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t-u) \right| \;\mathrm{d}t\;\mathrm{d}u \\
&\leq \|h\|_1 \|x\|_1 \\
&< +\infty
\end{aligned}
$$

- De même, si l'entrée x est bornée (i.e. $|\,x(t)\,| < B \forall t$), alors la sortie y est bornée

RÉPONSE EN FRÉQUENCE

- Soit un filtre **stable** de réponse impulsionnelle $h(t)$. La réponse en fréquence du filtre est la transformée de Fourier $\hat{h}(\nu)$ de la réponse impusionnelle.

- Soit

$$y(t) = (h * x)(t)$$

Alors

$$\hat{y}(\nu) = \hat{h}(\nu)\hat{x}(\nu)$$

  - Filtrer un signal revient à modifier son spectre. Exemple: un equalizer

FILTRES IDÉAUX

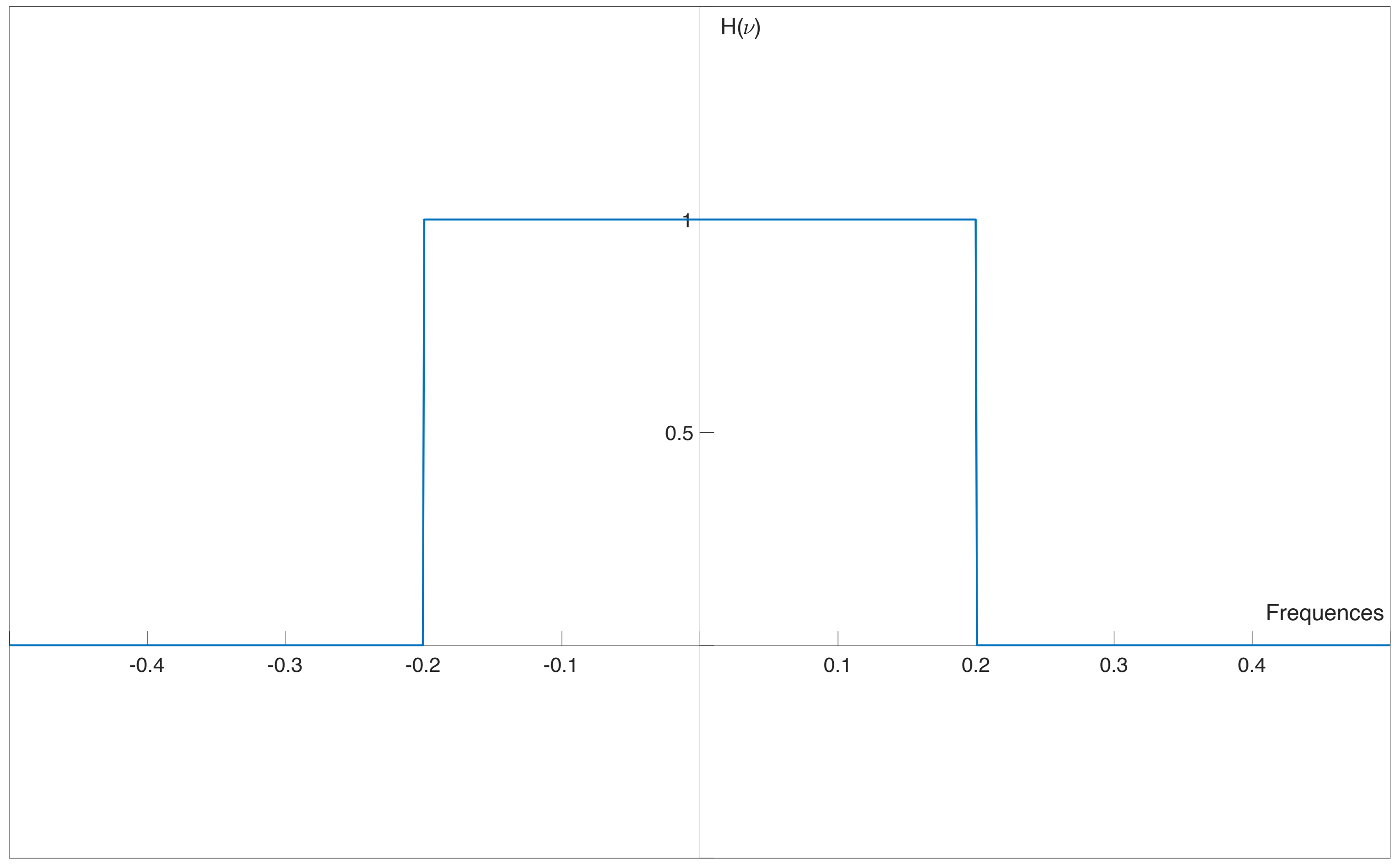
PASSE-BAS IDÉAL

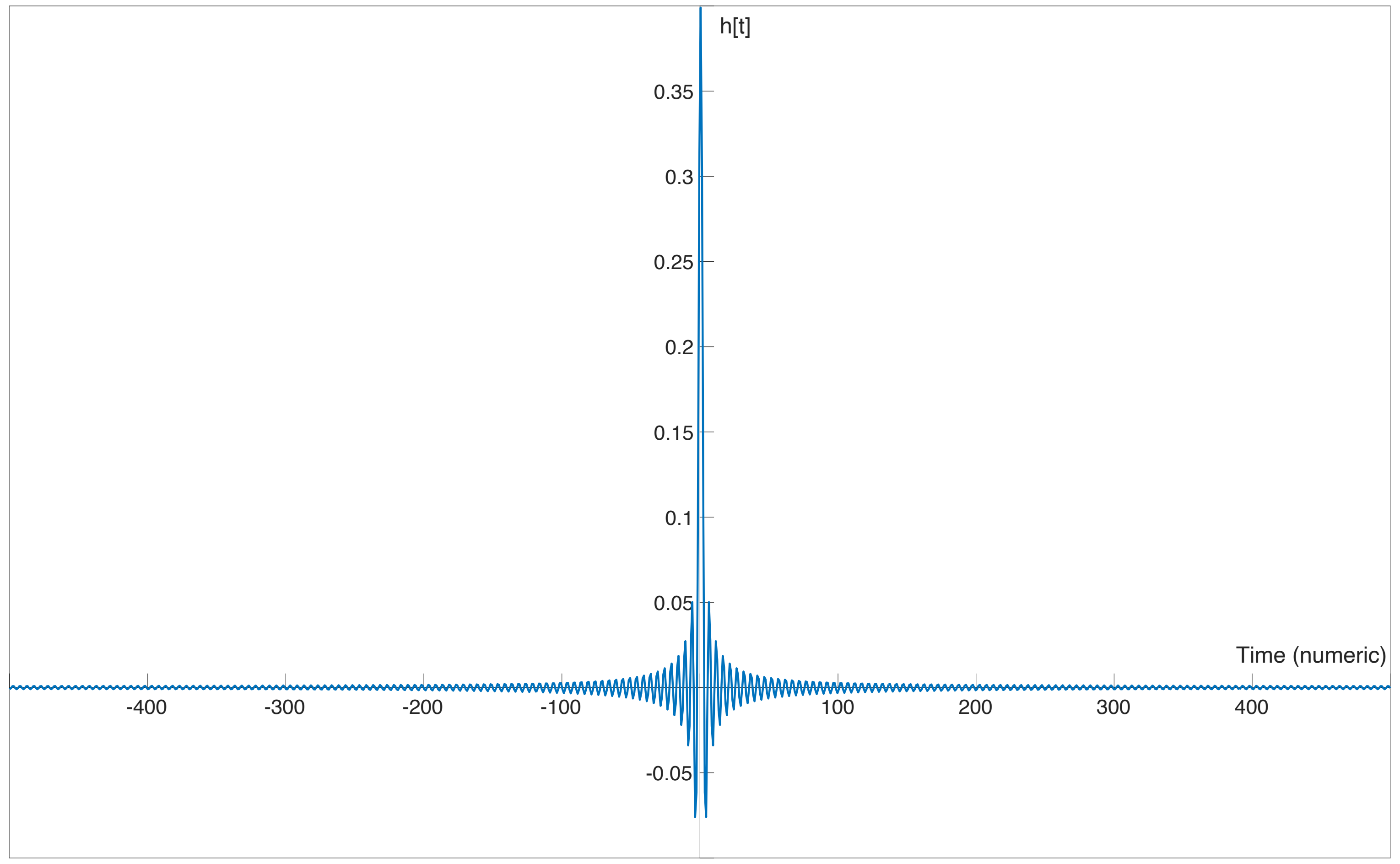
- Le filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure ν_0 es

$$\hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \in [-\nu_0, \nu_0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Sa réponse impulsionnelle est

$$h^{PB}_{\nu_0}(t) = 2\nu_0 \mathrm{sinc}(2\nu_0 t)$$





PASSE-HAUT IDÉAL

- Le filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure ν_0 e

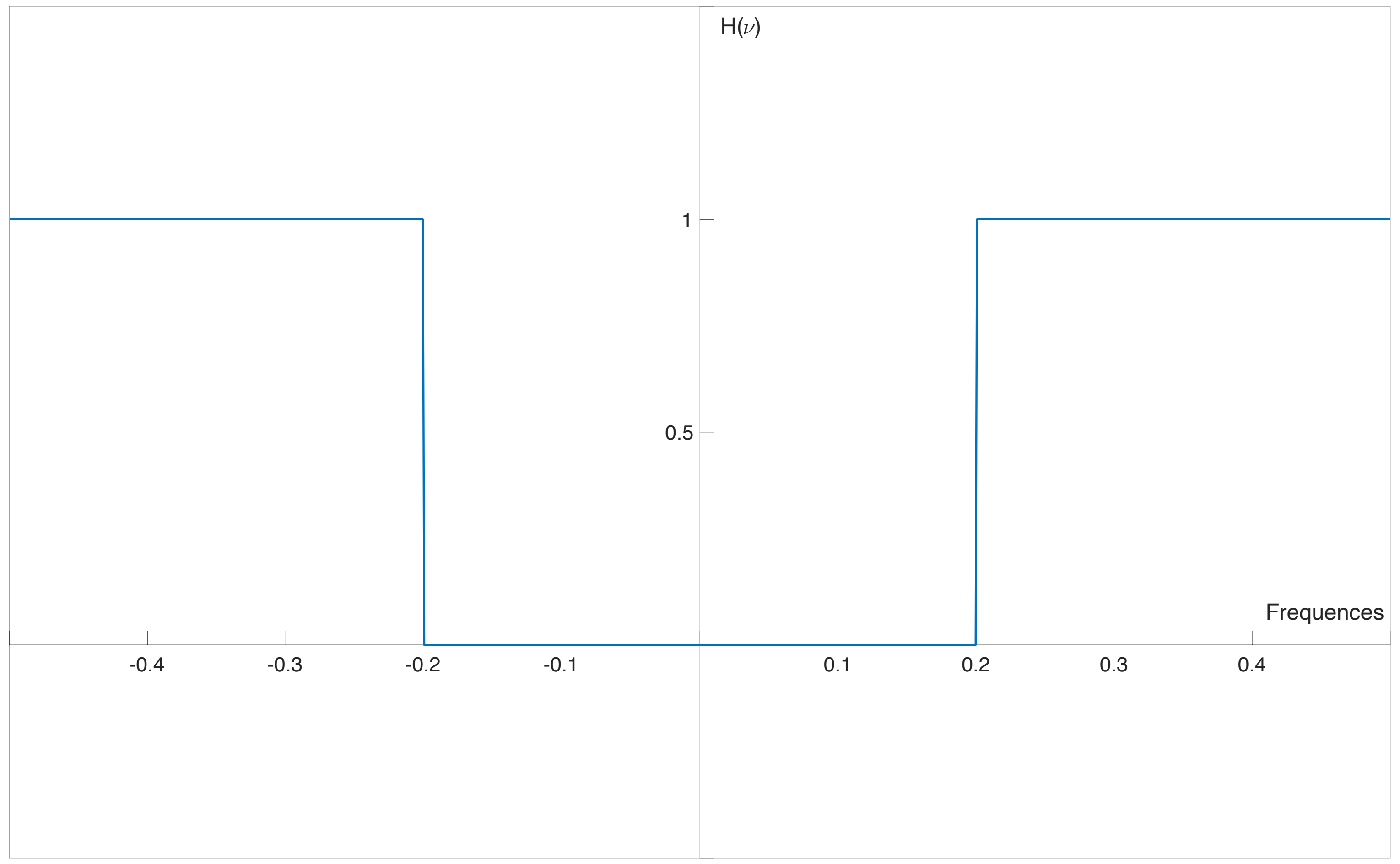
$$\hat{h}^{PH}_{\nu_0}(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \in [-\nu_0, \nu_0] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

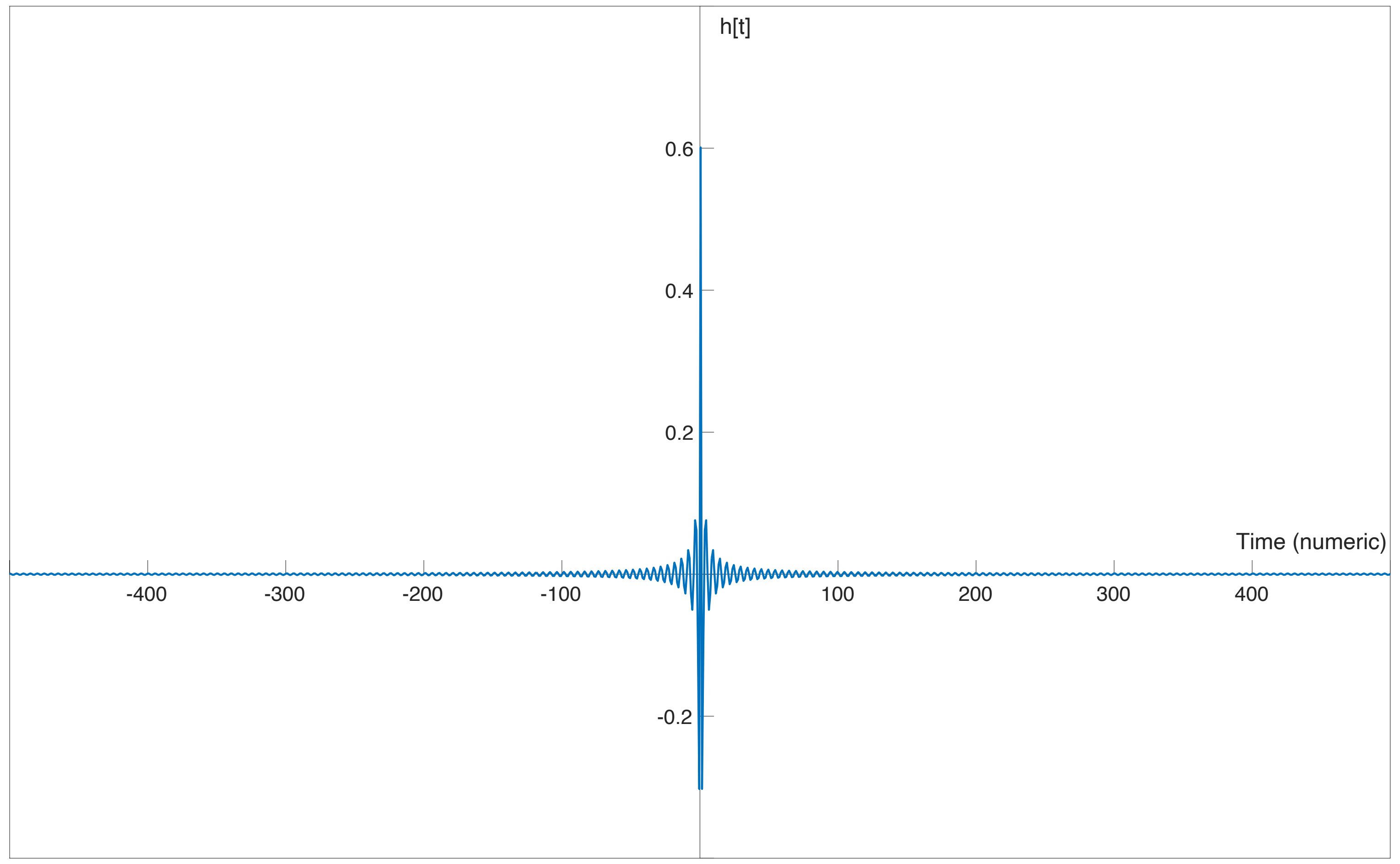
- Il s'exprime à l'aide d'un passe-bas

$$\hat{h}^{PH}_{\nu_0}(\nu) = 1 - \hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu)$$

- Sa réponse impulsionnelle est

$$h^{PH}_{\nu_0}(t) = \delta_0(t) - 2\nu_0 \mathrm{sinc}(2\nu_0 t)$$

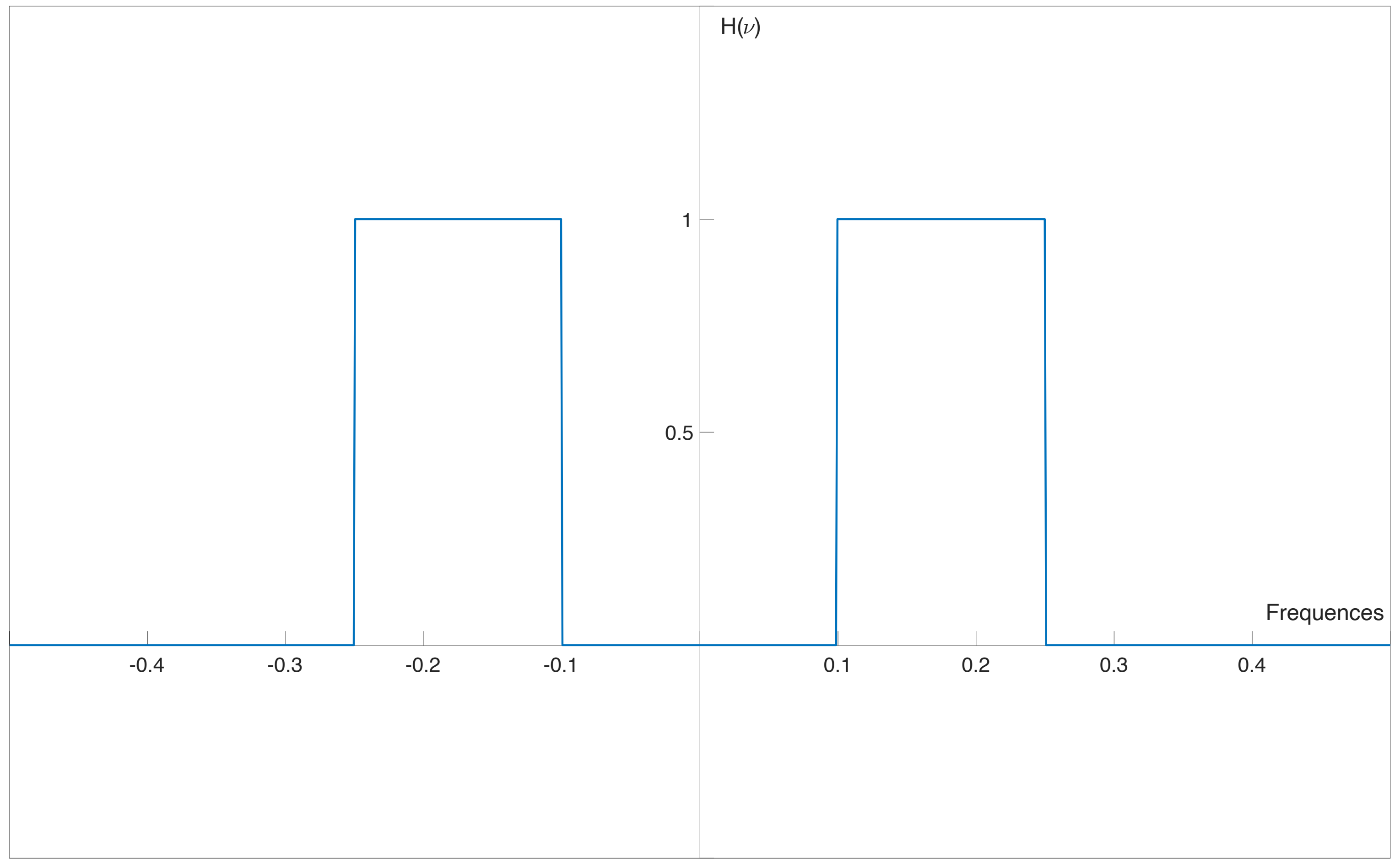




PASSE-BANDE IDÉAL

- Le filtre passe-bande idéal de fréquences de coupure
fréquence

$$\hat{h}^{Pbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \in [-\nu_1, -\nu_0] \cup [\nu_0, \nu_1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

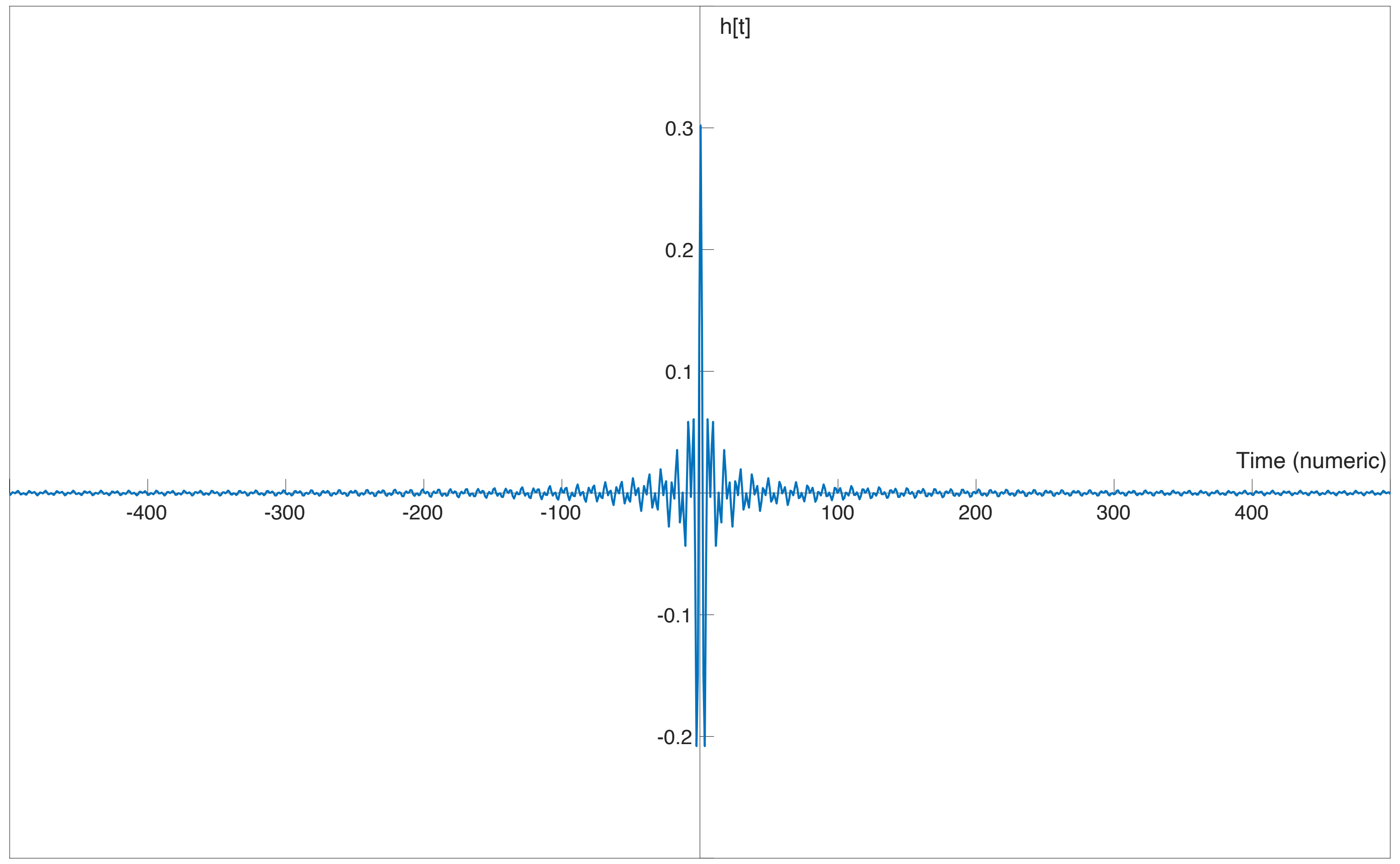


- Il s'exprime comme la différence de 2 passe-bas

$$\hat{h}^{Pbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = \hat{h}^{PB}_{\nu_1}(\nu) - \hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu)$$

- Sa réponse impulsionnelle est

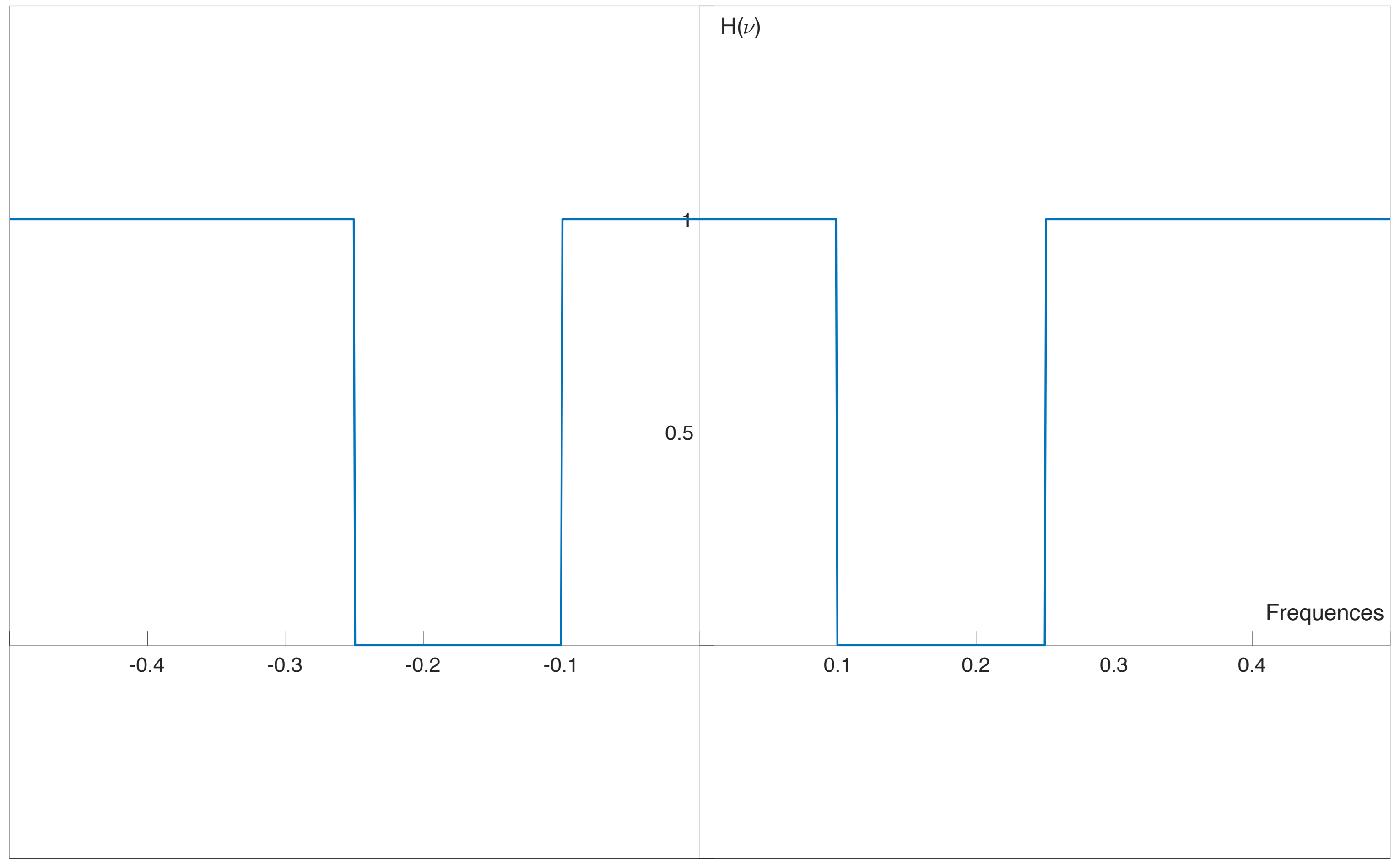
$$h^{Pbande}_{\nu_0,\nu_1}(t) = 2\nu_1 \mathrm{sinc}(2\nu_1 t) - 2\nu_0 \mathrm{sinc}(2\nu_0 t)$$



COUPE-BANDE IDÉAL

- Le filtre coupe-bande idéal de fréquences de coupure fréquence

$$\hat{h}^{Cbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \in [-\nu_1, -\nu_0] \cup [\nu_0, \nu_1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

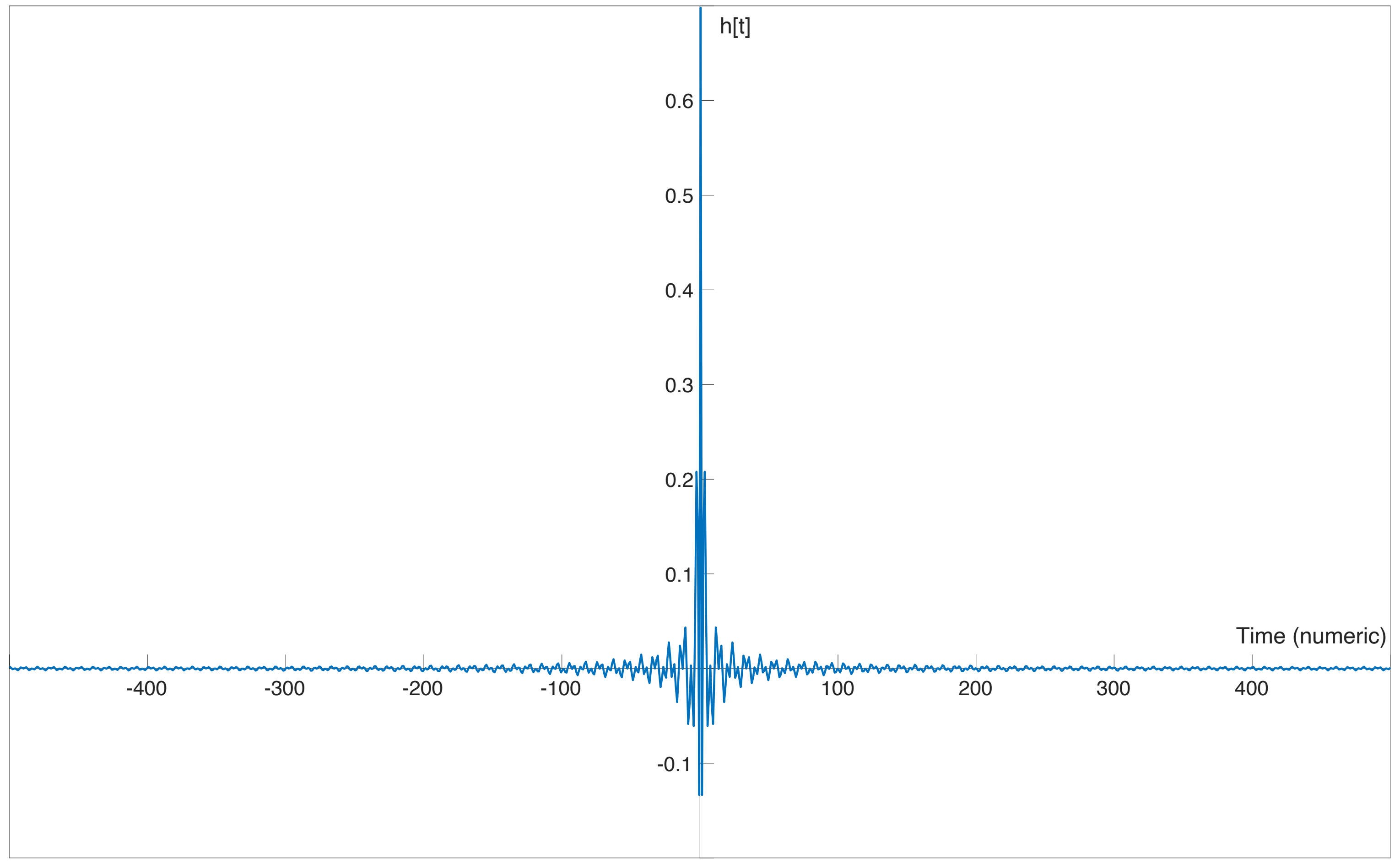


- Il s'exprime à l'aide de 2 passe-bas

$$\hat{h}^{Cbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = 1 - \hat{h}^{PB}_{\nu_1}(\nu) + \hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu)$$

- Sa réponse impulsionnelle est

$$h^{Cbande}_{\nu_0,\nu_1}(t) = \delta_0(t) - 2\nu_1 \mathrm{sinc}(2\nu_1 t) + 2\nu_0 \mathrm{sinc}(2\nu_0 t)$$



ANALYSE DES SYSTÈMES: TRANSFORMÉE DE LAPLACE

TRANSFORMÉE DE LAPLACE BILATÉRALE

- Soit $x(t)$ un signal analogique. La transformée de Laplace **bilatérale** de $x(t)$ est donnée par

$$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-pt}, \quad p = \sigma + i\omega$$

Définie sur sa bande de convergence $B(\sigma_1, \sigma_2)$ limitée par deux droites parallèles à l'axe imaginaire et d'abscisses σ_1 et σ_2

- **Une transformée de Laplace est toujours associée à une bande de convergence !**

TRANSFORMÉE DE LAPLACE UNILATÉRALE

- Soit $x(t)$ un signal analogique **causal**. La transformée de Laplace **unilatérale** de $x(t)$ est donnée par

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}, \quad p = \sigma + i\omega$$

Définie sur sa bande de convergence $B(\sigma_1, \sigma_2)$ limitée par deux droites parallèles à l'axe imaginaire et d'abscisses σ_1 et σ_2

- **Une transformée de Laplace est toujours associée à une bande de convergence !**

TRANSFORMÉE DE LAPLACE: EXEMPLE

- Soit $x(t) = \theta(t)e^{-at}$, $a \in \mathbb{R}$. Sa transformée de Laplace est

$$
\begin{aligned}
X(p) &= \int_{\mathbb{R}} \theta(t)e^{-at}e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+p)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a+p}
\end{aligned}
$$

- Définie sur $B(p) = \sigma > -a$

TRANSFORMÉE DE LAPLACE: EXEMPLE

- Soit $x(t) = -\theta(-t)e^{-at}$, $a \in \mathbb{R}$. Sa transformée de Laplace est

$$\begin{aligned} X(p) &= \int_{\mathbb{R}} -\theta(-t)e^{-at}e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(a+p)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a+p} \end{aligned}$$

- Définie sur $B(p) = \sigma < -a$

TRANSFORMÉE DE LAPLACE ET CAUSALITÉ

Soit $x(t)$ un signal analogique et $X(p)$ sa transformée de Laplace définie sur $B(\sigma_1, \sigma_2)$

- $x(t)$ est causal ssi $B(p)$ est de la forme $\sigma > \sigma^+$. De plus $\lim_{\sigma \to +\infty} |X(p)| = 0$
- $x(t)$ est anti-causal ssi $B(p)$ est de la forme $\sigma < \sigma^-$. De plus $\lim_{\sigma \to -\infty} |X(p)| = 0$

TRANSFORMÉE DE LAPLACE ET STABILITÉ

Soit $x(t)$ un signal numérique et $X(p)$ sa transformée de Laplace z définie sur $B(\sigma_1, \sigma_2)$.

- $x(t)$ est stable ssi $0 \in B(p)$ (ie $\sigma_1 < 0$ et $\sigma_2 > 0$)
- Si $x(t)$ est stable, alors il admet une transformée de Fourier $\hat{x}(\nu)$ et

$$\hat{x}(\nu) = X(i2\pi\nu)$$

TRANSFORMÉE DE LAPLACE: PROPRIÉTÉS DE CALCULS

- Linéarité: $v(t) = au_1(t) + u_2(t)$

$$V(p) = aU_1(p) + U_2(p)$$

- Translation: $v(t) = u(t - k)$

$$V(p) = e^{-pk}U(p)$$

- Convolution: soit $w(t) = (u * v)(t)$, alors

$$W(p) = U(p)\,V(p)$$

- Dérivation $v(t) = u'(t)$

$$V(p) = pU(p)$$

- Intégration $v(t) = \int_a^t u(x)\,\mathrm{d}x$

$$V(p) = \frac{1}{p}U(p)$$

TRANSFORMÉE DE LAPLACE ET FILTRAGE

- Soit un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. Alors

$$y(t) = (h * x)(t)$$

- Après transformée de Laplace on a

$$Y(p) = H(p)X(p)$$

- La transformée de Laplace $H(p)$ de la réponse impulsionnelle est appelée **fonction de transfert** du filtre

CONCLUSION

EN BREF

- Filtres = systèmes linéaire invariant dans le temps (convolution !)
- Transformée de Laplace: généralisation de la transformée de Fourier pour analyser les systèmes (y compris les systèmes non stables !)
- Systèmes gouvernés par une equation différentielle